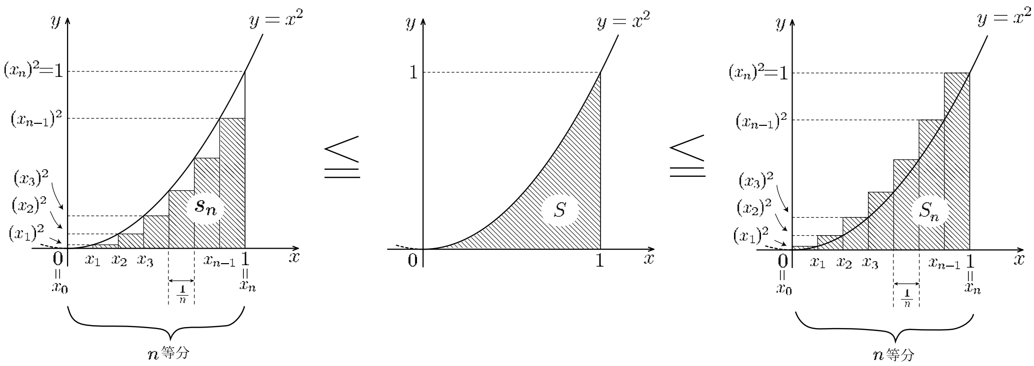
高知工科大学

Kochi University of Technology

数学 2

(2007年度版)



初等関数の積分法

(不定積分, 定積分, 面積, 関数の近似)

井上 昌昭 著

＜不定積分 1＞

x の関数 $f(x)$ に対して，微分すると $f(x)$ になる関数，すなわち $F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ があれば，それを $f(x)$ の**原始関数**という。$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数のとき，任意の定数 C に対して

$$\Big(F(x)+C\Big)' \;=\; F'(x) \;=\; f(x)$$

であるから，$F(x)+C$ も $f(x)$ の原始関数である。従って $f(x)$ の原始関数は無数にあるが，いずれも $F(x)+C$ の形で書き表される。

$$F(x)+C \qquad\qquad (C\text{は任意定数})$$

この表示を $f(x)$ の**不定積分** といい，$\displaystyle\int \boldsymbol{f(x)dx}$ で表す。

$$\boxed{F'(x) \;=\; f(x) \quad \text{のとき} \qquad \int f(x)dx = F(x)+C} \qquad (\text{不定積分})$$

$f(x)$ の不定積分を求めることを，$f(x)$ を**積分する** といい，上の定数 C を **積分定数** と呼ぶ。またこのとき $f(x)$ を **被積分関数** といい，x を **積分変数** という。

例　$\displaystyle\left(\frac{1}{4}x^4\right)' \;=\; x^3 \qquad \Rightarrow \qquad \int x^3 dx \;=\; \frac{1}{4}x^4 + C$

問　次の左の導関数を求め，右の不定積分を求めよ。　(ただし $\alpha \neq -1$)

(1) $\displaystyle\left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' =$　　　　$\Rightarrow \displaystyle\int x^{\alpha}dx =$

(2) $\big(\log|x|\big)' =$　　　　$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{1}{x}dx =$

(3) $(\sin x)' =$　　　　$\Rightarrow \displaystyle\int \cos x dx =$

(4) $(-\cos x)' =$　　　　$\Rightarrow \displaystyle\int \sin x dx =$

(5) $(e^x)' =$　　　　$\Rightarrow \displaystyle\int e^x dx =$

< 不定積分 2 >

< x^α の不定積分>

$\alpha \neq -1$ のとき	$\displaystyle\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$
$\alpha = -1$ のとき	$\displaystyle\int \frac{1}{x} dx = \log\lvert x\rvert + C$

この公式は

$$\frac{1}{x^n} = x^{-n}\ ,\ \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m = x^{\frac{m}{n}}$$

などのように α が負の数や分数でも成立する。

例　$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$

(注)　$\displaystyle\int \frac{1}{f(x)}dx$ を $\displaystyle\int \frac{dx}{f(x)}$ と書くことがある。

問　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x^{10}dx =$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3} =$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}} =$

(4) $\displaystyle\int \sqrt{x}dx =$

(5) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x^2}dx =$

(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x}} =$

< 不定積分 3 >

不定積分について，次の公式が成り立つ。ただし両辺の積分定数の違いは無視している。

1. $\displaystyle\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$　　(k は定数)
2. $\displaystyle\int \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
3. $\displaystyle\int \{f(x)-g(x)\}\,dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

(定数倍，和・差の不定積分)

例

$$\int \frac{x^2-3x+2}{x^2}dx = \int \left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)dx$$
$$= \int dx - 3\int\frac{dx}{x} + 2\int\frac{1}{x^2}dx = x - 3\log|x| - \frac{2}{x} + C$$

(注) この例のように，積分定数は最後にまとめて C で表す。

また $\displaystyle\int 1dx$ は 1 を省略して $\displaystyle\int dx$ と書くことがある。

問　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2-4x+1}{x^3}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{(x^2-1)(x^2-3)}{x^4}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{x}}dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}dx$

< 不定積分 4 >

問 1　左の導関数と右の不定積分を求めよ。

(1) $(\tan x)' =$ 　　$\Rightarrow$ 　$\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} =$

(2) $(\cot x)' =$ 　　$\Rightarrow$ 　$\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} =$

(3) $(\sin^{-1} x)' =$ 　　$\Rightarrow$ 　$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$

(4) $(\tan^{-1} x)' =$ 　　$\Rightarrow$ 　$\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} =$

(注)　$\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$, $\sin^{-1} x$ は $\sin x$ の逆関数，$\tan^{-1} x$ は $\tan x$ の逆関数である。

問 2　次の値を求めよ。

(1) $\sin^2 x + \cos^2 x =$

(2) $\dfrac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x =$

問 3　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (4\sin x - 3\cos x)dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{3\cos^2 x - 1}{\cos^2 x}dx$

(3) $\displaystyle\int (2-\tan x)\cos x dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$

(5) $\displaystyle\int (\cot x)^2 dx$

(6) $\displaystyle\int (1+\tan^2 x)dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(8) $\displaystyle\int \frac{5}{1+x^2}dx$

< 積分記号 >

$$\frac{d}{dx}\Big(F(x)\Big) = f(x) \quad \text{のとき} \quad \int f(x)dx = F(x) + C$$

である。ここで微分記号 $\dfrac{d}{dx}$ は変数 x に関する微分を意味し，積分記号 $\displaystyle\int \boxed{}\, dx$ の dx は変数 x に関する積分を意味する。

変数 x を変数 t に換えれば,

$$\frac{d}{dt}\Big(F(t)\Big) = f(t) \quad \text{のとき} \quad \int f(t)dt = F(t) + C$$

のようになる。

例 1

$$\frac{d}{dx}\left(x^3\right) = 3x^2 \quad \text{より} \quad \int 3x^2dx = x^3 + C$$

$$\frac{d}{dt}\left(t^3\right) = 3t^2 \quad \text{より} \quad \int 3t^2dt = t^3 + C$$

$$\frac{d}{du}\left(u^3\right) = 3u^2 \quad \text{より} \quad \int 3u^2du = u^3 + C$$

