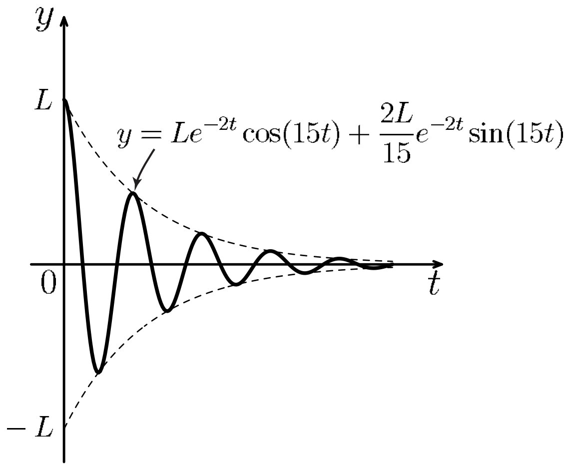
高知工科大学

Kochi University of Technology

数 学 3

(2007年度改訂版)



常微分方程式入門

(複素数，オイラーの公式，1階線形微分方程式
変数分離形，定数係数2階線形微分方程式)

井上 昌昭　著

< 複素数の定義 >

$$i^2 = -1$$

となる数を考え，この数 i を **虚数単位** という。虚数単位は $i = \sqrt{-1}$ と書く場合もある。（電気関係の本は虚数単位を j で表すことがあるが数学や物理学の本では虚数単位は i で統一してある。）

実数 a, b に対し

$$z = a + bi$$

の形を **複素数** (*complex number*) とよび，複素数全体の集合を $\boldsymbol{C}$ という記号で表す。実数 a, b をそれぞれ複素数 z の **実部** (*real part*) および **虚部** (*imaginary part*) とよび,

$$a = \mathrm{Re}(z)\ ,\ b = \mathrm{Im}(z)$$

という記号で表す。とくに

$$b = 0 \text{ のとき } z = a + 0i = a$$

と定める。つまり実数は虚部が 0 の特別な複素数と考えることにする。また $b \neq 0$ のとき、 z を **虚数** とよび、とくに

$$bi\ \ (a = 0, b \neq 0)$$

の形の虚数を **純虚数** という。

$$\text{複素数}\,(\boldsymbol{C}) \begin{cases} \text{実数}\,(\boldsymbol{R}) \\ \text{虚数} \begin{cases} \text{純虚数} & \cdots\ 2i\ ,\ \frac{1}{3}i\ ,\ -\sqrt{2}i\ \text{ など} \\ \text{その他の虚数} & \cdots\ 1+2i\ ,\ -2+\sqrt{3}i\ \text{ など} \end{cases} \end{cases}$$

２つの複素数の実部と虚部がそれぞれ等しい場合に限り、２つの複素数が等しいという。すなわち

$$a + bi = c + di \iff a = c \text{ かつ } b = d$$

$$\text{とくに}\quad a + bi = 0 \iff a = b = 0$$

例　(1)　$a + bi = \sqrt{3} \iff a = \sqrt{3},\ \ b = 0$

(2)　$a + bi = -3i \iff a = 0,\ \ b = -3$

(3)　$a + bi = \dfrac{1 - \sqrt{3}i}{2} \iff a = \dfrac{1}{2},\ \ b = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

問　次式をみたす実数 a, b を求めよ。

(1)　$a + bi = \dfrac{1 + 3i}{2}$　　　　(2)　$a + bi = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{3}\ i$

< 複素数の四則演算 >

x_1, x_2, y_1, y_2 が実数のとき

① $(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$

② $(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$

③ $(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$

④ $\dfrac{(x_1+iy_1)}{(x_2+iy_2)}=\dfrac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{{x_2}^2+{y_2}^2}+i\dfrac{y_1x_2-x_1y_2}{{x_2}^2+{y_2}^2}$

複素数の計算では実数と同じように行い, i^2 が出てくれば -1 でおきかえれば良い。
また分数のときは, ④のように分母を実数になおす。

例　(1) $2(1+4i)+5(3-2i)=(2+8i)+(15-10i)=17-2i$

(2) $(3+4i)(5+7i)=3\times5+4\times7i^2+i(3\times7+4\times5)=-13+41i$

(3) $\dfrac{4-i}{3+2i}=\dfrac{(4-i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\dfrac{4\times3+2i^2-i(4\times2+3\times1)}{3^2-2^2i^2}$

$$=\frac{12-2-i(8+3)}{9+4}=\frac{10}{13}-\frac{11}{13}i$$

問　次式を簡単にせよ。ただし a, b, c, d, θ は実数とする。

(1) $3(6-2i)-4(2-i)=$

(2) $i^3=$　　(3) $i^4=$　　(4) $i^5=$　　(5) $i^6=$

(6) $i^7=$　　(7) $i^8=$　　(8) $i^9=$　　(9) $i^{10}=$

(10) $(4+3i)(4-3i)=$

(11) $(a-bi)(\cos\theta+i\sin\theta)=$

(12) $\dfrac{c+di}{a+bi}=$

< 負の数の平方根 >

前のページまでの計算規則に従うと

$$(\sqrt{2}\,i)^2 = -2\ ,\quad (-\sqrt{2}\,i)^2 = -2$$

となるから，-2 の平方根は $\sqrt{2}\,i$ と $-\sqrt{2}\,i$ である。
これらの数をそれぞれ

$$\sqrt{-2} = \sqrt{2}\,i\ ,\quad -\sqrt{-2} = -\sqrt{2}\,i$$

のように表すことにする。一般に

$$\boxed{a > 0 \text{ のとき}\quad \sqrt{-a} = \sqrt{a}\,i}$$

と定める。

例 1　$\sqrt{-4}\times\sqrt{-9} = \sqrt{4}\,i\times\sqrt{9}\,i = 2\times 3\times i^2 = -6$

（注）　$\sqrt{-4}\times\sqrt{-9} \neq \sqrt{(-4)\times(-9)}\ \ (= \sqrt{36} = 6)$

このように $\sqrt{\ }$ の中がマイナスになるときは，普通の $\sqrt{\ }$ の計算規則がなりたたない。$\sqrt{\ }$ の中がマイナスになる場合は必ず虚数単位 i を用いて計算しなければならない。

例 2　$$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{-9}} = \frac{2}{3i} = \frac{2\times i}{3i\times i} = \frac{2i}{-3} = -\frac{2}{3}i$$

$$\sqrt{\frac{4}{-9}} = \sqrt{-\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{4}{9}}\,i = \frac{2}{3}i$$

従って　$\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{-9}} \neq \sqrt{\dfrac{4}{-9}}$ である。

問　次式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt{(-3)\times(-4)\times(-5)}$　　(2) $\sqrt{-3}\times\sqrt{-4}\times\sqrt{-5}$

(3) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{-4}}$　　(4) $\sqrt{\dfrac{12}{-4}}$

< 2次方程式 >

実数 a, b, c $(a \neq 0)$ に対し，2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

は

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}$$

と変形できる。従って

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

より解の公式

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

が求まる。ここで $\sqrt{}$ の中がマイナスになれば，答は虚数になる。
虚数解も 2 次方程式の解と考えると，2 次方程式は複素数の範囲で必ず解がある。

例　2 次方程式

$$3x^2 + 5x + 7 = 0$$

は解の公式によって

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 3 \times 7}}{2 \times 3} = \frac{-5 \pm \sqrt{-59}}{6} = -\frac{5}{6} \pm \frac{\sqrt{59}}{6}i$$

問　次の 2 次方程式の解を複素数の範囲で求めよ。

(1) $x^2 - 6x + 13 = 0$　　　$x =$

(2) $x^2 + x + 2 = 0$　　　$x =$

(3) $3x^2 - 5x + 4 = 0$　　　$x =$

< 共役複素数 >

たとえば

$$3+2i \text{ と } 3-2i\,, \quad 1-\sqrt{3}i \text{ と } 1+\sqrt{3}i$$

のように，虚部の符号だけが違う 2 つの複素数を **互いに共役** (きょうやく) という。
一方は他方の **共役複素数** という。複素数 z の共役複素数を $\overline{z}$ で表す。
すなわち, 実数 a, b に対し,

$$\boxed{z=a+bi \quad \text{のとき} \quad \overline{z}=a-bi}$$

である。従って $\overline{z}$ の共役複素数は $\overline{\overline{z}}=a+bi$ であるから

$$\overline{\overline{z}}=z$$

である。

例 (1) $\overline{2+3i}=2-3i$, $\overline{(-1-\sqrt{2}i)}=-1+\sqrt{2}i$

(2) $\overline{4}=4$, $\overline{(-5i)}=5i$

(3) $z=3+2i$ のとき $\overline{z}=3-2i$

$$z+\overline{z}=(3+2i)+(3-2i)=6$$

$$z\overline{z}=(3+2i)(3-2i)=3^2+2^2=13$$

問 1 以下の複素数 z に対し，共役複素数 $\overline{z}$ を求めよ。

(1) $z=1$, $\overline{z}=$　　　(2) $z=i$, $\overline{z}=$

(3) $z=1-i$, $\overline{z}=$　　　(4) $z=\dfrac{1+i}{2}$, $\overline{z}=$

問 2 $z=4+3i$ に対し，次式を計算せよ。

(1) $\dfrac{1}{2}(z+\overline{z})$　　　(2) $\dfrac{1}{2i}(z-\overline{z})$　　　(3) $z\overline{z}$

$=$　　　$=$　　　$=$

問 3 実数 a,b に対し，$z=a+bi$ とする。以下の値を a と b で表せ。

(1) $\dfrac{1}{2}(z+\overline{z})$　　　(2) $\dfrac{1}{2i}(z-\overline{z})$　　　(3) $z\overline{z}$

$=$　　　$=$　　　$=$

＜絶対値＞

複素数 $z = a + bi$（ a , b は実数）に対し,

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

を z の **絶対値** という。

例　$z = 3 + 2i$ のとき

$$|z| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

問 1　複素数 z が以下の場合に絶対値 $|z|$ を求めよ。

(1) $z = -1$　　(2) $z = 7i$　　(3) $z = 3 + 4i$　　(4) $z = \dfrac{1+i}{2}$

$|z| =$　　$|z| =$　　$|z| =$　　$|z| =$

前ページの結果より複素数 $z = a + bi$ に対して

$$\boxed{z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2}$$

が成り立つ。

例 2　$z = 2 + 3i$ のとき

$$|z|^2 = 2^2 + 3^2 = 13$$

$$z^2 \ = (2 + 3i)^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times 3i - 3^2 = -5 + 12i$$

$$|z^2| = \sqrt{(-5)^2 + (12)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

問 2　以下の複素数 z に対して，$|z|^2$, z^2 , $|z^2|$ を求めよ。

(1) $z = 4 - 3i$　　(2) $z = 1 + i$

$|z|^2 =$　　$|z|^2 =$

$z^2 \ =$　　$z^2 \ =$

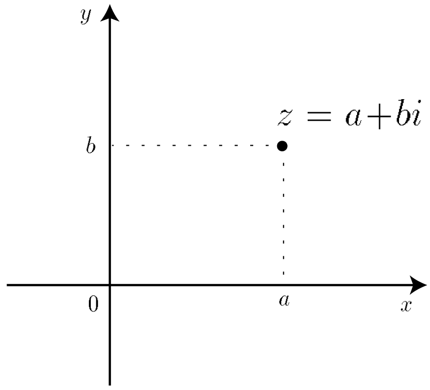
$|z^2| =$　　$|z^2| =$

< 複素平面 >

定数が数直線上の点で表されたように，複素数を平面上の点として表現する。実数 a, b に対し，複素数

$$z = a + bi$$

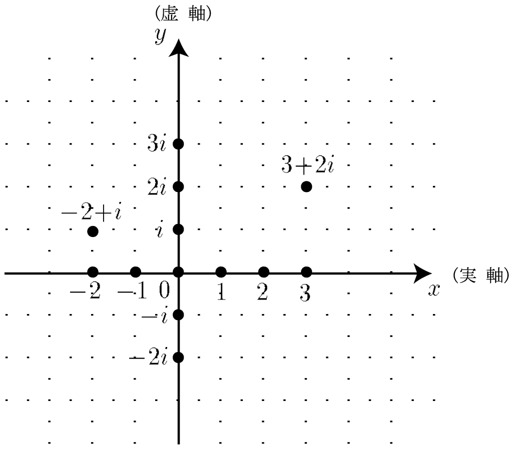
を，右図のように，x 軸上の目もりが a, y 軸上の目もりが b である xy 平面上の点として表す。この平面を **複素平面** または **ガウス平面** という。



例 1　右図のように

実数 $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ は全て x 軸上に並んでいる。この x 軸を **実軸** という。

