＜ 積分 4 ＞

例題　n を自然数とするとき

$$I_n = \int_0^{\pi} t\cos(nt)dt$$

を求めよ。

(解答)　前ページのように部分積分の公式を使う。$\sin(n\pi) = 0$ より

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\pi} t\cos(nt)dt = \int_0^{\pi} t\left(\frac{1}{n}\sin(nt)\right)' dt \\
&= \left[t \times \frac{1}{n}\sin(nt)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(t)' \times \frac{1}{n}\sin(nt)dt \\
&= \frac{\pi}{n}\sin(n\pi) - 0 - \int_0^{\pi}\frac{1}{n}\sin(nt)dt \\
&= -\left[-\frac{1}{n^2}\cos(nt)\right]_0^{\pi} = \left[\frac{1}{n^2}\cos(nt)\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{n^2}\{\cos(n\pi) - \cos(0)\}
\end{aligned}$$

ここで $\cos 0 = 1$ であるが，$\cos(n\pi)$ は n が奇数か偶数かによって異なる。

① n が奇数のとき $\cos(n\pi) = -1$ より

$$I_n = \frac{1}{n^2}\{-1-1\} = -\frac{2}{n^2}$$

② n が偶数のとき $\cos(n\pi) = 1$ より

$$I_n = \frac{1}{n^2}\{1-1\} = 0$$

問　自然数 n に対し，次の定積分の値を求めよ。

(1) $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(nt)dt$

(2) $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} t\sin(nt)dt$