例 2

(1) $\displaystyle\int \left(t^2 - 4t + 3\right) dt = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t + C$

(2) $\displaystyle\int \sin u du = -\cos u + C$

(3) $\displaystyle\int 2\pi r dr = \pi r^2 + C$

問　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (10 - 9.8t)dt =$

(2) $\displaystyle\int 4\pi r^2 dr =$

(3) $\displaystyle\int e^u du =$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{y}dy =$

(5) $\displaystyle\int \cos u du =$

< 置換積分法 1 >

$\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$ であるとき，$F(x)$ と $g(x)$ の合成関数 $F\big(g(x)\big)$ の導関数は

$$\Big\{F\big(g(x)\big)\Big\}' = F'\big(g(x)\big) \times g'(x) = f\big(g(x)\big) \times g'(x)$$

であった。よって

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = F\big(g(x)\big) + C \cdots ①$$

ここで $g(x) = u$ とおくと　$g'(x) = \dfrac{du}{dx}$ より

①の左辺 $= \displaystyle\int f(u)\frac{du}{dx}dx$

①の右辺 $= F(u) + C = \displaystyle\int f(u)du$

よって

$$\boxed{\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int f(u)\frac{du}{dx}dx = \int f(u)du} \quad \big(\text{ただし}\quad u = g(x)\big)$$

すなわち x の積分が u の積分になった。これを**置換積分**という。

例　$\displaystyle\int \cos(3x+2)dx$ を求めたい。$u = 3x + 2$ とおく。

$$\frac{du}{dx} = (3x+2)' = 3$$

より

$$\int \cos(3x+2)dx = \frac{1}{3}\int \cos(3x+2) \times 3dx = \frac{1}{3}\int \cos(u)\frac{du}{dx}dx$$
$$= \frac{1}{3}\int \cos(u)du = \frac{1}{3}\sin(u) + C = \underline{\frac{1}{3}\sin(3x+2) + C}$$

問　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \cos(4x-3)dx$　　(2) $\displaystyle\int \sin(3x+4)dx$

< 置換積分法 2 >

例　$\displaystyle\int (3x-2)^7 dx$ を求めたい。$u = 3x-2$ とおくと $\dfrac{du}{dx} = 3$ より

$$\int (3x-2)^7 dx = \frac{1}{3}\int (3x-2)^7 \times 3dx = \frac{1}{3}\int u^7 \ \frac{du}{dx}dx$$
$$= \frac{1}{3}\int u^7 du = \frac{1}{3}\times\frac{1}{8}u^8 + C = \underline{\frac{1}{24}(3x-2)^8 + C}$$

問　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (5x+3)^6 dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{6x+5}$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2(3x-4)}$

(4) $\displaystyle\int e^{4x+1} dx$

＜ 置換積分法 3 ＞

例　$\displaystyle\int \sqrt{5x-2}dx$ を求めたい。$u = 5x-2$ とおくと $\dfrac{du}{dx} = 5$ より

$$\int \sqrt{5x-2}dx = \frac{1}{5}\int \sqrt{5x-2} \times 5dx = \frac{1}{5}\int \sqrt{u}\frac{du}{dx}dx = \frac{1}{5}\int u^{\frac{1}{2}}du$$

$$= \frac{1}{5} \times \frac{1}{\frac{1}{2}+1}u^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{5} \times \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{15}u\sqrt{u} + C$$

$$= \frac{2}{15}(5x-2)\sqrt{5x-2} + C$$

問　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \sqrt{4x-3}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{(5x-3)^4}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx$

< 置換積分法 4 >

例 $\int x^2 e^{x^3}\,dx$ を求めたい。$u = x^3$ とおくと $\dfrac{du}{dx} = 3x^2$ より

$$\int x^2 e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int e^{x^3} \times (3x^2)dx = \frac{1}{3}\int e^u \frac{du}{dx} dx = \frac{1}{3}\int e^u du$$

$$= \frac{1}{3}e^u + C = \frac{1}{3}e^{x^3} + C$$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x^3 e^{x^4+1} dx$

(2) $\int x^2 \cos(x^3+2)dx$

(3) $\int x \sin(x^2+3)dx$

(4) $\int x(x^2+1)^5 dx$

＜ 置換積分法 5 ＞

例 1　$\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}dx$ を求めたい。$u = x^2+1$ とおくと $\dfrac{du}{dx} = 2x$ より

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1} \times (2x)dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u} \times \frac{du}{dx}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du$$

$$= \frac{1}{2}\log|u| + C = \frac{1}{2}\log\left|x^2+1\right| + C$$

$(x^2+1>0$ だから$)$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$$

例 2　$\displaystyle\int \tan x\,dx$ を求めたい。$u = \cos x$ とおくと $\dfrac{du}{dx} = -\sin x$ より

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{1}{\cos x} \times (-\sin x)dx = -\int \frac{1}{u} \times \frac{du}{dx}dx$$

$$= -\int \frac{1}{u}du = -\log|u| + C = -\log|\cos x| + C$$

問　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3+1}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2+4}dx$

(3) $\displaystyle\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$

＜ 置換積分法 6 ＞

例 1 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}dx = \tan^{-1} x + C$

例 2 $\displaystyle\int \frac{1}{(3x+4)^2+1}dx$ を求めたい。$u = 3x+4$ とおくと $\dfrac{du}{dx} = 3$ より

$$\int \frac{1}{(3x+4)^2+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{(3x+4)^2+1} \times 3dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^2+1}\frac{du}{dx}dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^2+1}du = \frac{1}{3}\tan^{-1}(u) + C = \frac{1}{3}\tan^{-1}(3x+4) + C$$

問　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{(5x-4)^2+1}$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{(8x+10)^2+4}$

< 不定積分の練習 1 >

問 1　次の不定積分を求めよ。ただし $a,\ b,\ n$ は定数で $a \neq 0,\ n \neq -1$ である。

(1) $\displaystyle\int \cos u du =$　　(1)′ $\displaystyle\int \cos(ax+b)dx =$

(2) $\displaystyle\int \sin u du =$　　(2)′ $\displaystyle\int \sin(ax+b)dx =$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 u}du =$　　(3)′ $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx =$

(4) $\displaystyle\int e^u du =$　　(4)′ $\displaystyle\int e^{ax+b}dx =$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{u}du =$　　(5)′ $\displaystyle\int \frac{1}{ax+b}dx =$

(6) $\displaystyle\int u^n du =$　　(6)′ $\displaystyle\int (ax+b)^n dx =$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{1+u^2}du =$　　(7)′ $\displaystyle\int \frac{1}{1+(ax+b)^2}dx =$

問 2　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \cos(3x+4)dx =$　　(2) $\displaystyle\int \sin(4x-3)dx =$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(5x+3)}dx =$　　(4) $\displaystyle\int e^{3x-5}dx =$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{7x+10}dx =$　　(6) $\displaystyle\int (7x-5)^3 dx =$

(7) $\displaystyle\int (-8x+10)^7 dx =$　　(8) $\displaystyle\int \frac{1}{1+(5x-3)^2}dx =$