純虚数 $-2i, -i, i, 2i, 3i$ は全て y 軸上に並んでいる。この y 軸を **虚軸** という。



問 1　例 1 の右図の中に以下の複素数を図示せよ。

(1) $1 + i$,　　(2) $2 - 2i$,　　(3) $-3 + 3i$,　　(4) $-2 - 3i$

例 2　a, b を正の数とすると複素数 $z = a + bi$ は右図の位置にあり，共役複素数

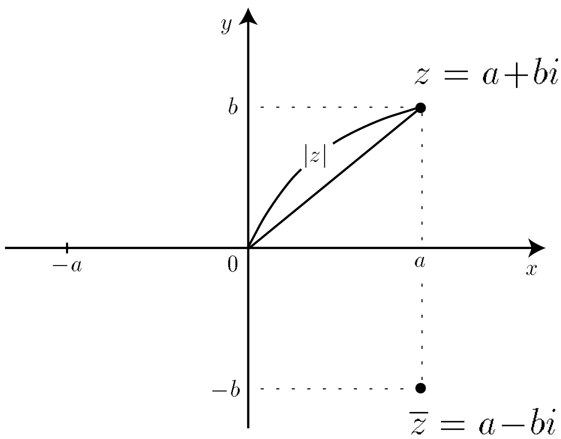
$$\overline{z} = a - bi$$

は実軸に関して対称な位置にある。

また，絶対値

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

は原点からの距離を表す。



問 2　例 2 の右図上に $-z$ および $-\overline{z}$ を図示せよ。

< 極形式 1 >

複素数 $z = x + yi$ に対し,

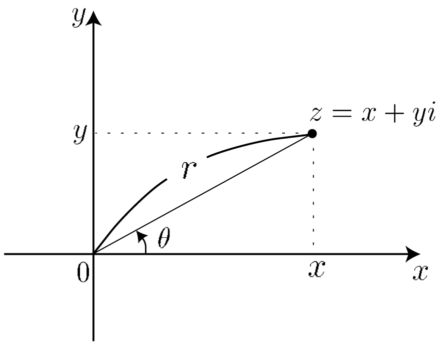
$$|z| = r$$

で，右図のように x 軸の正の部分からの角度が θ であるとき

$$x = r\cos\theta\,,\quad y = r\sin\theta$$

となる。従って

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}\qquad \text{（極形式）}$$



と表される。これを z の**極形式**という。このとき角 θ は複素数 z の**偏角** という。

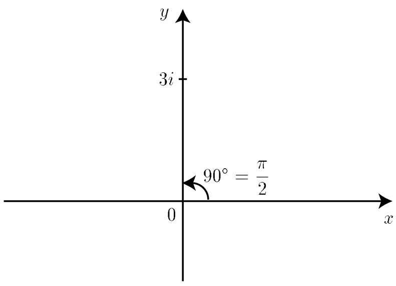
(注）$r = |z|$ より $r > 0$ である。

例　(1) $z = 3i$ のとき右図より

$$r = |z| = 3,\ \theta = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

だから

$$3i = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

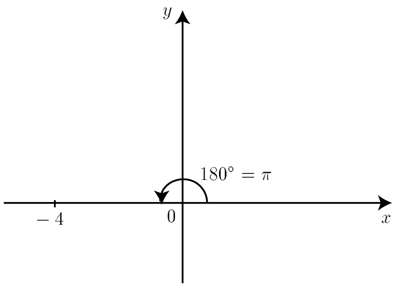


(2) $z = -4$ のとき右図より

$$r = |z| = 4,\ \theta = 180^\circ = \pi$$

だから

$$-4 = 4\,(\cos\pi + i\sin\pi)$$

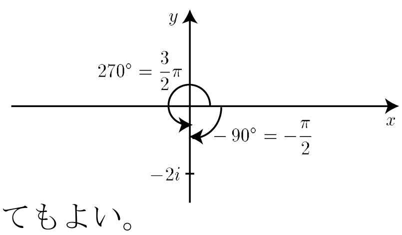


(3) $z = -2i$ のとき右図より

$$r = |z| = 2,\ \theta = 270^\circ = \frac{3}{2}\pi$$

だから

$$-2i = 2\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right)$$



(注 1) 270° の位置と -90° の位置は同じだから

$$-2i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \text{ としてもよい。}$$

(注 2) 例 (3) で $-2i = -2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$ としてはいけない。

極形式として表す場合には $r = |z|$ は正 $(r > 0)$ だから。

問　次の複素数を極形式になおせ。

(1)　$4i$　　　　(2)　-2

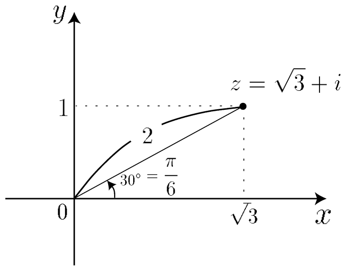
(3)　$-\sqrt{2}i$

＜ 極形式 2 ＞

例　(1)　$z=\sqrt{3}+i$ に対し，$r=|z|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$ で

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}\ ,\ \frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}\ \text{だから}$$

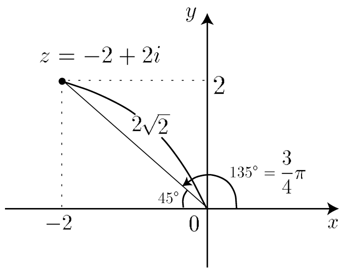
$$z=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$



(2)　$z=-2+2i$ に対し，$r=|z|=\sqrt{(-2)^2+(2)^2}=2\sqrt{2}$ より

$$z=2\sqrt{2}\left(\frac{-2+2i}{2\sqrt{2}}\right)=2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

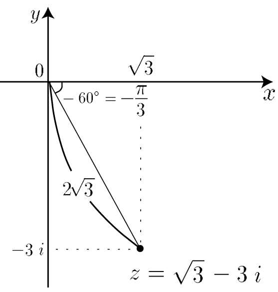
$$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$



(3)　$z=\sqrt{3}-3i$ に対し，$r=|z|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-3)^2}=2\sqrt{3}$ より

$$z=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}-3i}{2\sqrt{3}}\right)=2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$



(注)　$z=x+yi$ に対し，$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=r$ を計算し，$\dfrac{x}{r}=\cos\theta$, $\dfrac{y}{r}=\sin\theta$ を満たす角 θ を求めれば良い。なお角 θ は必ず弧度法 (ラジアン) で表す。また例 (3) の偏角 θ は $-\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{5\pi}{3}$ のどちらでもよい。

問　以下の複素数を極形式で表せ。

(1)　$z=1+i$

(2)　$z=-1+\sqrt{3}i$

(3)　$z=-\sqrt{6}-\sqrt{6}i$

(4)　$z=-3-\sqrt{3}i$

(5)　$z=\sqrt{6}-\sqrt{2}i$

＜ 複素数の積と商 ＞

三角関数の加法定理より

$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)$

$= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2),$

$$\frac{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2} = \frac{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2}$$

$= \cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)$

となるから次式が成立する。

① $r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \times r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_1r_2\big\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\big\}$

② $\dfrac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \dfrac{r_1}{r_2}\big\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\big\}$

①において $r_1 = r_2 = 1,\ \theta_1 = \theta_2 = \theta$ のとき

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$$

となる。一般に

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$$

が成り立つ。これをド・モアブル (A. de Moivre) の公式という。

この公式は $n = -1,\ -2,\ \cdots$ に対しても成り立つ。

問 1　$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ に対し，iz を極形式で表せ。

問 2　$(-\sqrt{3} + i)^6$ を簡単にせよ。

< オイラーの公式 1 >

指数関数・三角関数のマクローリン展開を復習すると

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad (1)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots \qquad (2)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots \qquad (3)$$

であった。ここで x は実数である。これを虚数まで拡張したい。
実数 θ と虚数単位 i に対し，(1) 式の x のかわりに $i\theta$ を代入すれば，$i^2 = -1$ だから

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} + \cdots \\ &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - \frac{i\theta^7}{7!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right) \\ &= \cos\theta + i\sin\theta \end{aligned}$$

従って

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta} \qquad (\theta \text{ は実数})$$

が成立する。これを**オイラーの公式**という。

例　$e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$

$e^{\frac{\pi}{3}i} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

問　次の複素数を例のようになおせ。

(1) $e^{2\pi i} =$

(2) $e^{-\frac{\pi}{2}i} =$

(3) $e^{\frac{3}{4}\pi i} =$

(4) $e^{\frac{5}{3}\pi i} =$

(5) $e^{-\frac{3}{4}\pi i} =$

(6) $e^{-\frac{\pi}{6}i} =$

< オイラーの公式 2 >

複素数 z に対し，e の z 乗をマクローリン展開

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \quad \big(= \exp(z) \big)$$

によって定義する。これを $e^z = \exp(z)$ と書く場合もある。
今 $z = x + iy$ (x, y は実数) のとき，(詳しい計算は省略するが)

$$\begin{aligned} e^{x+iy} &= 1 + (x+iy) + \frac{(x+iy)^2}{2!} + \frac{(x+iy)^3}{3!} + \cdots \\ &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) \times \left(1 + (iy) + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \cdots\right) \\ &= \quad e^x \times e^{iy} \end{aligned}$$

が成立する。

$$\boxed{e^{x+iy} = e^x \times e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)} \qquad (\ x \text{ と } y \text{ は実数 })$$

この式もオイラーの公式と呼ばれている。

例　(1) $e^{2+i\pi} = e^2(\cos\pi + i\sin\pi) = -e^2$

(2) $e^{-3-\frac{\pi}{2}i} = e^{-3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -\frac{1}{e^3}i$

問　以下の指数表示された複素数を例のようになおせ。

(1) $e^{2-2\pi i}$

(2) $e^{0+\frac{\pi}{3}i}$

(3) $e^{2+\frac{3}{4}\pi i}$

(4) $e^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\pi i}$

(5) $e^{-1-\frac{\pi}{6}i}$

(6) $e^{-\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}i}$

< 複素数の指数表示 >

絶対値が 1 の複素数 z は，偏角が θ であるとき

$$z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

と表される。

例 1　$\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3} = e^{\frac{5\pi}{3}i} \quad \left(= e^{-\frac{\pi}{3}i}\right)$

問 1　次の複素数を指数の形にせよ。

(1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$　　(2) i

(3) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$　　(4) -1

(5) $-i$　　(6) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$

例 2　絶対値が 1，偏角が θ_1 と θ_2 の複素数の積は

$$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_2) \times (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)$$

となる。これを指数表示で表すと

$$e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

となる。

問 2　ド・モアブルの定理

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

を指数表示で表せ。

問 3　次式を計算し，$x + iy$（x，y は実数）の形にせよ。

(1) $e^{\frac{3\pi}{2}i} \times e^{\frac{\pi}{2}i}$　　(2) $e^{\frac{4\pi}{3}i} \div e^{\frac{\pi}{6}i}$

(3) $\left(e^{\frac{\pi}{8}i}\right)^4$　　(4) $\left(e^{\frac{\pi}{48}i}\right)^{12}$

＜指数法則＞

２つの複素数

$z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ (x_1 , y_1 , x_2 , y_2 は実数)

に対し,

$$e^{z_1} \times e^{z_2} = (e^{x_1} \times e^{iy_1}) \times (e^{x_2} \times e^{iy_2}) = (e^{x_1} \times e^{x_2}) \times (e^{iy_1} \times e^{iy_2})$$
$$= e^{x_1+x_2}\ e^{i(y_1+y_2)} = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}$$

である。同様に計算すると，以下の指数法則が導ける。

(1) $e^{z_1} \times e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$　　(2) $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{\boxed{}}$

(3) $\left(e^{z}\right)^n = e^{\boxed{}}$　（ド・モアブルの定理） $\left(\begin{array}{c} z_1 ,\ z_2 ,\ z \text{ は複素数} \\ n \text{ は整数} \end{array} \right)$

問 1　上の $\boxed{}$ 内に適当な式を記入せよ。

例 1　$e^{2+3i} \times e^{2-3i} = e^4$　,　$e^{4+\pi i} \div e^{3-\pi i} = e^{1+2\pi i} = e$

$$\left(e^{1+\frac{\pi}{6}i}\right)^8 = e^{8+\frac{4}{3}\pi i} = e^8\left(\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right) = e^8\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{e^8}{2} - \frac{\sqrt{3}e^8}{2}i$$

問 2　次式を計算せよ。

(1) $e^{5+\pi i} \times e^{-1+\pi i}$　　(2) $e^{2+\frac{\pi}{2}i} \div e^{4+\frac{\pi}{6}i}$

(3) $\left(e^{\frac{1}{8}-\frac{\pi}{16}i}\right)^4$

例 2
$$\frac{\left(e^{\frac{\pi}{10}i}\right)^5 \times \left(e^{\frac{\pi}{6}i}\right)^8}{\left(e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^6} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}i} \times e^{\frac{4}{3}\pi i}}{e^{\frac{3}{2}\pi i}} = e^{\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{3}-\frac{3}{2}\right)\pi i} = e^{\frac{\pi}{3}i} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

問 3　次式を計算せよ。

$$\frac{\left(e^{\frac{\pi}{6}i}\right)^8 \times \left(e^{\frac{\pi}{12}i}\right)^4}{\left(e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^6}$$