< 不定積分の練習 2 >

問　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{(3x+4)^6}dx$

(2) $\displaystyle\int \sqrt{5x+4}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{7x-3}}dx$

(4) $\displaystyle\int x\cos(x^2+3)dx$

(5) $\displaystyle\int xe^{-x^2}dx$

(6) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}dx$

(7) $\displaystyle\int \tan x dx$

< 分数関数の積分 >

例 $\displaystyle\int \frac{1}{(x+3)(x+5)}dx$ を求めたい。この被積分関数 $\displaystyle\frac{1}{(x+3)(x+5)}$ は $\displaystyle\frac{A}{x+3}$ と $\displaystyle\frac{B}{x+5}$ (A と B は定数) の形の和として表すことができる。すなわち

$$\frac{1}{(x+3)(x+5)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+5}$$

とおいて右辺を通分すると

$$\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+5} = \frac{A(x+5)+B(x+3)}{(x+3)(x+5)} = \frac{(A+B)x+(5A+3B)}{(x+3)(x+5)}$$

となる。この最後の式の分子が 1 になるように A と B を決めれば良い。つまり

$$1 = (A+B)x + (5A+3B)$$

より

$$A+B=0 \qquad \cdots ①$$

$$5A+3B=1 \qquad \cdots ②$$

であればよい。① , ② より $A = \dfrac{1}{2}$, $B = -\dfrac{1}{2}$ だから

$$\frac{1}{(x+3)(x+5)} = \frac{\frac{1}{2}}{x+3} - \frac{\frac{1}{2}}{x+5} = \frac{1}{2}\left\{ \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+5} \right\}$$

と表される。よって求める積分は

$$\int \frac{1}{(x+3)(x+5)}\,dx = \frac{1}{2}\int \left\{ \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+5} \right\} dx = \frac{1}{2}\left\{ \log|x+3| - \log|x+5| \right\} + C$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{x+3}{x+5}\right| + C$$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x+1)}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x+1)}\,dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-2)(x-3)}\,dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-3)(x+4)}\,dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{(2x+1)(3x+4)}\,dx$

< 部分積分法 1 >

2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ の積の微分公式

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

より

$$f(x)g'(x) = \{f(x)g(x)\}' - f'(x)g(x)$$

となる。この両辺を積分すると

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx} \qquad \text{(部分積分)}$$

が成り立つ。これを**部分積分の公式**という。

問 1　$\displaystyle\int f'(x)g(x)dx$ を $f(x)g(x)$ と $\displaystyle\int f(x)g'(x)dx$ で表せ。

例　$\displaystyle\int (x+2)\cos x dx = \int (x+2)(\sin x)' dx = (x+2)\sin x - \int (x+2)' \sin x dx$

$\displaystyle= (x+2)\sin x - \int 1 \sin x dx = (x+2)\sin x + \cos x + C$

問 2　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int 2x\cos x dx$

(2) $\displaystyle\int x\sin x dx$

(3) $\displaystyle\int (3x+2)\sin x dx$

(4) $\displaystyle\int xe^x dx$

(5) $\displaystyle\int (4x-3)e^x dx$

< 部分積分法 2 >

例 $\displaystyle\int x\cos(3x)dx = \int x \times \left\{\frac{1}{3}\sin(3x)\right\}' dx$

$\displaystyle = x \times \frac{1}{3}\sin(3x) - \int (x)' \times \frac{1}{3}\sin(3x)dx$

$\displaystyle = \frac{x}{3}\sin(3x) - \int \frac{1}{3}\sin(3x)dx = \underline{\frac{x}{3}\sin(3x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + C}$

問　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x\cos(4x-3)dx$

(2) $\displaystyle\int x\sin(2x+3)dx$

(3) $\displaystyle\int xe^{2x}dx$

(4) $\displaystyle\int xe^{-3x+5}$

< 部分積分法 3 >

例 1 $\displaystyle\int \log x dx = \int 1 \times \log x dx = \int (x)' \times \log x dx$

$$= x\log x - \int x \times (\log x)' dx = x\log x - \int x \times \frac{1}{x} dx$$

$$= x\log x - \int 1\ dx = \underline{x\log x - x + C}$$

問 1 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x\log x dx$

(2) $\displaystyle\int x^2\log x dx$

例 2 $\displaystyle\int x^2\cos x dx = \int x^2(\sin x)' dx = x^2\sin x - \int 2x\sin x dx$

$$= x^2\sin x + \int 2x(\cos x)' dx = x^2\sin x + 2x\cos x - \int 2\cos x dx$$

$$= \underline{x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C}$$

問 2 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x^2\sin x dx$

(2) $\displaystyle\int x^2 e^x dx$

< 三角関数の不定積分 >

三角関数の不定積分は三角関数の性質を使って，簡単な形に直してから積分する。特に次の公式はよく使う。

1. 半角の公式　$\boxed{\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos(2\alpha)}{2} \quad , \quad \cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos(2\alpha)}{2}}$

2. 積を和に直す公式

$$\boxed{\begin{aligned}\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}\\ \cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}\\ \sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\}\end{aligned}}$$

これらの公式は，右辺を加法定理により展開すると左辺が得られる。

例　(1) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1}{2}\{1+\cos(2x)\}\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$

(2) $\displaystyle\int \sin(2x)\cos x\,dx = \int \frac{1}{2}\{\sin(3x)+\sin x\}\,dx$

$$= -\frac{1}{6}\cos(3x) - \frac{1}{2}\cos x + C$$

問　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \sin^2 x dx =$

(2) $\displaystyle\int \cos(3x)\cos(2x) dx =$

(3) $\displaystyle\int \sin(4x)\sin x dx =$

(4) $\displaystyle\int \sin(4x)\cos(3x) dx =$

(5) $\displaystyle\int \cos^2(3x) dx =$

(6) $\displaystyle\int \sin^2(4x) dx =$

＜ 不定積分の検証 ＞

不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$ が正しいかどうかを調べるには，右辺を微分して $F'(x) = f(x)$ となっているかどうかを調べればよい。

例 1　$\displaystyle\int x^2(x^3+1)^4 dx = \frac{1}{15}(x^3+1)^5 + C$

が正しいかどうか検証する。右辺を微分すると合成関数の微分法より

$$\left(\frac{1}{15}(x^3+1)^5\right)' = \frac{1}{15}\big((x^3+1)^5\big)' = \frac{1}{15}\times 5(x^3+1)^4 \times (x^3+1)'$$
$$= \frac{1}{3}\times(x^3+1)^4\times 3x^2 = x^2(x^3+1)^4$$

より**正しい**。

例 2　$\displaystyle\int \tan x dx = \log(\cos x) + C$

が正しいかどうか検証する。右辺を微分すると

$$\big(\log(\cos x)\big)' = \frac{1}{\cos x}\times(\cos x)' = \frac{1}{\cos x}\times(-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

より**正しくない**。

例 3　$\displaystyle\int (2x+1)\sin x dx = -(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$

が正しいかどうか検証する。右辺を微分すると (積の微分法より)

$$\big(-(2x+1)\cos x + 2\sin x\big)' = -(2x+1)'\times\cos x - (2x+1)\times(\cos x)' + 2\times(\sin x)'$$

$$= -2\cos x - (2x+1)\times(-\sin x) + 2\cos x = (2x+1)\sin x$$

より**正しい**。

問　次の式の右辺を微分することにより次の不定積分が正しいかどうか判定せよ。

(1) $\displaystyle\int x^3(x^4-1)^3 dx = \frac{1}{4}(x^4-1)^4 + C$

(2) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\log|x^2-1| + C$

(3) $\displaystyle\int x^2e^x dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

< 不定積分の練習 3 >

問 1　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-2)(x+1)}dx$

(3) $\displaystyle\int (3x+4)\cos x dx$

(4) $\displaystyle\int x\sin(2x)dx$

(5) $\displaystyle\int xe^{3x-1}dx$

(6) $\displaystyle\int 2\log x dx$

(7) $\displaystyle\int x^3\log x dx$

(8) $\displaystyle\int \cos^2 x dx$

(9) $\displaystyle\int \sin^2 x dx$

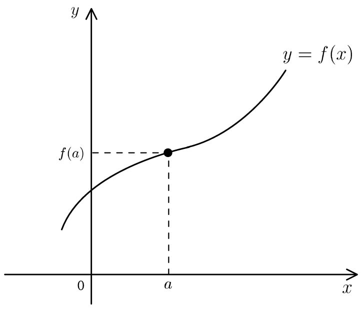
問 2　次の式の右辺の導関数を求め，不定積分の式が正しいかどうか判定せよ。

(1) $\displaystyle\int x^2\sin x dx = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$

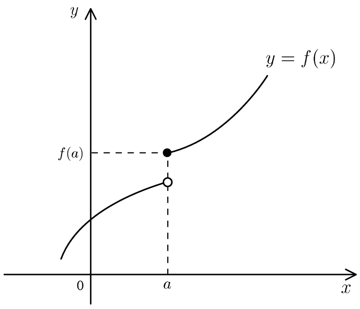
(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$

< 連続性·微分可能性 >

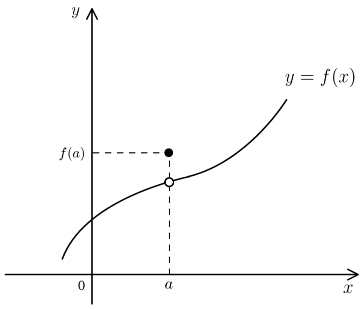
＜連続性＞　関数 $f(x)$ が $\boldsymbol{x=a}$ **で連続**であるとは，極限 $\lim_{x\to a} f(x)$ が存在して，
式 $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ が成立するということである。
図 1 は $x=a$ で連続の場合であり，図 2 と図 3 は連続でない場合である。



(図 1)



(図 2)



(図 3)

関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続であることは，幾何学的には，曲線 $y=f(x)$ が $x=a$ で**つながっている**ということである。

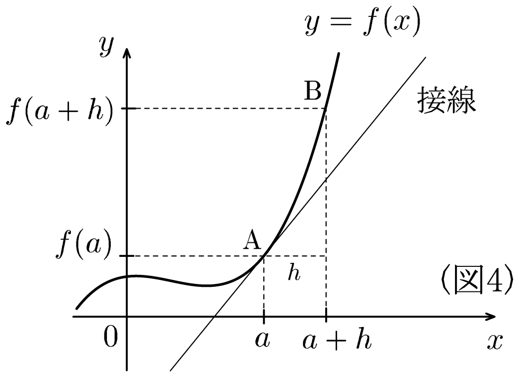
＜微分可能性＞

関数 $f(x)$ が $\boldsymbol{x=a}$ **で微分可能**であるとは，

極限 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在する

ことを言う。この極限値を

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



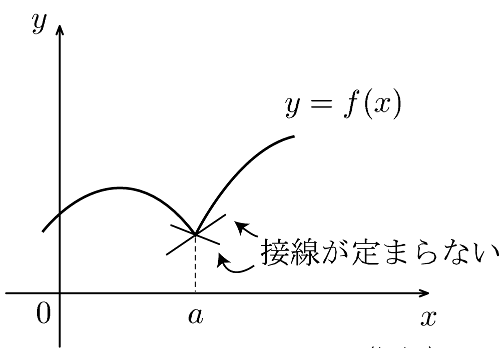
(図4)

とおき，$f(x)$ の $x=a$ における**微分係数**という。図 4 は $f(x)$ が $x=a$ で微分可能な場合である。このとき $f'(a)$ は曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における**接線の傾き**を意味する。

(注 1)　$x=a$ で微分可能であれば，$x=a$ で連続である。

(注 2)　曲線 $y=f(x)$ が図 5 のようなとき，$x=a$ で微分可能ではない。

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であることは，幾何学的には，$x=a$ の近くで**なめらかな曲線である**ことを意味する。



(図5)

< 平均値の定理 >

$x_1 < x_2$ のとき，不等式

$$x_1 \leqq x \leqq x_2 \quad , \quad x_1 < x < x_2 \quad , \quad x_1 < x \quad , \quad x \leqq x_2$$

などを満たす実数 x の集合を**区間**といい，

$$[x_1,\ x_2] \quad , \quad (x_1,\ x_2) \quad , \quad (x_1,\ +\infty) \quad , \quad (-\infty,\ x_2]$$

などで表す。$[x_1,\ x_2] = \{x : x_1 \leqq x \leqq x_2\}$ を**閉区間**，$(x_1,\ x_2) = \{x : x_1 < x < x_2\}$ を**開区間**という。

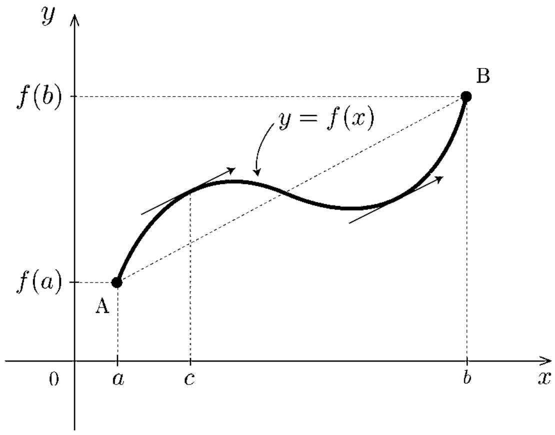
関数 $f(x)$ が**閉区間 $[x_1,\ x_2]$ で連続**であるとは，$[x_1,\ x_2]$ 内の任意の数 x_0 $(x_1 \leqq x_0 \leqq x_2)$ で $f(x)$ が連続であることをいう。また $f(x)$ が**開区間 $(x_1,\ x_2)$ で微分可能**であるとは，$(x_1,\ x_2)$ 内の任意の数 $x_0 (x_1 < x_0 < x_2)$ で微分可能であることをいう。