＜複素数値関数の微分＞

実変数 t の複素数値関数 $z(t)$ に対し，導関数

$$\frac{dz(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t}$$

と定める。この定義から次のことがわかる。$z(t)$ の実部を $x(t)$，虚部を $y(t)$ とおくと，$z(t) = x(t) + iy(t)$ と表される。このことから

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} + i\frac{dy(t)}{dt}$$

となる。

例　実数の定数 a, b に対し，指数関数 $e^{(a+bi)t}$ は

$$e^{(a+bi)t} = e^{at}\cos(bt) + ie^{at}\sin(bt)$$

と表されるから

$$\frac{d}{dt}e^{(a+bi)t} = \frac{d}{dt}\{e^{at}\cos(bt)\} + i\frac{d}{dt}\{e^{at}\sin(bt)\}$$

$$= ae^{at}\cos(bt) - be^{at}\sin(bt) + i\{ae^{at}\sin(bt) + be^{at}\cos(bt)\}$$

$$= e^{at}\{(a+bi)\cos(bt) + (ia + i^2 b)\sin(bt)\} \qquad (i^2 = -1)$$

$$= (a+bi)e^{at}(\cos(bt) + i\sin(bt)) = (a+bi)e^{(a+bi)t}$$

問 1　実数定数 a, b に対し，$\dfrac{1}{a+bi}e^{(a+bi)t}$ を実部と虚部に分け，導関数を求めよ。

$$\frac{1}{a+bi}e^{(a+bi)t} =$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{a+bi}e^{(a+bi)t}\right\} =$$

問 2　次の導関数を求めよ。

(1) $\dfrac{d}{dt}e^{2t}$　　(2) $\dfrac{d}{dt}e^{3ti}$

(3) $\dfrac{d}{dt}e^{(2+3i)t}$　　(4) $\dfrac{d}{dt}\left\{\dfrac{1}{2+3i}e^{(2+3i)t}\right\}$

< 複素数値関数の積分 >

実変数 t の複素数値関数 $f(t)$ に対し，

$$\frac{dF(t)}{dt} = f(t)$$

をみたす関数 $F(t)$ を $f(t)$ の原始関数という。$f(t)$ の原始関数の全体を

$$\int f(t)dt = F(t) + C \qquad \text{(C は任意の複素数定数)}$$

と書き，$f(t)$ の不定積分という。

例 1　実数値関数 $x(t)$ と $y(t)$ に対して，

$$\int \{x(t) + iy(t)\}dt = \int x(t)dt + i\int y(t)dt$$

例 2　実数定数 a, b に対して，前のページより

$$\frac{d}{dt}\Big\{\frac{1}{a+bi}e^{(a+bi)t}\Big\} = e^{(a+bi)t}$$

より $\displaystyle\int e^{(a+bi)t}dt = \frac{1}{a+bi}e^{(a+bi)t} + C$

例 3　$\displaystyle\int e^{(2+3i)t}dt = \frac{1}{2+3i}e^{(2+3i)t} + C = \frac{2-3i}{2^2+3^2}e^{2t}\big\{\cos(3t) + i\sin(3t)\big\} + C$

$$= \frac{e^{2t}}{13}\big\{2\cos(3t) + 3\sin(3t)\big\} + i\frac{e^{2t}}{13}\big\{-3\cos(3t) + 2\sin(3t)\big\} + C$$

問　実数定数 a, b に対して，次の積分を求め，例 3 のように実部と虚部に分けよ。

(1) $\displaystyle\int e^{bit}dt$

(2) $\displaystyle\int e^{(a+bi)t}dt$

< 微分方程式 >

I.Newton(1642-1727) と G.W.Leibniz(1646-1716) は微分と積分が逆の関係であることを示し，微分積分法の記号と計算法を整備した。Newton は惑星の運動におけるケプラーの法則を数学的に説明するために，微分 (導関数) を含む方程式を用いた。これが微分方程式 (differential equation) の始まりだと思われる。それ以来，連続量の変化，特に運動などの時間変化を記述するために微分方程式が用いられることが多い。このワークブックでは，独立変数は時間 (時刻) を表す変数 t を用いる。例えば t の関数 y に関する微分方程式として

$$(1)\quad \frac{dy}{dt} = y \quad , \qquad (2)\quad \frac{dy}{dt} + 3y = e^{4t}$$

$$(3)\quad \frac{d^2y}{dy^2} = 4y \quad , \qquad (4)\quad \frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 5$$

等がある。(1)，(2) は 1 階導関数 $\dfrac{dy}{dt}$ を含む微分方程式なので **1 階微分方程式**という。(3)，(4) は 2 階導関数 $\dfrac{d^2t}{dy^2}$ を含み，3 階以上の導関数を含まないので **2 階微分方程式**という。一般に n 階導関数を含み，$n+1$ 階以上の導関数を含まない微分方程式を n **階微分方程式**という。

微分方程式を満たす関数をその微分方程式の**解**という。

例　微分方程式

$$(1)\quad \boxed{\frac{dy}{dt} = y}$$

を考える。$y = e^t$ は (1) の 1 つの解である。$\Big(\, y(t) = e^t$ と書くこともある。$\Big)$

(1) の解は e^t 以外に

$$y = 2e^t\ ,\ \ y = 3e^t\ ,\ \ \cdots\ ,\ \ y = -e^t\ ,\ \ y = -1.5e^t\ ,\ \ y = -3e^t\ ,\ \ \cdots$$

なども全て (1) の解である。これらの各々を微分方程式 (1) の**特殊解**という。

一方 (1) の全ての解 (特殊解の全体) は

$$(*)\quad \boxed{y = Ce^t} \qquad (C\ \text{は任意定数})$$

の形をしている。このような任意定数 C を含む関数 $(*)$ を微分方程式 (1) の**一般解**という。

＜ 1 階微分方程式 ＞

例　前のページの例で，微分方程式

(1) $\boxed{\dfrac{dy}{dt} = y}$

の一般解は

$(*)$ $\boxed{y = Ce^t}$　(C は任意定数)

であった。特殊解は一般解の任意定数 C に具体的な値を与えた関数である。一般解 $(*)$ の定数 C が定まるような条件として，例えば

$(**)$ $\boxed{t = 0 \text{ のとき } y = 1}$

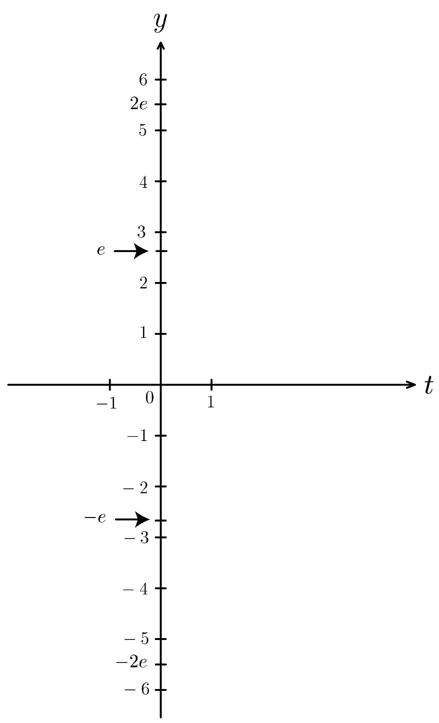
という条件があれば $\boxed{C = 1}$ が定まり，特殊解 $\boxed{y = e^t}$ が定まる。$(**)$ のような条件を**初期条件**という。

問 1　次の初期条件をみたす (1) の特殊解を求めよ。

① $t = 0$ のとき $y = 2$　　② $t = 0$ のとき $y = -1$

③ $t = 0$ のとき $y = -2$　　④ $t = 0$ のとき $y = 0$

問 2　問 1 で求めた特殊解および $y = e^t$ のグラフを右図内に描け。



問 3　$y = 2e^{-t}$ は微分方程式

(2) $\dfrac{dy}{dt} = -y$

の特殊解である。この特殊解のみたす初期条件を求めよ。

問 4　問 3 の微分方程式 (2) の一般解を求めよ。

＜ 1 階微分方程式の原理 ＞

微分して 0 になる関数は定数だけである。これを微分方程式の形に書くと

(定理) $\boxed{\dfrac{dy}{dt} = 0 \quad \text{ならば} \quad y = C \quad (C \text{ は定数})}$

となる。この定理を使うと 1 階微分方程式の一般解の形が決定できる。

例　微分方程式

$$(*) \qquad \boxed{\frac{dy}{dt} = -y}$$

を考える。前ページより $(*)$ の一般解は

$$(**) \qquad \boxed{y = Ce^{-t}} \quad (C \text{ は任意定数})$$

であると類推できる。$(**)$ が $(*)$ の解であることは

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(Ce^{-t}) = C \times \frac{d}{dt}(e^{-t}) = C \times (-e^{-t}) = -Ce^{-t} = -y$$

よりわかる。実は

「$(*)$ の解は $(**)$ の形の関数以外はない」

ことが証明できる。

＜証明＞ $y_1 = e^{-t}$ とする。$(*)$ の任意の解を y_2 とすると $(*)$ 式を満たすので

(1) $y_1{}' = -y_1 \quad , \quad y_2{}' = -y_2$

が成り立つ (ここで t に関する導関数 $\dfrac{dy}{dt}$ を y' と略記した)。今

$$y = \frac{y_2}{y_1}$$

とおくと、分数の微分の公式より

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_2{}' \times y_1 - y_2 \times y_1{}'}{(y_1)^2}$$

となり (1) 式を代入すると

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(-y_2) \times y_1 - y_2 \times (-y_1)}{(y_1)^2} = \frac{-y_2 y_1 + y_2 y_1}{(y_1)^2} = 0$$

となり定理から y が定数 C になるので

$$y = C \implies \frac{y_2}{y_1} = C \implies y_2 = Cy_1 = Ce^{-t}$$

より $(*)$ の任意の解 y_2 が $(**)$ の形をしていることがわかった。(証明終)

問　微分方程式 $(*)$ $\boxed{\dfrac{dy}{dt} = y}$ の一般解は 17 ページより $(**)$ $\boxed{y = Ce^{t}}$ (C は任意定数) となる。「$(*)$ の解は $(**)$ の形の関数以外はない」ことを証明せよ。

< 求積法 >

微分方程式の一般解を求めることを「**微分方程式を解く**」という。
このページでは次の形の微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = \boxed{t\text{ だけの式}}$$

を考える。この形の微分方程式は 1 回積分することによって解くことができる。

例 1　微分方程式

$$(1)\quad \boxed{\frac{dy}{dt} = -9.8t + 19.6}$$

を考える。両辺を積分すると

$$y = \int \frac{dy}{dt}dt = \int (-9.8t + 19.6)dt = -4.9t^2 + 19.6t + C$$

より (1) の一般解は

$$\text{一般解}：\boxed{y = -4.9t^2 + 19.6t + C} \qquad (C\text{ は任意定数})$$

である。

例 2　微分方程式

$$(2)\quad \boxed{\frac{dy}{dt} = t^2 - e^t + \cos t}$$

を考える。両辺を積分すると

$$y = \int \frac{dy}{dt}dt = \int (t^2 - e^t + \cos t)dt = \frac{1}{3}t^3 - e^t + \sin t + C$$

より (2) の一般解は

$$\text{一般解}：\boxed{y = \frac{1}{3}t^3 - e^t + \sin t + C} \qquad (C\text{ は任意定数})$$

である。

例 1，2 のように積分することによって微分方程式を解く方法を**求積法**という。

問　次の微分方程式を解け。

(1) $\dfrac{dy}{dt} = 3t + 6$　　(2) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2}t^3 + 5t^4$

(3) $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{2}{t^2} + \dfrac{1}{t}$　　(4) $\dfrac{dy}{dt} = 4\sin t - 5\cos t$

< 変数分離形 1 >

例　微分方程式

$$(*)\quad \boxed{\frac{dy}{dt} = -y}$$

の一般解は 19 ページより

$$(**)\quad \boxed{y = Ce^{-t}}\quad (C\ \text{は任意定数})$$

であった。この一般解の見つけ方は以下のようにする。

< 一般解の求め方 >

① $y \neq 0$ のとき

$(*)$ の両辺を y で割る。

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = -1$$

両辺を t で積分する。

$$\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}dt = \int (-1)dt$$

ここで置換積分の公式 $\displaystyle\int \square\ \frac{dy}{dt}dt = \int \square\ dy$ より

$$\int \frac{1}{y}dy = \int (-1)dt$$

$$\Downarrow$$

$$\log|y| + C_1 = -t + C_2 \qquad (C_1,\ C_2\ \text{は任意定数})$$

$$\Downarrow$$

$$\log|y| = -t + C_0 \qquad (\text{ただし}\ C_0 = C_2 - C_1)$$

$$\Downarrow$$

$$|y| = e^{-t+C_0}$$

$$\Downarrow$$

$$y = \pm e^{-t+C_0} = \pm e^{C_0} \times e^{-t}$$

$$\Downarrow$$

$$(**)\quad \boxed{y = Ce^{-t}}\quad (\text{ただし}\ C = \pm e^{C_0} \neq 0)$$

② $y = 0$ のとき

$y = 0$ は $(*)$ の解である。この解は $(**)$ で $C = 0$ の場合である。

①, ②より $(*)$ の一般解は

$$\underline{\boldsymbol{y = Ce^{-t}}\quad \textbf{(}\boldsymbol{C}\ \textbf{は任意定数)}}$$