< 平均値の定理 >

$f(x)$ は $[a,\ b]$ で連続，$(a,\ b)$ で微分可能な関数とする。このとき

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \quad , \quad (a < c < b)$$

を満たす c が存在する。

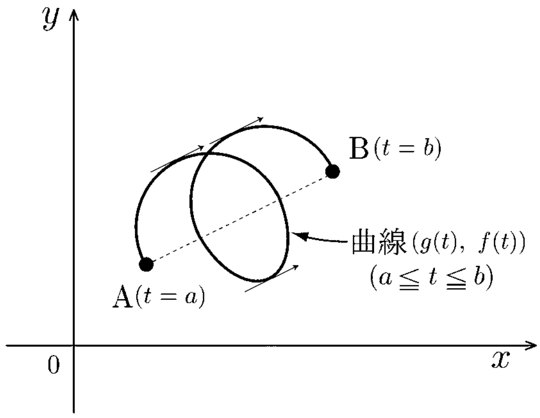


< コーシー ($Cauchy$) の平均値の定理 >

$f(t),\ g(t)$ は $[a,\ b]$ で連続，$(a,\ b)$ で微分可能であり，$g(a) \neq g(b)$ とする。このとき

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad , \quad (a < c < b)$$

を満たす c が存在する。



< 和の記号 Σ >

数列の和を表すのに，記号 Σ を使って次のように表す。

$$a_j + a_{j+1} + a_{j+2} + \cdots + a_n = \sum_{k=j}^{n} a_k$$

例 1　① $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$　，② $\displaystyle\sum_{k=2}^{4} k^3 = 2^3 + 3^3 + 4^4$

③ $\displaystyle 1^2 + 2^2 + 3^3 + \cdots + 100^2 = \sum_{k=1}^{100} k^2$　，④ $\displaystyle 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k$

問 1　次の和を記号 Σ を使って表せ。

(1) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$　　(2) $2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + (n-1)^2$

(3) $1 + 2 + 3 + \cdots + n$　　(4) $\dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n} + \dfrac{3}{n} + \cdots + \dfrac{n}{n}$

記号 Σ の定義から次の公式が得られる。

$$\boxed{① \sum_{k=1}^{n} 1 = n\ ,\ ② \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\ ,\ ③ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ ,\ ④ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2}$$

(略証)　①は明らか。②は等差数列の和の公式。③は $(n+1)^3 - 1^3 = \sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - \sum_{k=1}^{n} k^3$

$= 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$ と①，②の結果から導かれる。④は

$(n+1)^4 - 1^4 = \sum_{k=1}^{n}(k+1)^4 - \sum_{k=1}^{n} k^4 = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$

と①，②，③の結果から導かれる。

例 2　$\displaystyle 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2 = \sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 385$

例 3　$\displaystyle \sum_{k=1}^{n}(k-1)^3 = 0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 = \sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \left\{\frac{(n-1)n}{2}\right\}^2$

問 2　次の和を求めよ。

(1) $1 + 2 + 3 + \cdots + 1000$

(2) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 20^2$

(3) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 10^3$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2$

< 定積分の定義 >

関数 $f(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で定義されているものとする。この区間 $I = [a\ ,\ b]$ を

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

のように $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ をとって n 個の小区間

$$[x_0\ ,\ x_1],\ [x_1\ ,\ x_2],\ [x_2\ ,\ x_3], \cdots,\ [x_{n-1}\ ,\ x_n]$$

に分ける。これを区間 $[a\ ,\ b]$ の**分割**という。各小区間 $I_k = [x_{k-1}\ ,\ x_k]$ から任意の値 ξ_k をとる。ξ_k を小区間 I_k の**代表値**と呼ぶ。この分割と関数 $f(x)$ に対し，次の和

$$R = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

を作る。この和を **リーマン和** という。R 自体は I の分割の仕方と代表値のとり方によって異なるが，分割の個数 n を限りなく大きくし，

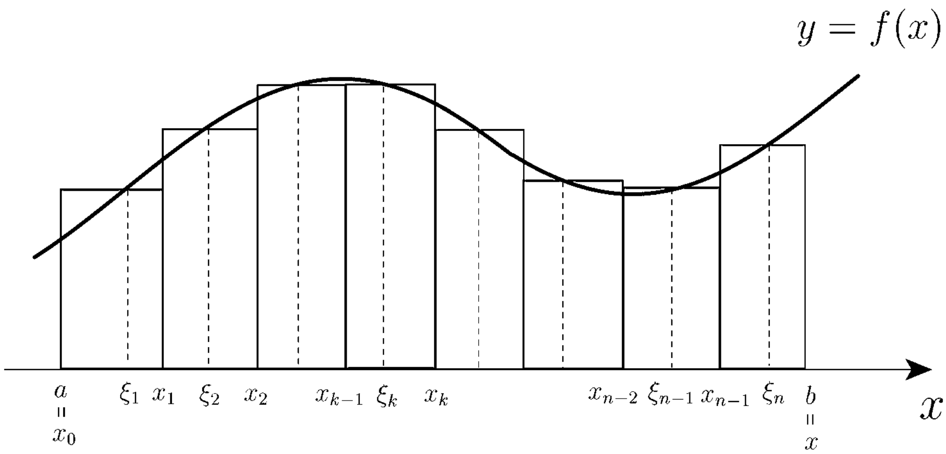
$$\text{分割の最大幅} = \max_{1 \leqq k \leqq n} (x_k - x_{k-1})$$

を限りなく小さくしたとき，常に (どんな分割であっても，どんな代表値のとり方をしても) 一定の極限値に R が近づくならば，$f(x)$ は $[a\ ,\ b]$ で**積分可能**または**リーマン積分可能**であるといい，この極限を

$$\int_a^b f(x)dx$$

と書く。

(注) $f(x) > 0$ の場合，R は右図の長方形の集まりの面積を表す。さらに $f(x)$ が積分可能なとき極限値 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は曲線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = a$ と $x = b$ で囲まれた部分の面積を表す。



< 積分可能性 >

定理　$f(x)$ が $[a\ ,\ b]$ で連続であれば，積分可能である

実は連続でなくても不連続点が有限個の場合や，$f(x)$ が単調関数である場合は積分可能である。積分可能であるための必要十分条件は

$$\lambda = \max_{1 \leqq k \leqq n}(x_k - x_{k-1})\ ,\ m_k = \min\{f(x) : x_{k-1} \leqq x \leqq x_k\}\ ,\ M_k = \max\{f(x) : x_{k-1} \leqq x \leqq x_k\}$$

とおくとき

$$\boxed{\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k) \times (x_k - x_{k-1}) = 0}$$

となることである。

例　(積分可能でない例)

関数 $f(x)$ は区間 $[0\ ,\ 1]$ で定義され，x が有理数のときは $f(x) = 0$, x が無理数のときは $f(x) = 1$ と定める。有理数はどんなに小さな区間にも無限個存在する。そこで ξ_k を有理数とすれば，リーマン和は

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 0 \times (x_k - x_{k-1}) = 0 \cdots ①$$

となる。一方無理数もどんなに小さな区間にも無限個存在する。

そこで ξ_k を無理数とすればリーマン和は

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 1 \times (x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0 = 1 - 0 = 1 \cdots ②$$

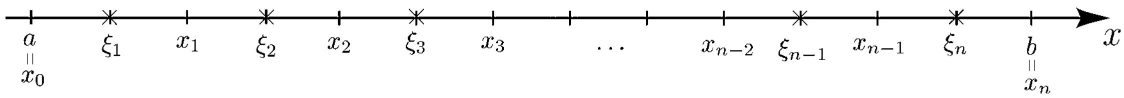
となる。リーマン和が代表値のとり方で 0 になったり 1 になったりするので，一定の極限値には近づかない。従って積分可能ではない。

< 微分積分学の基本定理 >

区間 $[a,\ b]$ における関数 $f(x)$ の定積分の定義は

$$\int_a^b f(x)dx = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \quad \cdots (*)$$

であった。ここで $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ は $[a,\ b]$ の分割であり，



ξ_k は小区間 $[x_{k-1},\ x_k]$ の任意の値である。この極限 lim は分割 $x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n$ と ξ_k をどのように選んでも，分割の最大幅 $\max_{1\leqq k\leqq n}(x_k - x_{k-1})$ が 0 に近づく限り，一定の極限値に収束することを意味する。

<微分積分学の基本定理>

> $f(x)$ が連続で，$\int f(x)dx = F(x) + C$ であるとき，
>
> $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

(証明)　$f(x)$ は連続であるから，積分可能である。従って定積分の定義式 $(*)$ における極限値は一意的に存在する。$F'(x) = f(x)$ より，$F(x)$ は連続で，微分可能である。$[a,\ b]$ の分割 $x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n$ に対して，平均値の定理から

$$\frac{F(x_k) - F(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = F'(\xi_k) \quad (x_{k-1} < \xi_k < x_k)$$

をみたす $\xi_k (1 \leqq k \leqq n)$ が存在する。従って

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \{F(x_k) - F(x_{k-1})\} = F(b) - F(a)$$

となる。ここで分割を細かくする $(n \to \infty,\ \max_{1\leqq k\leqq n}(x_k - x_{k-1}) \to 0)$ 極限をとると，

極限値の一意性から $\int_a^b f(x)dx = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - xk_1) = F(b) - F(a)$ が成り立つ。

< 定積分の計算 1 >

微分積分の基本定理より $f(x)$ が連続で $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$ のとき

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

(注)　$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$ と略記する。

例 1　$\displaystyle\int_1^3 x^4 dx = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_1^3 = \frac{1}{5} \times 3^5 - \frac{1}{5} \times 1^5 = \frac{242}{5}$

例 2　$\displaystyle\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[2\sqrt{x}\right]_1^9 = 2\sqrt{9} - 2\sqrt{1} = 4$

問　次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_4^{10} dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^2 x^3 dx$

(3) $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x^2} dx$　　(4) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x} dx$

(5) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x} dx$　　(6) $\displaystyle\int_0^2 e^x dx$

(7) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$　　(8) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x dx$

(9) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$　　(10) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

(注)　$\displaystyle\int_a^b 1\,dx$ を $\displaystyle\int_a^b dx$ と略記する。また $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{f(x)} dx$ を $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{f(x)}$ と略記する。

＜ 定積分の計算 2 ＞

例　(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3x-4}{x^2}dx = \int_1^2 \left(\frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}\right)dx = \left[3\log|x| + \frac{4}{x}\right]_1^2 = 3\log 2 - 2$

(2) $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x^2-1} = \int_2^3 \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right\}dx = \left[\frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right]_2^3 = \frac{1}{2}\log\left(\frac{3}{2}\right)$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2x)}{2}dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

問　次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x^2-3x+1}{x^2}dx$

(2) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4x+3}$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x dx$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx$

< 定積分の性質 >

定積分の定義から次の性質が導かれる。

(Ⅰ) $\displaystyle\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

(Ⅱ) $\displaystyle\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

(Ⅲ) $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$　　(k は定数)

(Ⅳ) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

(Ⅴ) 区間 $[a\ ,\ b]$ で常に $f(x) \geqq 0$ であれば $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geqq 0$

また，次式が成り立つように定積分の定義を拡張する。

(Ⅵ) $\displaystyle\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$　,　$\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$

例　(1) $\displaystyle\int_{-1}^2 (x^2-2x+3)dx + \int_{-1}^2 (-x^2+2x+3)dx = \int_{-1}^2 6\ dx = 18$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2dx + \int_1^4 x^2dx = \int_{-1}^4 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^4 = \frac{64}{3} - \frac{(-1)}{3} = \frac{65}{3}$

問　次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_3^3 e^{-x^2}dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^3 (x^2+3x+4)dx - \int_{-1}^3 (x^2-3x-4)dx$

(3) $\displaystyle\int_{-2}^1 (x^2+x^3)dx + \int_1^2 (x^2+x^3)dx$

< 定積分の積分変数 >

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C \quad \text{のとき} \quad \int_a^b f(x)dx = \big[F(x)\big]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)}$$

ここで変数 x が別の変数 (例えば t) に変わっても

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \big[F(t)\big]_{t=a}^{t=b} = F(b) - F(a)}$$

のように定積分の値は変わらない。すなわち

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx}$$

例 (1) $\displaystyle\int_1^3 x^4\,dx = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_{x=1}^{x=3} = \frac{1}{5}\times 3^5 - \frac{1}{5}\times 1^5 = \frac{243}{5} - \frac{1}{5} = \frac{242}{5}$

(2) $\displaystyle\int_1^3 t^4\,dt = \left[\frac{1}{5}t^5\right]_{t=1}^{t=3} = \frac{1}{5}\times 3^5 - \frac{1}{5}\times 1^5 = \frac{243}{5} - \frac{1}{5} = \frac{242}{5}$

(3) $\displaystyle\int_1^2 4\pi r^2\,dr = \left[\frac{4}{3}\pi r^3\right]_{r=1}^{r=2} = \frac{4}{3}\pi\times 8 - \frac{4}{3}\pi\times 1 = \frac{28}{3}\pi$

(4) $\displaystyle\int_0^\pi 4\cos\theta\,d\theta = \Big[4\sin\theta\Big]_{\theta=0}^{\theta=\pi} = 4\sin\pi - 4\sin 0 = 0$

問 次の定積分の値を求めよ。(ただし $n \neq -1$)

(1) $\displaystyle\int_1^3 (4-10t)dt$

(2) $\displaystyle\int_0^R 2\pi r dr$

(3) $\displaystyle\int_0^\pi \sin\theta d\theta$

(4) $\displaystyle\int_a^b u^n du$

(5) $\displaystyle\int_1^9 \sqrt{u}du$

＜定積分の置換積分法 1＞

例題　$\displaystyle\int_{-1}^{1}(5x+2)^3dx$ を求めよ。

(解)　まず不定積分 $\displaystyle\int(5x+2)^3dx$ を求める。$u=5x+2$ と置くと $\dfrac{du}{dx}=5$ より

$$\int(5x+2)^3dx=\frac{1}{5}\int(5x+2)^3\times 5dx=\frac{1}{5}\int u^3\frac{du}{dx}dx=\frac{1}{5}\int u^3du$$

$$=\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}u^4+C=\frac{1}{20}u^4+C=\frac{1}{20}(5x+2)^4+C$$