問　微分方程式 $\dfrac{dy}{dt} = 2y$ の一般解を求めよ。

< 変数分離形 2 >

例題　微分方程式 (∗) $\boxed{\dfrac{dy}{dt} = 2t(y-1)}$ の一般解を求めよ。

(解)

① $y \neq 1$ のとき (∗) の両辺を $y-1$ で割り，t で積分する。

$$\frac{1}{y-1}\frac{dy}{dt} = 2t$$

$$\int \frac{1}{y-1}\frac{dy}{dt}dt = \int 2tdt$$

$$\int \frac{1}{y-1}dy = \int 2tdt$$

$$\log|y-1| = t^2 + C_0$$

$$|y-1| = e^{t^2+C_0} = e^{C_0} \times e^{t^2}$$

$$y-1 = \pm e^{C_0} \times e^{t_2}$$

$$\Downarrow$$

$$(**)\ \underline{y = 1 + Ce^{t^2}} \qquad (C = \pm e^{C_0} \neq 0)$$

② $y = 1$ のとき

$y=1$ は (∗) の解である。(∗∗) で $C=0$ の場合である

①，②より (∗) の一般解は

$$\underline{(\text{答})\ y = 1 + Ce^{t^2}} \qquad (C\ \text{は任意の定数})$$

(注) $\boxed{\dfrac{dy}{dt} = (t\ \text{の関数}) \times (y\ \text{の関数})}$ の形の微分方程式を

変数分離形といい，例題と同じやり方で解ける。

問　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{dy}{dt} = (6t+5)y$

(2) $\dfrac{dy}{dt} = (3t^2+4)(y-2)$

< 変数分離形 3 >

例題　微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y-2}{t} \qquad \cdots \qquad (*)$$

の一般解を求めよ。

(解)　① $y \neq 2$ のとき両辺を $y-2$ で割ると

$$\frac{1}{y-2}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$$

両辺を t で積分すると $\displaystyle\int \Box \frac{dy}{dt}dt = \int \Box \, dy$ より

$$\int \frac{1}{y-2}dy = \int \frac{1}{t}dt$$

よって

$$\log|y-2| = \log|\,t\,| + C_0$$

$$\log\left|\frac{y-2}{t}\right| = C_0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{y-2}{t} = \pm e^{C_0}$$

ここで $C = \pm e^{C_0}$ とおくと

$$\frac{y-2}{t} = C \qquad \text{すなわち} \qquad \underline{y = Ct + 2} \qquad \cdots \qquad (**)$$

② $y = 2$ のとき

$y = 2$ は $(*)$ の解である。これは $(**)$ で $C = 0$ の場合である。

求める一般解は

(答)　$\underline{y = Ct + 2}$　　　(C は任意の定数)

問　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2ty}{t^2+1}$

(2) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2(y-1)}{t-3}$

＜ 変数分離形 4 ＞

例題　微分方程式 (∗) $\boxed{\dfrac{dy}{dt} = y(1-y)}$ の一般解を求めよ。

(解)

① $y \neq 0,\ y \neq 1$ のとき (∗) の両辺を $y(1-y)$ で割って，t で積分すると

$$\int \frac{1}{y(1-y)}dy = \int dt \Rightarrow \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y-1}\right)dy = \int dt$$

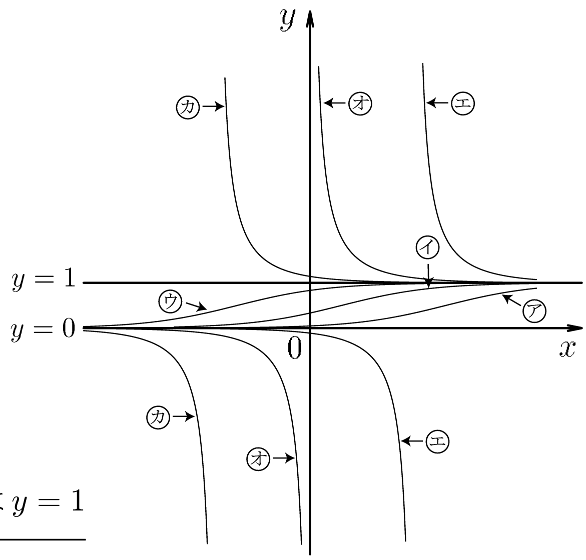
$$\Rightarrow \log|y| - \log|y-1| = t + C_0 \Rightarrow \log\left|\frac{y}{y-1}\right| = t + C_0$$

$$\Rightarrow \left|\frac{y}{y-1}\right| = e^{t+C_0} \Rightarrow \frac{y}{y-1} = Ce^t \qquad (C = \pm e^{C_0})$$

$$\Rightarrow y = \frac{Ce^t}{Ce^t - 1} \qquad \cdots(**)$$

② $y = 0$ のとき
　$y = 0$ は (∗) の解であり，(∗∗) で
　$C = 0$ の場合である。

③ $y = 1$ のとき
　$y = 1$ は (∗) の解であるが，
　(∗∗) の形では表せない。



①，②，③より (∗) の一般解は

(答) $y = \dfrac{Ce^t}{Ce^t - 1}$ (C は任意定数) かまたは $y = 1$

(注 1)　右上図の曲線は一般解において C が次の場合の解のグラフである。

　ア $C = -0.05$，イ $C = -0.5$，ウ $C = -5$，エ $C = 0.1$，オ $C = 1$，カ $C = 8$

(注 2)　$\dfrac{dy}{dt} = y(a - by)$ の型の微分方程式を**ロジスティック方程式**という。

問　次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(y-2)y}{t}$$

< 同次形 >

$(*)$ $\boxed{\dfrac{dy}{dt} = f\left(\dfrac{y}{t}\right)}$ の形の微分方程式を **同次形** といい，次のようにして解を求めることができる。

$\dfrac{y}{t} = u$ とおくと，u は t の関数であり，$y = tu$ から

$$\frac{dy}{dt} = u + t\frac{du}{dt}$$

これを $(*)$ に代入して

$$u + t\frac{du}{dt} = f(u) \ \rightarrow \ \boxed{\frac{du}{dt} = \frac{f(u) - u}{t}}(**)$$

変数分離形 $(**)$ に帰着できる。

問　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2y}{t} + 1$

(2) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y^2 - yt}{t^2}$

＜１階線形微分方程式１＞

t の関数 $p(t)$ と $q(t)$ が与えられたとき、未知関数 y に関する次の形の微分方程式

$$(1) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)}$$

を**1 階線形微分方程式**という。ここで「線形」というのは未知関数 y とその導関数 $\frac{dy}{dt}$ に関する一次式であることを意味する。$\Big($ y^3 や $(\frac{dy}{dt})^2$ などのある微分方程式は非線形という。$\Big)$

特に $q(t) = 0$ のとき

$$(2) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} + p(t)y = 0}$$

の形の微分方程式を**1 階線形同次微分方程式**という。

例　同次微分方程式

$$\boxed{\frac{dy}{dt} + 2ty = 0}$$

の一般解を求める。移項すると

$$\frac{dy}{dt} = -2ty$$

となり変数分離形になるので、

$$\int \frac{1}{y}dy = \int (-2t)dt$$

より一般解は

一般解 ： $\boldsymbol{y = Ce^{-t^2}}$　**($\boldsymbol{C}$ は任意定数)**

問 1　次の微分方程式の一般解を求めよ。(ただし a は定数)

(1) $\dfrac{dy}{dt} + ay = 0$　　(2) $\dfrac{dy}{dt} - 10ty = 0$　　(3) $\dfrac{dy}{dt} + (6t^2 + 1)y = 0$

問 2　同次微分方程式 $\boxed{\dfrac{dy}{dt} + p(t)y = 0}$ の一般解を不定積分 $\displaystyle\int p(t)dt$ を用いて表せ。

＜ 1 階線形微分方程式 2 ＞

前ページより同次微分方程式

$$(*)\quad \boxed{\frac{dy}{dt}+p(t)y=0}$$

の一般解は

$$(**)\quad \boxed{y=Ce^{-\int p(t)dt}}\quad (C\text{ は任意定数})$$

となる。実は「$(*)$ の解は $(**)$ の形の関数以外はない。」ことが 19 ページと同様にして証明できる (証明は省略)。

例　微分方程式

$$(1)\quad \boxed{\frac{dy}{dt}+3y=5}$$

を考える。今

$$y_1=\frac{5}{3}$$

とおくと，y_1 は定数だから $\dfrac{dy_1}{dt}+3y_1=0+3\times\dfrac{5}{3}=5$ となり (1) 式を満たす。
すなわち y_1 は (1) の解の 1 つである。(1) に対し、同次微分方程式

$$(2)\quad \boxed{\frac{dy}{dt}+3y=0}$$

の一般解を y_0 とすると、上の公式 $(**)$ より

$$y_0=Ce^{-3t}\qquad (C\text{ は任意定数})$$

である。ここで

$$y=y_1+y_0=\frac{5}{3}+Ce^{-3t}$$

とおくと

$$\frac{dy}{dt}+3y=\frac{d}{dt}\left(\frac{5}{3}+Ce^{-3t}\right)+3\left(\frac{5}{3}+Ce^{-3t}\right)$$

$$=0-3Ce^{-3t}+5+3Ce^{-3t}=5$$

より y は (1) 式をみたす。(1) の一般解は

$$(1)\text{ の一般解：}\ \boxed{y=\frac{5}{3}+Ce^{-3t}}\quad (C\text{ は任意定数})$$

となる。実は「(1) の解は全て $\dfrac{5}{3}+Ce^{-3t}$ の形をしている」ことが証明できる。

＜ 証明 ＞　(1) の任意の解を y_2 とすると ${y_2}'+3y_2=5$ である。今

$$w=y_2-\frac{5}{3}$$

とおくと

$$w'+3w=\left(y_2-\frac{5}{3}\right)'+3\left(y_2-\frac{5}{3}\right)={y_2}'+3y_2-5=5-5=0$$

より w は (2) の解だから

$$w=Ce^{-3t}\implies y_2-\frac{5}{3}=Ce^{-3t}\implies y_2=\frac{5}{3}+Ce^{-3t}\quad (\text{証明終})$$

＜ 1 階線形微分方程式 3 ＞

前ページの議論を一般化すると以下のようになる。

1 階線形微分方程式

$$(1)\quad \boxed{\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)}$$

の解の 1 つが分かった場合，その解を y_1 とする。

次に同次微分方程式

$$(2)\quad \boxed{\frac{dy}{dt} + p(t)y = 0}$$

の一般解を

(2) の一般解：$\boxed{y_0 = Ce^{-\int p(t)dt}}$　(C は任意定数)

とすると，(1) の一般解は

(1) の一般解：$\boxed{y = y_1 + y_0 = y_1 + Ce^{-\int p(t)dt}}$　(C は任意定数)

となる。すなわち「(1) の解は全て $y_1 + Ce^{-\int p(t)dt}$ の形をしている」ことが前ページと同様に証明できる (証明略)。

例　微分方程式

$$(3)\quad \boxed{\frac{dy}{dt} + 5y = 8}$$

の一般解を求めたい。

$$y_1 = \frac{8}{5}$$

とおくと，y_1 は定数だから $\dfrac{dy_1}{dt} + 5y_1 = 0 + 5 \times \dfrac{8}{5} = 8$ より (1) の解である。

ここで同次微分方程式

$$(4)\quad \boxed{\frac{dy}{dt} + 5y = 0}$$

の一般解は

$$\boxed{y_0 = Ce^{-5t}}\quad (C \text{ は任意定数})$$

だから (3) の一般解は

(3) の一般解：$\boxed{y = y_1 + y_0 = \dfrac{8}{5} + Ce^{-5t}}$　(C は任意定数)

問　次の微分方程式の一般解を求めよ。(ただし $a \neq 0$)

(1) $\dfrac{dy}{dt} + 5y = 7$　　(2) $\dfrac{dy}{dt} + ay = b$

＜ 1 階線形微分方程式 4 ＞

例　微分方程式

$$(1)\quad \boxed{\frac{dy}{dt}+3y=e^{4t}}$$

を考える。今

$$y_1=\frac{1}{7}e^{4t}$$

とおくと

$$\frac{dy_1}{dt}+3y_1=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{7}e^{4t}\right)+3\left(\frac{1}{7}e^{4t}\right)=\frac{4}{7}e^{4t}+\frac{3}{7}e^{4t}=e^{4t}$$

より y_1 は (1) の解である。同次方程式

$$(2)\quad \boxed{\frac{dy}{dt}+3y=0}$$

の一般解を

$$(**)\quad \boxed{y_0=Ce^{-3t}}$$

とおくと (1) の一般解は

$$(1)\text{ の一般解 }:\ \underline{y=y_1+y_0=\frac{1}{7}e^{4t}+Ce^{-3t}\ (C\text{ は任意定数})}$$