であるから

$$\int_{-1}^{1}(5x+2)^3dx=\left[\frac{1}{20}(5x+2)^4\right]_{-1}^{1}=\frac{7^4}{20}-\frac{(-3)^4}{20}=\frac{2401-81}{20}=116$$

(別解)　$u=5x+2$ とおくと x と u の対応は

x	$-1\ \to\ 1$
u	$-3\ \to\ 7$

より

$$\int_{-1}^{1}(5x+2)^3dx=\frac{1}{5}\int_{x=-1}^{x=1}(5x+2)^3\times 5dx=\frac{1}{5}\int_{x=-1}^{x=1}u^3\times\frac{du}{dx}dx=\frac{1}{5}\int_{u=-3}^{u=7}u^3du$$

$$=\frac{1}{5}\left[\frac{1}{4}u^4\right]_{u=-3}^{u=7}=\frac{1}{5}\left(\frac{7^4}{4}-\frac{(-3)^4}{4}\right)=\frac{1}{5}\left(\frac{2401-81}{4}\right)=116$$

(注)　別解の方法を**定積分の置換積分法**という。

問　次の定積分の値を求めよ。

$$\int_{-1}^{1}(2x+1)^4dx$$

< 定積分の置換積分法 2 >

問　次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^2 (3x-2)^4 dx$

(2) $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{2x+1}dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(4x+1)^3}dx$

(4) $\displaystyle\int_0^2 \frac{3}{5x+2}dx$

< 定積分の置換積分法 3 >

例　$\displaystyle\int_0^1 x^2(x^3+1)^4dx$ を求めたい。$u = x^3+1$ とおくと $\dfrac{du}{dx} = 3x^2$

u と x との対応は

x	$0 \to 1$
u	$1 \to 2$

より

$$\int_0^1 x^2(x^3+1)^4dx = \frac{1}{3}\int_0^1 (x^3+1)^4 \times 3x^2dx = \frac{1}{3}\int_0^1 u^4\ \frac{du}{dx}\ dx = \frac{1}{3}\int_1^2 u^4du$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{5}u^5\right]_1^2 = \frac{1}{3}\times\left\{\frac{32}{5} - \frac{1}{5}\right\} = \frac{31}{15}$$

問　次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 x(x^2+2)^3dx$

(2) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{(x^2+1)^3}dx$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{x^2}{x^3+2}dx$

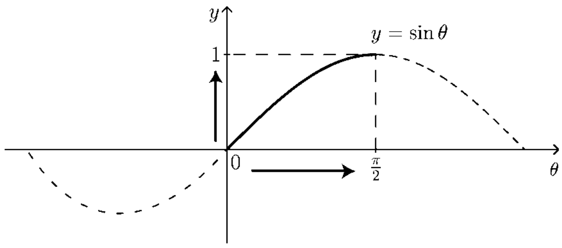
(4) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2e^{x^3+1}dx$

< 定積分の置換積分法 4 >

例題 $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-x^2}dx$ を求めよ。

(解) $x = 3\sin\theta$ とおくと $\dfrac{dx}{d\theta} = 3\cos\theta$ となり，x と θ との対応は

x	$0 \to 3$
$\dfrac{x}{3} = \sin\theta$	$0 \to 1$
θ	$0 \to \dfrac{\pi}{2}$



となる。また $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲では $\cos\theta \geqq 0$ より

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(3\sin\theta)^2} = \sqrt{9\cos^2\theta} = 3\cos\theta$$

従って

$$\int_{x=0}^{x=3} \sqrt{9-x^2}dx = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \sqrt{9-(3\sin\theta)^2}\ \frac{dx}{d\theta}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos\theta)3\cos\theta d\theta$$

$$= 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}d\theta = 9\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9\pi}{4}$$

(注) このような定積分は円の面積を求めるときに使う。

問 次の定積分を求めよ。ただし a は正の定数とする。

(1) $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}dx$

< 定積分の部分積分法 1 >

不定積分の部分積分の公式

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

から定積分の部分積分の公式

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\ dx}$$

が得られる。

例　$$\int_0^5 x(x-5)^2\,dx = \int_0^5 x \times \left\{\ \frac{(x-5)^3}{3}\ \right\}' dx$$

$$= \left[x \times \frac{(x-5)^3}{3}\right]_0^5 - \int_0^5 (x)' \times \frac{(x-5)^3}{3}\,dx = 0 - 0 - \int_0^5 \frac{(x-5)^3}{3}\,dx$$

$$= -\left[\frac{(x-5)^4}{12}\right]_0^5 = -\left\{\ \frac{0^4}{12} - \frac{(-5)^4}{12}\ \right\} = \frac{625}{12}$$

問　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 x(x-1)^3\,dx =$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos x\,dx =$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx =$

(4) $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx =$

< 定積分の部分積分法 2 >

例 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(3x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \times \left(\frac{\sin(3x)}{3}\right)' dx$

$$= \left[x \times \frac{\sin(3x)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \times \frac{\sin(3x)}{3}dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \times \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{3} - 0 + \left[\frac{\cos(3x)}{9}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{6} + \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{9} - \frac{\cos 0}{9} = -\frac{\pi}{6} - \frac{1}{9}$$

問　次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(2x)dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2x)dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos(4x)dx$

(4) $\displaystyle\int_0^{3} xe^{2x}dx$

< 定積分の部分積分法 3 >

例 $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} x\log x dx = \int_1^{\sqrt{e}} \left(\frac{x^2}{2}\right)' \times \log x dx = \left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^{\sqrt{e}} - \int_1^{\sqrt{e}} \frac{x^2}{2} \times (\log x)' dx$

$$= \frac{e}{2}\log\sqrt{e} - \frac{1}{2}\log 1 - \int_1^{\sqrt{e}} \frac{x}{2}dx = \frac{e}{4} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^{\sqrt{e}} = \frac{e}{4} - \left(\frac{e}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

問 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^{e} x\log x dx$

(2) $\displaystyle\int_1^{e} x^2\log x dx$

(3) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} x^3\log x dx$

(4) $\displaystyle\int_1^{e} \log x dx$

< 定積分の部分積分法 4 >

例 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \times (-\cos x)' dx = \Big[x^2 \times (-\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \times (-\cos x) dx$

$$= \left(-\frac{\pi^2}{4}\cos\frac{\pi}{2} - 0\right) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \times (\sin x)' dx$$

$$= \Big[2x \sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x)' \sin x dx = \pi \sin\frac{\pi}{2} - 0 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x dx$$

$$= \pi + \Big[2\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi + 2\cos\frac{\pi}{2} - 2\cos 0 = \pi - 2$$

問　次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{1} x^2 e^x dx$

< 定積分の練習 1 >

問 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{3} dx$

(2) $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x}$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt[3]{x}dx$

(4) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} (3\sin x - 4\cos x)dx$

(5) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{3x^2-4x+1}{x^2}dx$

(6) $\displaystyle\int_{1}^{9} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

(7) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$

(8) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{1}{3x+1}dx$

(9) $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{dx}{x^2-1}$

(10) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 xdx$

(11) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(2x)dx$

(12) $\displaystyle\int_{-2}^{2} e^{3x-1}dx$

(13) $\displaystyle\int_{0}^{1} xe^{-x^2}dx$

< 定積分の練習 2 >

問 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(3x+1)^5}dx$

(2) $\displaystyle\int_1^{10} \sqrt{5x-1}dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{(x^3+1)^4}dx$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x}{x^2+1}dx$