＜ 別解 ＞　((1) の解 y_1 も自動的に求まる方法)

Step1　同次方程式 (2) の一般解 (**) の定数 C を関数 $C(t)$ におきかえる

$$(3)\quad \boxed{y=C(t)e^{-3t}}$$

とおく。

Step2　(3) を (1) に代入して $C(t)$ を決定する。

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt}+3y&=\left(C(t)e^{-3t}\right)'+3\left(C(t)e^{-3t}\right)\\&=C'(t)e^{-3t}-3C(t)e^{-3t}+3C(t)e^{-3t}\\&=C'(t)e^{-3t}\end{aligned}$$

積の微分
$(\square\times\triangle)'=\square'\times\triangle+\square\times\triangle'$

(1) より

$$C'(t)e^{-3t}=e^{4t}$$

$$\Downarrow$$　両辺に e^{3t} をかける

$$C'(t)=e^{7t}$$

$$\Downarrow$$　積分

$$(4)\cdots\quad \boxed{C(t)=\int e^{7t}dt=\frac{1}{7}e^{7t}+C}$$

Step3　(4) を (3) に代入

$$\underline{(\text{答})\ \ y=\left(\frac{1}{7}e^{7t}+C\right)e^{-3t}=\frac{1}{7}e^{4t}+Ce^{-3t}}$$

問　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{dy}{dt}+4y=e^{5t}$　　(2) $\dfrac{dy}{dt}-4y=e^{5t}$

＜1階線形微分方程式 5＞

前ページの別解のような解き方を**定数変化法**という。1階線形微分方程式は定数変化法によって必ず一般解が求まる。

例題　微分方程式

$$(1)\quad \boxed{\frac{dy}{dt} - 3y = e^{3t}}$$

の一般解を求めよ。

Step1　同次微分方程式

$$(2)\quad \frac{dy}{dt} - 3y = 0$$

の一般解

$$y_0 = Ce^{3t}$$

の定数 C のかわりに関数 $C(t)$ でおきかえたものを y とする。

$$(3)\quad \boxed{y = C(t)e^{3t}}$$

Step2　(1) に代入して $C(t)$ を決定する。

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} - 3y &= \left(C(t)e^{3t}\right)' - 3\left(C(t)e^{3t}\right)\\ &= C'(t)e^{3t} + 3C(t)e^{3t} - 3C(t)e^{3t}\\ &= C'(t)e^{3t}\end{aligned}$$

(1) より

$$C'(t)e^{3t} = e^{3t}$$

$$\Downarrow$$

$$C'(t) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$(4)\quad \boxed{C(t) = \int 1dt = t + C}$$

Step3　(4) を (3) に代入する。

<u>(答)　$y = (t + C)\,e^{3t} = te^{3t} + Ce^{3t}$　(C は任意定数)</u>

問　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{dy}{dt} - 2y = e^{2t}$　　(2) $\dfrac{dy}{dt} + 3y = e^{-3t}$　　(3) $\dfrac{dy}{dt} - ay = e^{at}$

< 1 階線形微分方程式 6 >

問　定数変化法により，次の 1 階線形微分方程式の一般解を求めよ。式変形も書くこと。
ただし a, b, K は定数で $a \neq b$, $a \neq 0$ とする。

(1) $\dfrac{dy}{dt} + ay = b$

(2) $\dfrac{dy}{dt} - ay = Ke^{bt}$

(3) $\dfrac{dy}{dt} - ay = Ke^{at}$

＜ 1 階線形微分方程式 7 ＞

問 1　0 でない実数定数 a，b に対し，微分方程式

$$(*)\ \frac{dz}{dt} + az = e^{bit}$$

を考える。

(1)　i を実数定数と考えて，定数変化法により $(*)$ の一般解 $z(t)$ を求めよ。

(2)　(1) で求めた一般解 $z(t)$ に対し，i を虚数単位 $\sqrt{-1}$ と考えて，

$z(t) = x(t) + iy(t) + Ce^{-at}$　　($x(t)$，$y(t)$ は実数値関数，C は任意定数)

の形にせよ。

(3)　(2) で求めた $x = x(t)$ に対し，次式を計算せよ。

$$\frac{dx}{dt} + ax =$$

(4)　(2) で求めた $y = y(t)$ に対し，次式を計算せよ。

$$\frac{dy}{dt} + ay =$$

問 2　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1)　$\dfrac{dx}{dt} + ax = \cos(bt)$　　(2)　$\dfrac{dy}{dt} + ay = \sin(bt)$

＜1階微分方程式の練習＞

問　次の微分方程式の一般解を求めよ。ただし $i=\sqrt{-1}$ は虚数単位。

(1) $\dfrac{dy}{dt}=6t^2-8t+5$

(2) $\dfrac{dy}{dt}=e^{2t}-5\sin(3t)+6\cos(2t)$

(3) $\dfrac{dy}{dt}=10y$

(4) $\dfrac{dy}{dt}=(2t+1)(y-3)$

(5) $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{y+4}{t-1}$

(6) $\dfrac{dy}{dt}=2y-y^2$

(7) $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{2y-3t}{t}$

(8) $\dfrac{dy}{dt}-3y-5=0$

(9) $\dfrac{dy}{dt}-3y=e^{2t}$

(10) $\dfrac{dy}{dt}-3y=e^{3t}$

(11) $\dfrac{dy}{dt}-3y=2e^{-3t}$

(12) $\dfrac{dz}{dt}+3z=e^{2it}$

(13) $\dfrac{dx}{dt}+3x=\cos(2t)$

＜ 2 階線形微分方程式 ＞

与えられた関数 $a(t)$，$b(t)$，$F(t)$ に対し，未知関数 y に関する微分方程式

$$(*)_1 \quad \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + a(t)\frac{dy}{dt} + b(t)y = F(t)}$$

を **2 階線形微分方程式**という。この形の微分方程式は場合に応じて解の形が違うが，共通して次の基本定理が成り立つ。

＜ 基本定理 ＞

任意の数 t_0 と定数 α，β に対して

$$(*)_2 \quad \boxed{y(t_0) = \alpha, \quad y'(t_0) = \beta}$$

を満たす $(*)_1$ の解 $y = y(t)$ がただ一つ存在する。

通常は $t_0 = 0$ の場合を考えるので，条件 $(*)_2$ を**初期条件**という。

$(*)_1$ で $F(t) = 0$ の場合の微分方程式

$$(*)_0 \quad \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + a(t)\frac{dy}{dt} + b(t)y = 0}$$

を **2 階線形同次微分方程式**という。基本定理から次のことが証明される。

定理

$(*)_1$ の任意の解 $y = y(t)$ は

$$(*)_3 \quad \boxed{y(t) = y_*(t) + C_1y_1(t) + C_2y_2(t)} \qquad (C_1, C_2 \text{は任意定数})$$

と表される。ここで $y_*(t)$ は $(*)_1$ の解であり，$y_1(t)$ と $y_2(t)$ は $(*)_0$ の解で $\dfrac{y_2(t)}{y_1(t)}$ は定数ではない。

(証明略)　　　$(*)_3$ を $(*)_1$ の**一般解**と呼ぶ。

例　$\dfrac{d^2y}{dt^2} = -10$ の一般解は $\underline{y(t) = -5t^2 + C_1t + C_2}$　$(C_1, C_2 \text{は任意定数})$

問　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2} = 8$　　　　(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2} = 6t + 2$

＜ 2 階線形同次微分方程式 ＞

2 階線形同次微分方程式

$$(*)\quad \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + a(t)\frac{dy}{dt} + b(t)y = 0}$$

に対して，$y_*(t) = 0$(恒等的に 0 の関数) は $(*)$ の解である。これを同次微分方程式の**自明な解**という。前ページの定理で $y_*(t) = 0$ とおくと次の定理が得られる。

定理

$(*)$ の任意の解 $y = y(t)$ は

$$(**)\quad \boxed{y(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t)}\quad (C_1, C_2\text{は任意定数})$$

と表せる。ここで $y_1(t)$，$y_2(t)$ は $(*)$ の解であり，$\dfrac{y_2(t)}{y_1(t)}$ は定数ではない。

$(**)$ の $y(t)$ を $(*)$ の**一般解**という。$y_1(t)$ と $y_2(t)$ を $(*)$ の**基本解**という。この基本解 $y_1(t)$，$y_2(t)$ は自明な解ではない。

例　微分方程式

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 5\dfrac{dy}{dt} + 6y = 0$

を考える。今 $y_1(t) = e^{2t}$，$y_2(t) = e^{3t}$ とおくと

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} - 5\frac{dy_1}{dt} + 6y_1 = (e^{2t})'' - 5(e^{2t})' + 6e^{2t} = 4e^{2t} - 5 \times 2e^{2t} + 6e^{2t} = 0$$

$$\frac{d^2y_2}{dt^2} - 5\frac{dy_2}{dt} + 6y_2 = (e^{3t})'' - 5(e^{3t})' + 6e^{3t} = 9e^{3t} - 5 \times 3e^{3t} + 6e^{3t} = 0$$

より $y_1(t)$ と $y_2(t)$ は (1) の解であり，$\dfrac{y_2(t)}{y_1(t)} = \dfrac{e^{3t}}{e^{2t}} = e^t$ は定数ではない。

従って $y_1(t)$，$y_2(t)$ は (1) の基本解であり，$\boldsymbol{y(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}}$ $(C_1, C_2$は任意定数$)$ は (1) の一般解である。

問　$y(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}$ $(C_1, C_2$は定数$)$ が (1) の解であることを確かめよ。

< 定数係数 2 階線形同次微分方程式 1 >

定数 a, b に対し、t の関数 y に関する微分方程式

$$(*) \qquad \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} + by = 0}$$

を**定数係数 2 階線形同次微分方程式**という。

例　前のページ例の微分方程式

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + 6y = 0$$

の 2 つの基本解は e^{2t} と e^{3t} であった。この基本解を求めるには次のように考えればよい。

< 基本解の求め方 >

基本解を $e^{\lambda t}$ とすると、微分方程式 (1) をみたすから

$$\frac{d^2}{dt^2}(e^{\lambda t}) - 5\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}) + 6e^{\lambda t} = 0$$

すなわち　$\lambda^2 e^{\lambda t} - 5\lambda e^{\lambda t} + 6e^{\lambda t} = (\lambda^2 - 5\lambda + 6)e^{\lambda t} = 0$

従って　$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$

よって $\lambda = 2$ または $\lambda = 3$ より基本解は e^{2t} または e^{3t} となる 。

一般の定数係数 2 階線形同次微分方程式 $(*)$ において、λ に関する 2 次方程式

$$(**) \qquad \boxed{\lambda^2 + a\lambda + b = 0}$$

を $(*)$ の**特性方程式**という。$(*)$ の解を求めるためには $(**)$ の解を求めねばならない。

問　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 3\dfrac{dy}{dt} + 2y = 0$　　(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 3y = 0$

(3) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 3\dfrac{dy}{dt} - 4y = 0$　　(4) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 16y = 0$

< 定数係数 2 階線形同次微分方程式 2 >

例　t の関数 y に関する微分方程式

(1)　$$\frac{d^2y}{dt^2} + 9y = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -9y$$

を考える。今 $y_1(t) = \cos(3t)$,　$y_2(t) = \sin(3t)$ とおくと

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = (\cos(3t))'' = (-3\sin(3t))' = -9\cos(3t) = -9y_1$$

$$\frac{d^2y_2}{dt^2} = (\sin(3t))'' = (3\cos(3t))' = -9\sin(3t) = -9y_2$$

であるから y_1 と y_2 は (1) の基本解であり，従って一般解は

$\boldsymbol{y = C_1\cos(3t) + C_2\sin(3t)}\cdots$ (1) の一般解

である。この基本解 y_1 と y_2 を発見するには，次のように考える。

< 基本解の見つけ方 >

微分方程式 (1) の特性方程式は

$$\lambda^2 + 9 = 0$$

であり，その解は $\lambda = \pm 3i$ である。複素数の範囲では，e^{3it} と e^{-3it} が基本解となる。

複素数の範囲の一般解は、A, B を任意の複素数定数とすると，

$$y = Ae^{3it} + Be^{-3it} = A(\cos(3t) + i\sin(3t)) + B(\cos(3t) - i\sin(3t))$$

となる。ここで，$A = B = \frac{1}{2}$ のとき $y = \cos(3t)$ となり，$A = -\frac{i}{2}$,　$B = \frac{i}{2}$ のときに，$y = \sin(3t)$ となる。この $\cos(3t)$ と $\sin(3t)$ が実数の範囲の基本解になる。

問　次の微分方程式の実数の範囲の一般解を求めよ。ただし ω は 0 でない実数定数である。

(1)　$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$$

(2)　$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 0$$

(3)　$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

$<$ 定数係数２階線形同次微分方程式３ $>$

例　t の関数 y に関する微分方程式

(1)　$\dfrac{d^2y}{dt^2} - 4\dfrac{dy}{dt} + 13y = 0$

を考える。今 $y_1 = e^{2t}\cos(3t)$ とおくと

$$\frac{dy_1}{dt} = 2e^{2t}\cos(3t) - 3e^{2t}\sin(3t),\quad \frac{d^2y_1}{dt^2} = -5e^{2t}\cos(3t) - 12e^{2t}\sin(3t) \text{ より}$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} - 4\frac{dy_1}{dt} + 13y_1$$
$$= -5e^{2t}\cos(3t) - 12e^{2t}\sin(3t) - 4\left\{2e^{2t}\cos(3t) - 3e^{2t}\sin(3t)\right\} + 13e^{2t}\cos(3t) = 0$$

となるので y_1 は (1) の解である。同様に $y_2 = e^{2t}\sin(3t)$ も (1) の解であるので，y_1 と y_2 が (1) の基本解であり，(1) の一般解は

$$\boldsymbol{y = C_1e^{2t}\cos(3t) + C_2e^{2t}\sin(3t)} \cdots (1) \text{ の一般解}$$

となる。この基本解 y_1，y_2 を発見するには，次のように考える。

$<$ 基本解の見つけ方 $>$

微分方程式 (1) の特性方程式は

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$$

であり、その解は $\lambda = 2 \pm 3i$ である。複素数の範囲では，$e^{(2+3i)t}$ と $e^{(2-3i)t}$ が基本解となる。複素数の範囲の一般解は、A,B を任意の複素数定数とすると，

$$y = Ae^{(2+3i)t} + Be^{(2-3i)t} = Ae^{2t}(\cos(3t) + i\sin(3t)) + Be^{2t}(\cos(3t) - i\sin(3t))$$

となる。ここで $A = B = \dfrac{1}{2}$ のとき $y = e^{2t}\cos(3t)$ となり，$A = -\dfrac{i}{2}$，$B = \dfrac{i}{2}$ のときは $y = e^{2t}\sin(3t)$ となる。この $e^{2t}\cos(3t)$ と $e^{2t}\sin(3t)$ が実数の範囲の基本解になる。

問 1　$y = e^{2t}\sin(3t)$ に対し，次式を計算せよ。

$\dfrac{dy}{dt} =$　　　　　　　　$\dfrac{d^2y}{dt^2} =$

$\dfrac{d^2y}{dt^2} - 4\dfrac{dy}{dt} + 13y =$

問 2　次の微分方程式の実数の範囲の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 2\dfrac{dy}{dt} + 5y = 0$　　　　(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 6\dfrac{dy}{dt} + 10y = 0$

< 定数係数 2 階線形同次微分方程式 4 >

例　t の関数 y に関する微分方程式

$$(1)\quad \frac{d^2y}{dt^2} - 6\frac{dy}{dt} + 9y = 0$$

を考える。特性方程式は $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0$ より $\lambda = 3$（重解）であるから基本解は e^{3t} だけしか求まらない。実はもう 1 つの基本解は te^{3t} となる。従って (1) の一般解は $\boldsymbol{y = C_1te^{3t} + C_2e^{3t}}$（$C_1$，$C_2$ は任意定数）となる。

問 1　$y = te^{3t}$ が (1) の解であることを確かめよ。

< (1) の一般解の求め方 >

微分方程式 (1) を

$$(1)\quad y'' - 6y' + 9y = 0$$

とする。両辺に $3y' - 9y$ を加えると

$$y'' - 3y' = 3y' - 9y$$

$$\Downarrow$$

$$(2)\quad (y'-3y)' = 3(y'-3y)$$

ここで $y' - 3y = z$ とおくと

$$(2) \Rightarrow z' = 3z$$

$$\Downarrow$$

$$z = C_1e^{3t}$$

$$\Downarrow$$

$$y' - 3y = C_1e^{3t}$$

$$\Downarrow$$

(答)　$\underline{y = C_1te^{3t} + C_2e^{3t}}$

問 2　定数 C_1 に対し，1 階微分方程式

$$\frac{dy}{dt} - 3y = C_1e^{3t}$$

の一般解を定数変化法により求めよ。

問 3　a を定数とする。y に関する 2 階微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2a\frac{dy}{dt} + a^2y = 0$$

の一般解を求めよ。

＜定数係数２階線形同次微分方程式５＞

一般の定数係数２階線形同次微分方程式

(1) $$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} + by = 0}$$

の一般解の求め方をまとめる。

Step1. 特性方程式

(2) $$\boxed{\lambda^2 + a\lambda + b = 0}$$

を解く。

Step2. ２次方程式 (2) の解が２実根，２虚根，重根の各場合によって次のようになる。

[I] $a^2 - 4b > 0$ のとき (2) は２つの実数解 $\lambda = \alpha$，β をもつ。

このとき (1) の一般解は

$$\boldsymbol{y = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\beta t}} \quad (C_1,\ C_2 \text{ は任意定数})$$

[II] $a^2 - 4b < 0$ のとき (2) は共役な２つの虚数解 $\lambda = \mu \pm \nu i$ をもつ。

このとき (1) の一般解は

$$\boldsymbol{y = C_1 e^{\mu t}\cos(\nu t) + C_2 e^{\mu t}\sin(\nu t)} \quad (C_1,\ C_2 \text{ は任意定数})$$

[III] $a^2 - 4b = 0$ のとき (2) はただ１つの実数解 $\lambda = \alpha$ をもつ。

このとき (1) の一般解は

$$\boldsymbol{y = C_1 t e^{\alpha t} + C_2 e^{\alpha t}} \quad (C_1,\ C_2 \text{ は任意定数})$$

問　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 5\dfrac{dy}{dt} - 6y = 0$

(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 16y = 0$

(3) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 8\dfrac{dy}{dt} + 20y = 0$

(4) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 8\dfrac{dy}{dt} + 16y = 0$

< 定数係数 2 階線形非同次微分方程式 1 >

例　微分方程式

(1)　$\dfrac{d^2y}{dt^2} - 3\dfrac{dy}{dt} + 2y = 5$

を考える。今

(2)　$y_1(t) = \dfrac{5}{2}$

とおくと y_1 は定数だから

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} - 3\frac{dy_1}{dt} + 2y_1 = 0 - 3 \times 0 + 2 \times \frac{5}{2} = 5$$

となり (1) 式をみたす。従って y_1 は (1) の解である。これを (1) の**特解**という。

(1) の解を全て求めたい。(1) の任意の解を $y = y(t)$ とし

(3)　$y_0(t) = y(t) - \dfrac{5}{2}$

とおくと、y は (1) の解だから

$$\frac{d^2y_0}{dt^2} - 3\frac{dy_0}{dt} + 2y_0 = \frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y - 5 = 0$$

となる。従って y_0 は同次方程式

(4)　$\dfrac{d^2y_0}{dt^2} - 3\dfrac{dy_0}{dt} + 2y_0 = 0$

の解である。43 ページより (4) の一般解は

$$y_0 = C_1e^t + C_2e^{2t}$$

だから　(3) より (1) の一般解 y は

$$\boldsymbol{y\left(= y_0 + \frac{5}{2}\right) = C_1e^t + C_2e^{2t} + \frac{5}{2}}\ \ (C_1,\ C_2 \text{ は任意定数})$$

である。

一般の 2 階線形微分方程式

$(*)_1$　$\dfrac{d^2y}{dt^2} + a(t)\dfrac{dy}{dt} + b(t)y = F(t)$

で $F(t) \neq 0$ のとき**非同次方程式**という。もし $(*)_1$ の解（特解）y_1 が 1 つみつかれば、同次方程式

$(*)_2$　$\dfrac{d^2y_0}{dt^2} + a(t)\dfrac{dy_0}{dt} + b(t)y_0 = 0$

の一般解 y_0 に対し $(*)_1$ の一般解 y は

$(*)_1$ の一般解：$\boldsymbol{y = y_0 + y_1}$　(y_0 は $(*)_2$ の一般解，　y_1 は $(*)_1$ の特解)

であることが例と同様にしてわかる。

問　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1)　$\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} - 2y = 6$　　(2)　$\dfrac{d^2y}{dt^2} + 16y = 20$

(3)　$\dfrac{d^2y}{dt^2} - 4\dfrac{dy}{dt} + 5y = 7$　　(4)　$\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 4y = 6$

< 定数係数 2 階線形非同次微分方程式 2 >

定数 a，b，k に対し，次の微分方程式を考える。

(∗) $\boxed{\dfrac{d^2y}{dt^2} + a\dfrac{dy}{dt} + by = K}$

今，同次微分方程式

(∗∗) $\boxed{\dfrac{d^2y}{dt^2} + a\dfrac{dy}{dt} + by = 0}$

の一般解を y_0 とおく。

問 1　$b \neq 0$ のとき (∗) の一般解を b，K と y_0 を用いて表せ。

$b = 0$ のとき (∗) は

$(*)'$ $\boxed{\dfrac{d^2y}{dt^2} + a\dfrac{dy}{dt} = K}$

となる。このときは次のように考える。

$$\boxed{v = \frac{dy}{dt}}$$

とおくと $(*)'$ は

$(*)''$ $\boxed{\dfrac{dv}{dt} + av = K}$

となる。

問 2　$a \neq 0$ のとき $(*)''$ の一般解 v を求めよ。

問 3　$a \neq 0$ のとき $(*)'$ の一般解 y を求めよ。

問 4　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} = 0$

(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} = 6$

＜ 定数係数 2 階線形非同次微分方程式 3 ＞

与えられた関数 $F(t)$ $(\neq 0)$ と定数 a , b に対し次の形の微分方程式

$$(*)\quad \frac{d^2y}{dt^2}+a\frac{dy}{dt}+by=F(t)$$

を**定数係数 2 階線形非同次微分方程式**という。前ページより，$F(t)$ が定数の時は $(*)$ の特解は定数 ($b\neq 0$ のとき)，1 次式 ($b=0$, $a\neq 0$ のとき)，2 次式 ($a=b=0$ のとき) となる。実は $F(t)$ が t の整式のときは特解も t の整式になる。さらに定数 r , α , β に対し，$F(t)$ が $re^{\alpha t}$, $re^{\alpha t}\cos(\beta t)$, $re^{\alpha t}\sin(\beta t)$ の形のとき $(*)$ の特解は次の表のようになる (証明は実際に $(*)$ 式の左辺に特解を代入し，計算して右辺の形になるように確かめればよいので省略する。)

$F(t)$	a , b と α , β の関係	特 解
$re^{\alpha t}$	① $\alpha^2+\alpha a+b\neq 0$	$\dfrac{r}{\alpha^2+\alpha a+b}e^{\alpha t}$
	② $\begin{cases}\alpha^2+\alpha a+b=0\\ \text{かつ}\\ 2\alpha+a\neq 0\end{cases}$	$\dfrac{r}{2\alpha+a}te^{\alpha t}$
	③ $\begin{cases}\alpha^2+\alpha a+b=0\\ \text{かつ}\\ 2\alpha+a=0\end{cases}$	$\dfrac{r}{2}t^2e^{\alpha t}$
$re^{\alpha t}\cos(\beta t)$	④ $\begin{cases}A=\alpha^2-\beta^2+\alpha a+b\neq 0\\ \text{または}\\ B=(2\alpha+a)\beta\neq 0\end{cases}$	$\dfrac{r}{A^2+B^2}e^{\alpha t}\{A\cos(\beta t)+B\sin(\beta t)\}$
	⑤ $\begin{cases}A=\alpha^2-\beta^2+\alpha a+b=0\\ \text{かつ}\\ B=(2\alpha+a)\beta=0\end{cases}$	$\dfrac{r}{2\beta}te^{\alpha t}\sin(\beta t)$
$re^{\alpha t}\sin(\beta t)$	⑥ $\begin{cases}A=\alpha^2-\beta^2+\alpha a+b\neq 0\\ \text{または}\\ B=(2\alpha+a)\beta\neq 0\end{cases}$	$\dfrac{r}{A^2+B^2}e^{\alpha t}\{A\sin(\beta t)-B\cos(\beta t)\}$
	⑦ $\begin{cases}A=\alpha^2-\beta^2+\alpha a+b=0\\ \text{かつ}\\ B=(2\alpha+a)\beta=0\end{cases}$	$-\dfrac{r}{2\beta}te^{\alpha t}\cos(\beta t)$

例　定数 ω , r , β (ただし $\omega^2\neq\beta^2$ とする) に対し微分方程式

$$(1)\quad \frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2y=r\sin(\beta t)$$

を考える。上の表では $a=0$, $b=\omega^2$, $\alpha=0$, $A=-\beta^2+\omega^2\neq 0$, $B=0$ であるから⑥の場合であり，特解 y_1 は $y_1=\frac{r}{A^2+0^2}e^0\{A\sin(\beta t)-0\}=\frac{r}{\omega^2-\beta^2}\sin(\beta t)$ である。一方 (1) の同次方程式

$$(2)\quad \frac{d^2y_0}{dt^2}+\omega^2y_0=0$$

の一般解は 37 ページより $y_0=C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t)$ であるから，(1) の一般解は

(1) の一般解：$\boldsymbol{y=C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t)+\dfrac{r}{\omega^2-\beta^2}\sin(\beta t)}$　(C_1, C_2 は任意定数)

問　次の微分方程式の一般解を求めよ。ただし ω は 0 でない定数とする。

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2y=r\sin(\omega t)$$

< 微分方程式の練習 >

問 次の方程式の一般解を求めよ。ただし a，b は定数とする。

(1) $\dfrac{dy}{dt} - \cos(2t) = 0$

(2) $\dfrac{dy}{dt} + 4ty = 0$

(3) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y^2 - y}{t}$

(4) $\dfrac{dy}{dt} + 2y = 3$

(5) $\dfrac{dy}{dt} - 2y = e^t$

(6) $\dfrac{dy}{dt} - 3y = e^{3t}$

(7) $\dfrac{d^2y}{dt^2} = at + b$

(8) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 5\dfrac{dy}{dt} + 6y = 0$

(9) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 9y = 0$

(10) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 9y = 0$

(11) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 2\dfrac{dy}{dt} + 5y = 0$

(12) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 6\dfrac{dy}{dt} + 9y = 0$

(13) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt} - 6y = 4$

(14) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4y = 5$

(15) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 5\dfrac{dy}{dt} = 7$

＜ 1階微分方程式の初期値問題 ＞

例題　次の微分方程式を以下の初期条件の下で解け。

(1) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 6 - 10t \\ t = 0 \text{ のとき } y = 20 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -2y \\ t = 0 \text{ のとき } y = 5 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + 2y = -5 \\ t = 0 \text{ のとき } y = 4 \end{cases}$

(解)　(1) 求積法より $y = \displaystyle\int (6 - 10t)dt = 6t - 5t^2 + C$

初期条件より $t = 0$ のとき $y = C = 20$　　(答) $\underline{y = 6t - 5t^2 + 20}$

(2) 21 ページと同様にして一般解は $y = Ce^{-2t}$

初期条件より $t = 0$ のとき $y = Ce^0 = C = 5$　　(答) $\underline{y = 5e^{-2t}}$

(3) 28 ページと同様に考える。

$$y_1 = \frac{-5}{2}$$

は (3) の解である。同次方程式 $\dfrac{dy}{dt} + 2y = 0$ の一般解 $y_0 = Ce^{-2t}$ に対し

$$y = y_1 + y_0 = -\frac{5}{2} + Ce^{-2t}$$

が (3) の一般解である。

初期条件より $t = 0$ のとき $y = -\dfrac{5}{2} + Ce^0 = -\dfrac{5}{2} + C = 4$ より $C = \dfrac{13}{2}$

$$\underline{(答)\ \ y = -\frac{5}{2} + \frac{13}{2}e^{-2t}}$$

問　次の微分方程式を以下の初期条件の下で解け。(ただし k, g は定数で $k \neq 0$)

(1) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 10 - 9.8t \\ t = 0 \text{ のとき } y = 6 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -5y \\ t = 0 \text{ のとき } y = 4 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + ky = -g \\ t = 0 \text{ のとき } y = 4 \end{cases}$

< 2 階微分方程式の初期値問題 1 >

例 1　微分方程式

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2} = -10$

の一般解は

(2) $y = -5t^2 + C_1 t + C_2$　　(C_1，C_2 は任意定数)

である。ここで初期条件

(3) $y(0) = 3$,　$y'(0) = 4$

があれば $y(t) = -5t^2 + C_1 t + C_2$, $y'(t) = -10t + C_1$ より

$$y(0) = C_2 = 3\ ,\quad y'(0) = C_1 = 4$$

となるから

$$y = -5t^2 + 4t + 3$$

が (3) をみたす (1) の解である。

例 2　(4) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 5\dfrac{dy}{dt} + 6y = 0$

の一般解は

(5) $y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$　　(C_1，C_2 は任意定数)

である。ここで初期条件

(6) $y(0) = 5$,　$y'(0) = 7$

があれば $y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$,　$y'(0) = 2C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{3t}$ より

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = C_1 + C_2 = 5 \\ y'(0) = 2C_1 + 3C_2 = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow\ C_1 = 8\ ,\ C_2 = -3$$

となるから

$$\underline{y = 8e^{2t} - 3e^{3t}}$$

が (6) をみたす (4) の解である。

問　次の微分方程式を以下の初期値条件のもとで解け。

(1) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} = 8 \\ y(0) = 7\ ,\ y'(0) = 6 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} - 4\dfrac{dy}{dt} - 5y = 0 \\ y(0) = 7\ ,\ y'(0) = 8 \end{cases}$

＜ 2 階微分方程式の初期値問題 2 ＞

例 1　(1) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + 9y = 0 \\ y(0) = 4\ ,\ \ y'(0) = 5 \end{cases}$

(解)　(1) の一般解は $y(t) = C_1\cos(3t) + C_2\sin(3t)$ である。

$y'(t) = -3C_1\sin(3t) + 3C_2\cos(3t)$ で初期条件より

$$y(0) = C_1 = 4\ ,\quad y'(0) = 3C_2 = 5 \quad\Rightarrow\quad C_2 = \frac{5}{3}$$

(答)　$\underline{y(t) = 4\cos(3t) + \dfrac{5}{3}\sin(3t)}$

例 2　(2) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} - 4\dfrac{dy}{dt} + 13y = 0 \\ y(0) = 4\ ,\ \ y'(0) = 5 \end{cases}$

(解)　(2) の特性方程式は　$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = (\lambda - 2)^2 + 9 = 0 \quad\Rightarrow\quad \lambda = 2 \pm 3i$

だから，(2) の一般解は

$$y(t) = C_1e^{2t}\cos(3t) + C_2e^{2t}\sin(3t)$$

である。導関数は積の微分公式より

$$\begin{aligned} y'(t) &= 2C_1e^{2t}\cos(3t) - 3C_1e^{2t}\sin(3t) + 2C_2e^{2t}\sin(3t) + 3C_2e^{2t}\cos(3t) \\ &= (2C_1 + 3C_2)e^{2t}\cos(3t) + (-3C_1 + 2C_2)e^{2t}\sin(3t) \end{aligned}$$

となる。初期条件より

$$y(0) = C_1 = 4\ ,\quad y'(0) = 2C_1 + 3C_2 = 5 \quad\Rightarrow\quad C_2 = \frac{1}{3}(5 - 2C_1) = -1$$

(答)　$\underline{y(t) = 4e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\sin(3t)}$

問　次の微分方程式を以下の初期条件のもとで解け。

(1) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + 16y = 0 \\ y(0) = 5\ ,\ \ y'(0) = 6 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} - 6\dfrac{dy}{dt} + 13y = 0 \\ y(0) = 7\ ,\ \ y'(0) = 8 \end{cases}$

＜ 2 階微分方程式の初期値問題 3 ＞

例 1　(1) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} - 6\dfrac{dy}{dt} + 9y = 0 \\ y(0) = 5\ ,\ y'(0) = 7 \end{cases}$

(解)　(1) の一般解は　$y(t) = C_1te^{3t} + C_2e^{3t}$　である。

$y'(t) = C_1e^{3t} + 3C_1te^{3t} + 3C_2e^{3t}$ で初期条件より

$y(0) = C_2 = 5\ ,\quad y'(0) = C_1 + 3C_2 = 7 \ \Rightarrow\ C_1 = 7 - 3C_2 = -8$

(答)　$y(t) = -8te^{3t} + 5e^{3t}$

例 2　(2) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} - 4\dfrac{dy}{dt} = 6 \\ y(0) = 5\ ,\ y'(0) = 2 \end{cases}$

(解)　$v = y'(t)$ とおくと　$\dfrac{dv}{dt} - 4v = 6 \ \Rightarrow\ v(t) = -\dfrac{3}{2} + C_1e^{4t} = y'(t)$

$y(t) = \displaystyle\int v(t)dt = -\frac{3}{2}t + \frac{C_1}{4}e^{4t} + C_2$　となる。ここで初期条件より

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = \dfrac{C_1}{4} + C_2 = 5 \\ y'(0) = -\dfrac{3}{2} + C_1 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow\ C_1 = \frac{7}{2}\ ,\quad C_2 = 5 - \frac{C_1}{4} = 5 - \frac{7}{8} = \frac{33}{8}$$

(答)　$y(t) = -\dfrac{3}{2}t + \dfrac{7}{8}e^{4t} + \dfrac{33}{8}$

問　次の微分方程式を以下の初期条件のもとで解け。

(1) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} - 8\dfrac{dy}{dt} + 16y = 0 \\ y(0) = 6\ ,\ y'(0) = 8 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} - 5\dfrac{dy}{dt} = 10 \\ y(0) = 6\ ,\ y'(0) = 7 \end{cases}$

＜一般解の決定＞

例　微分方程式

① $\boxed{\dfrac{d^2y}{dt^2} - 9y = 0}$

の一般解は

② $\boxed{y = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t}}$ (C_1，C_2 は任意定数)

であり，それ以外には①の解がないことが次のようにしてわかる。
①の任意の解を $y_1 = y_1(t)$ とおく。y_1 の初期値を

③ $\boxed{y_1(0) = \alpha \ \ , \ \ y_1'(0) = \beta}$

とおく。これに対し

$$y_2 = y_2(t) = \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{6}\right)e^{3t} + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{6}\right)e^{-3t}$$

とおくと y_2 は①の解であり，

$$y_2(0) = \alpha \ \ , \ \ y_2'(0) = \beta$$

をみたす。基本定理 (P34) から初期条件③をみたす①の解はただ 1 つなので

$$y_1(t) = y_2(t) = \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{6}\right)e^{3t} + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{6}\right)e^{-3t}$$

である。従って①の任意の解 y_1 は②の形をしている。

問　微分方程式 $\dfrac{d^2t}{dt^2} + 9y = 0$ の任意の解は

$$y = C_1\cos(3t) + C_2\sin(3t) \quad (C_1，C_2 \text{ は任意の解})$$

の形をしていることを示せ。

< 微分方程式の応用 1 >

定数係数 2 階線形微分方程式

$$(*) \quad \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} + by = F(t)}$$

を考える。この変数 t を時間を表すパラメーターと考えると，$(*)$ は未知関数 $y = y(t)$ の時間発展を表す。例えば物体の運動を表す場合，しばしば $y = y(t)$ は時刻 t における物体の**位置**を表す。このとき $\dfrac{dy}{dt}$ は**速度**を表し，$\dfrac{d^2y}{dt^2}$ は**加速度**を表す。このような場合 $(*)$ の係数 a，b は

a：速度に比例して加速度が変わる場合の比例定数

b：位置に比例して加速度が変わる場合の比例定数

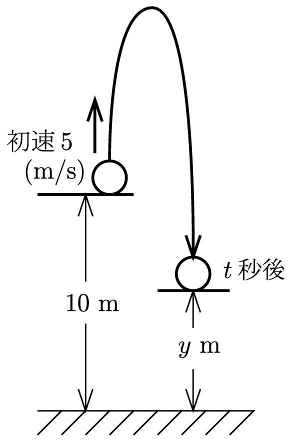
を意味する。特に a がプラスのときは**抵抗**を意味する。また $F(t)$ は**外力**を意味する。

またに $y(t)$ が時刻 t における**電荷** (電気量) を表す場合，$\dfrac{dy}{dt}$ は**電流**を表す。またこのとき a は**電気抵抗**を表す。

問　地上 10m の場所から物体を初速 5(m/s) で真上に投げ上げた。t 秒後の高さを $y = y(t)$m とする。空気抵抗がないとすると，微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} = -g \\ y(0) = 10\ ,\ y'(0) = 5 \end{cases}$$

が成り立つ。ここで g は重力加速度 $g = 9.8$ (m/s^2) である。t 秒後の速度 $v(t) = \dfrac{dy}{dt}$ と高さ $y(t)$ を求めよ。

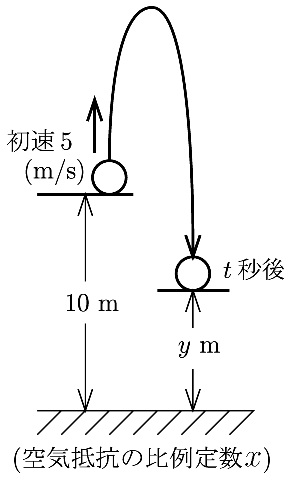


< 微分方程式の応用 2 >

問　地上 10m の場所から物体を真上に初速 5(m/s) で投げ上げた。このとき速度に比例する空気抵抗があるとして，その比例定数を x とする。t 秒後の高さを $y = y(t)$(m) とすると，微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} + x\frac{dy}{dt} = -g$$

が成り立つ。ここで g は重力加速度 $g = 9.8(m/s^2)$ である。



(1)　t 秒後の速度 $v(t) = \dfrac{dy}{dt}$(m/s) を求めよ。

(2)　t 秒後の高さ $y(t)$(m) を求めよ。

(3)　正数 $x(>0)$ に対し，$\displaystyle\lim_{t\to\infty} e^{-xt} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^{xt}} = 0$ を用いて，次の極限値

$$\lim_{t\to\infty} v(t) =$$

を求め，速度 $v(t)$ がある一定の範囲内にあることを示せ。

(4)　$y(t) = \dfrac{\square}{x^2} + 10$ の形にして，x に関するロピタルの定理を 2 回使うことにより，次の極限値を求めよ。

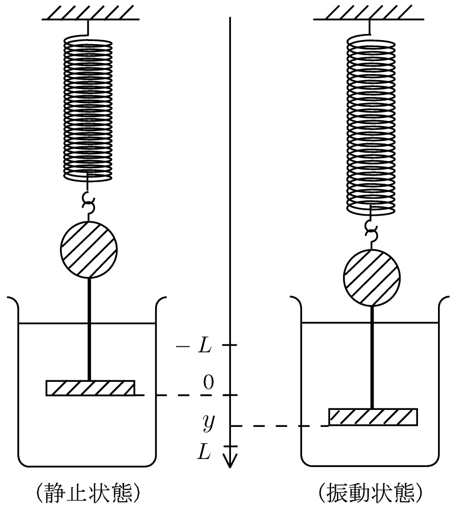
$$\lim_{x\to 0} y(t) =$$

< 微分方程式の応用 3 >

図 1 のようにばねの先のおもりがある液体につかっているとき，これを振動させたときの変位 y に関する微分方程式は一般に

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} + by = 0}$$

となる。ここで a は速度に比例する**抵抗**を意味する。また b は「ばねの復元力」(ばねの強さ) を意味する。



(図1)

例 1　$a = 4,\ b = 229$ の場合，微分方程式は

(1) $$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 229y = 0}$$

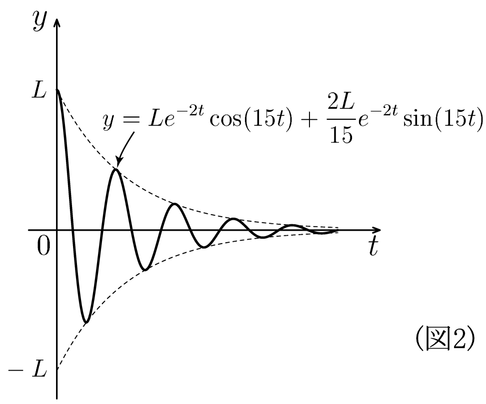
となる。ここで初期条件

「最初に L だけ伸ばし，静かに離す」

(∗) $$\boxed{y(0) = L\ ,\ \ y'(0) = 0}$$

を仮定すると，(1) − (∗) の解は

$$\underline{y = Le^{-2t}\cos(15t) + \frac{2L}{15}e^{-2t}\sin(15t)}$$



(図2)

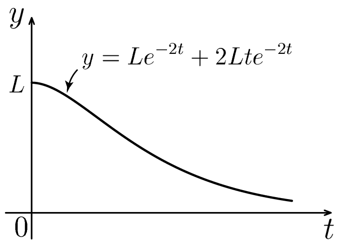
となる。このグラフは図 2 であり，ばねの振動が抵抗によってだんだん弱くなっていく。このような振動を**減衰振動**という。

例 2　$a = 4,\ b = 4$ の場合、微分方程式は

(2) $$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y = 0}$$

となる。上と同じ初期条件 (∗) をみたす解は

$$\underline{y = Le^{-2t} + 2Lte^{-2t}}$$



(図3)

となる。これは抵抗にくらべてばねの力が弱いため，振動しないで減衰していく (図 3)。

問　次の微分方程式を上の初期条件 (∗) のもとで解け。

(1) $\displaystyle \frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 13y = 0$　　(2) $\displaystyle \frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 9y = 0$

< 微分方程式の応用 4 >

例 1　図 1 のようにばねの上端を強制的に振動させる。基準線からの伸びを y，振動する外力を $F = r\sin(\beta t)$ とする。抵抗を考えないとすると，y に関する微分方程式は

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = r\sin(\beta t)$$

となる。ここで $r = 1$，$\omega = 5$ のとき

$$(1)\quad \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + 25y = \sin(\beta t)}$$

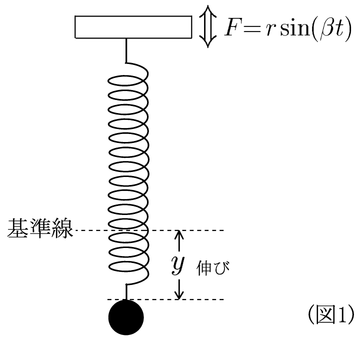
とる。「ばねの下端は最初基準線上に静止している」と仮定すると初期条件は

$$(*)\quad \boxed{y(0) = 0\ ,\ y'(0) = 0}$$

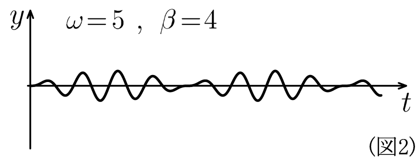
となり，$(*)$ をみたす (1) の解は

$$y = -\frac{\beta}{5(25-\beta^2)}\sin(5t) + \frac{1}{25-\beta^2}\sin(\beta t)$$

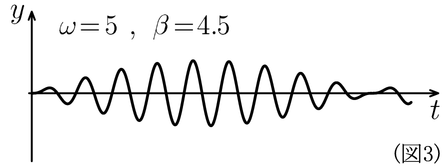
となる。この解のグラフは図 2($\beta = 4$), 図 3($\beta = 4.5$), 図 4($\beta = 4.75$) のようになる。
このような運動を**強制振動**という。



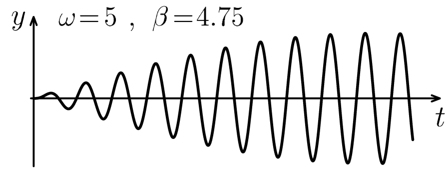
(図1)



(図2)



(図3)

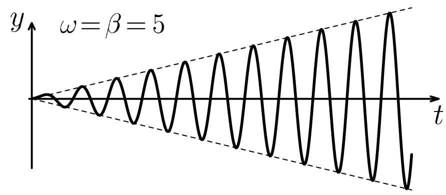


(図4)

例 2　$r = 1$, $\omega = \beta = 5$ のとき微分方程式は

$$(2)\quad \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + 25y = \sin(5t)}$$

となる。



(図5)

問 1　43 ページを参考にして、(2) の一般解を求めよ。

$y =$

問 2　上の初期条件 $(*)$ のもとで (2) の解を求めよ。

$y =$

(注) 問 2 の解のグラフは図 5 の実線である。図 5 の点線は直線 $y = \pm\dfrac{t}{2}$ である。つまり時刻 t における振幅が $\dfrac{t}{2}$ であり，時間とともに振幅が大きくなる。この現象を**共振**または**共鳴**という。

問 3　例 1 の解の $\beta \to 5$ の極限を求めよ。(ヒント：変数 β に関するロピタルの定理を使う)

$$\lim_{\beta\to 5}\left\{-\frac{\beta}{5(25-\beta^2)}\sin(5t) + \frac{1}{25-\beta^2}\sin(\beta t)\right\} = \lim_{\beta\to 5}\frac{-\beta\sin(5t) + 5\sin(\beta t)}{125 - 5\beta^2}$$

$=$

< 付録.1 数学史年表(1600〜1700) >

年代	数学史	一般史
1600	カヴァリエリ (1598〜1647)(ボローニア大学教授) (線の長さの比と面積比，切断面の面積比と体積比) 吉田光由「塵却記」(1627 日本初の算術書) フェルマ (1601〜1665)(フランス) (分数乗の関数が表す曲線で囲まれた図形の面積， フェルマの最終定理) ロベルヴァル (1602〜1675)(パリ) (サイクロイド。曲線上を運動する物体について，ある瞬間における運動の方向は， その点における曲線の接線の方向) N. メルカトル (1620〜1689 デンマーク) 対数のベキ級数展開 ウォリス (1616〜1703)(イギリス) ($y = x^n$ と x 軸，y 軸および $x = a$ で囲まれた部分の面積は $a^{(n+1)}/(n+1)$ であることを示した。虚数。分数指数。 運動量保存則) パスカル (1623〜1662)(フランス) (円錐曲線論，流体の圧力伝幡，賭け事の掛け金の分配=勝つ確率の計算， 組み合わせの数の表=パスカルの三角形) ホイヘンス (1629〜1695)(オランダ) (確率と期待値，振り子時計，遠心力の発見，遠心力の大きさは回転する物体の速度の 2 乗に比例し，円の半径に逆比例する) 関孝和 (日本)1674「発微算法」行列式 バロー (1630〜1677)(イギリス) (曲線上の接線の (1 次近似による) 決定法)	(日本 1600) 関ヶ原の戦い オランダ 1602 東インド会社設立 シェークスピア 1602(英) ハムレット ガリレオ (伊)1609 最初の望遠鏡を作る。月のクレーター，土星の輪，木星の衛星，太陽の黒点の発見。 ケプラー (独)1609 面積速度一定の法則 カッシーニ (伊 1625〜1712)(天文学，火星までの距離，土星の環) デリカルト (仏)「方法序説」1637 トリチェリ (伊)1643 真空の実験 ホッブズ (英)「リヴァイアサン」1651 ホイヘンス (蘭)1656 土星衛星タイタン ボイル 1660(アイルランド) 気体の体積は圧力に反比例 ウォリス (英)1668 運動量保存則を提案 ルイ 14 世 (仏) ヴェルサイユ宮殿造営 ニュートン (英)1669 反対望遠鏡 N. ステノ 1669(デンマーク) 化石 T. ウイリス (英)1670 糖尿病 O. レーマー (1646〜1710 デンマーク) 光の速度を測定 レーウェンフック (蘭)1683 バクテリア ニュートン 1687「プリンキピア (自然哲学の数学的原理)」刊 万有引力により，太陽系の惑星の運動法則 (ケプラーの法則) を数学的に説明 ライプニッツ 1693(ドイツ) 積と商のできる計算機の発明
1700		

< 付録.2 数学史年表 (1700〜1750) >

年代	数学史	一般史
1700	ニュートン (1682〜1727)(イギリス)(点の運動の軌跡として曲線を考え，曲線上の接線の傾きを (y 方向の速度) /(x 方向の速度) と定めた。これがニュートン流の微分= 流率法である。面積を求める求積法 (=積分法) は流率法 (=微分法) の逆演算であること (=微分積分学の基本定理) を発見。微分を使った方程式 (微分方程式) からケプラーの法則を数学的に説明。一般二項定理。指数・三角関数の級数展開)	(日 1702) 赤穂浪士 吉良義央を討つ ハーレー (英)1705 彗星の軌道 ホークスビー (英)1706 静電気 ダービー (英)1709 鉄の製錬にコークスを使用 ニューコメン (英)1712 水蒸機関
	ライプニッツ (1646〜1716)(ドイツ)(無限小による微分 $(dy)/(dx)$ を定義し，曲線の極大，極小を微分計算で求めた。微分の逆計算として積分を定義し，現在の微分積分学に用いられる数学記号を作った。「座標」,「座標軸」,「関数」,「導関数」等の数学用語も作った。積・商の微分法。陰関数の微分法。微分方程式の変数分離法。行列式。２進法。計算機。)	ファーレンハイト (独)1714 水銀温度計 ピュートル大帝 (ロシア) 没 1725 同年にペテルブルグ科学アカデミー創設 (ベルヌーイ兄弟やオイラーなどがよばれる)
	ロピタル (1661〜1704　パリ)「無限小数析」 ロピタルの定理はヨハン・ベルヌーイから買った。	(米 1725) 黒人奴隷約 75000 人
	ヤコブ・ベルヌーイ (1654〜1705 スイス) 独立試行の場合の大数の法則。等時曲線がサイクロイドであることを微分方程式により証明	G. ブラント (1730 スウェーデン) コバルトの発見 ヘールズ (英)1733 血圧の測定
	ヨハン・ベルヌーイ (1667〜1748 スイス) ヤコブの弟 最速降下問題の解としてサイクロイドを定義。懸垂線。 変分法を創始。	ハリソン (英)1735 航海用の時計 セルシュウス (1742 スウェーデン) セ氏温度の目盛り
	サッケリー (1667〜1733 イタリア) 平行線の公理	B. フランクリン (米)1742 ストーブの発明
	J.F. リッカティ(1676〜1754 イタリア) リッカティ型微分方程式	
	R. コーツ (1682〜1716 イギリス) オイラーの公式を最初に発見	メンギーニ (伊)1745 血液中に鉄分を発見
	テイラー (1685〜1731 イギリス) テイラー展開	
	マクローリン (1698〜1746 スコットランド) 数列の積分収束判定法 マクローリン展開	リンド (英)1747 壊血病の治療に柑橘類が効果的であることを発見
	ニコラス・ベルヌーイ (1687〜1759 スイス) ベルヌーイ兄弟の甥 完全微分方程式，全微分。偏微分の微分順序の独立性。	
1750	ド・モアブル (1667〜1754)(フランス)(確率，二項分布の極限，正規分布)	B. フランクリン (米)1750 避雷針を発明