(5) $\displaystyle\int_0^{\pi} (3x+2)\cos x dx$

(6) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin(3x)dx$

(7) $\displaystyle\int_1^4 \log x dx$

(8) $\displaystyle\int_{-1}^1 (2x+1)e^x dx$

(9) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\cos x dx$

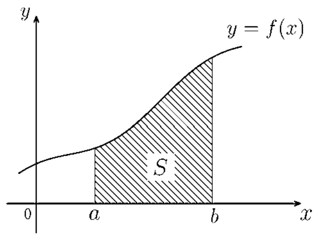
< 面積 1 >

定積分の定義 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \;=\; \lim \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \qquad (x_{k-1} \leqq \xi_k \leqq x_k)$
から次の定理が導かれる。

定理　連続関数 $f(x)$ が区間 $[\,a\,,\,b\,]$ で常に $f(x) \geqq 0$ のとき , 曲線 $y = f(x)$ と
x 軸および直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた部分の面積を S とすると,

$$(*)\quad \boxed{S = \int_a^b f(x)dx}$$

である。

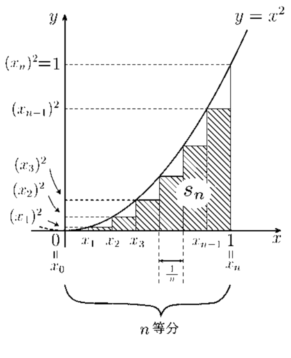


例　放物線 $y = x^2$ と x 軸および直線 $x = 1$ で囲まれる部分の面積 S について $(*)$ を確認する。区間 $[\,0\,,\,1\,]$ を n 等分する。k 番目の分点は $x_k = \frac{k}{n}$ $(k = 0\,,\,1\,,\,2\,,\,\cdots\,,\,n)$ である。代表値が $\xi_k = x_{k-1}$ の場合と $\xi_k = x_k$ の場合のリーマン和をそれぞれ

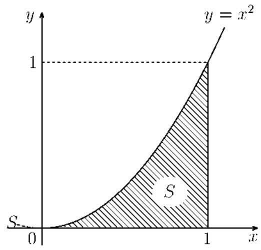
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (x_{k-1})^2(x_k - x_{k-1}) \qquad , \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} (x_k)^2(x_k - x_{k-1})$$

とおくと図より

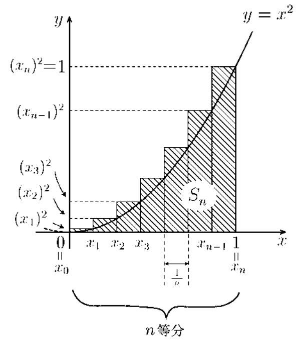
$$s_n \qquad \leqq \qquad S \qquad \leqq \qquad S_n$$



$\leqq$



$\leqq$



となる。従って　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n \;\leqq\; S \;\leqq\; \lim_{n\to\infty} S_n$　である。また

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k^2\right) \times \frac{1}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6} \times \frac{1}{n^3} = \frac{1}{3}$$

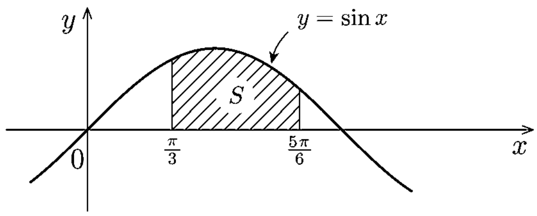
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) \times \frac{1}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \times \frac{1}{n^3} = \frac{1}{3}$$

より $S = \dfrac{1}{3}$ である。一方 $\displaystyle\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$ よって $(*)$ $\displaystyle S = \int_0^1 x^2 dx$ が成り立つ。

＜面積 2＞

例　曲線 $y=\sin x$ と 2 直線 $x=\dfrac{\pi}{3}$ と $x=\dfrac{5\pi}{6}$ および x 軸で囲まれる部分の面積 S を求める。

$$S=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{6}\pi}\sin x dx=\Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{6}\pi}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$



問　次の曲線と 2 直線および x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。

(1) $y=e^x$　,　$x=0$, $x=1$

(2) $y=\sqrt{x}$　,　$x=1$, $x=9$

(3) $y=\dfrac{1}{x^2}$　,　$x=1$, $x=2$

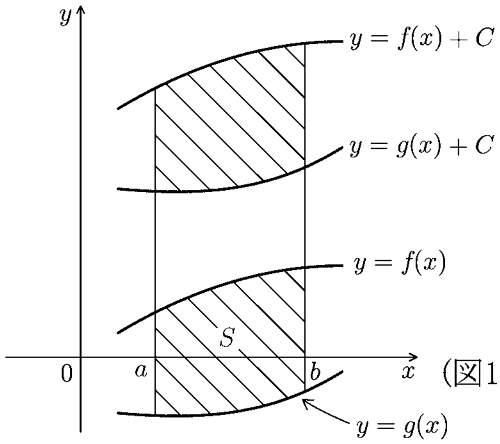
(4) $y=\dfrac{1}{x}$　,　$x=1$, $x=2$

＜面積 3＞

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq g(x)$ である場合，2 曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ と 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれる部分の面積 S は

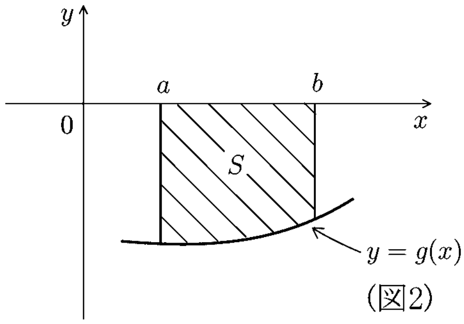
$$(*) \quad \boxed{S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}\, dx}$$

＜証明略＞



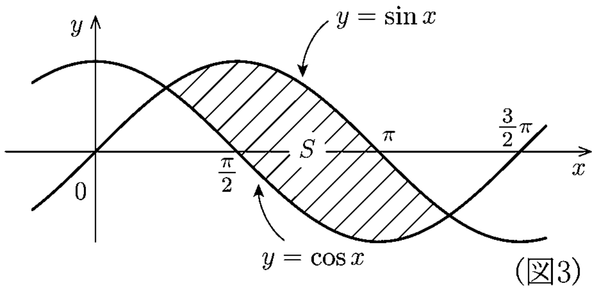
(図1)

問 1　$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $g(x) < 0$ の場合，曲線 $y = g(x)$ と 2 直線 $x = a$，$x = b$ および x 軸で囲まれる部分の面積 S を $g(x)$ に関する定積分で表せ。



(図2)

問 2　図 3 の斜線部分の面積 S を求めよ。



(図3)

問 3　次の曲線や直線で囲まれる部分の面積を求めよ。

(1) $y = \sqrt{x}$，$y = x^2$

(2) $y = \dfrac{1}{x}$，$y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4}$

< 面積 4 >

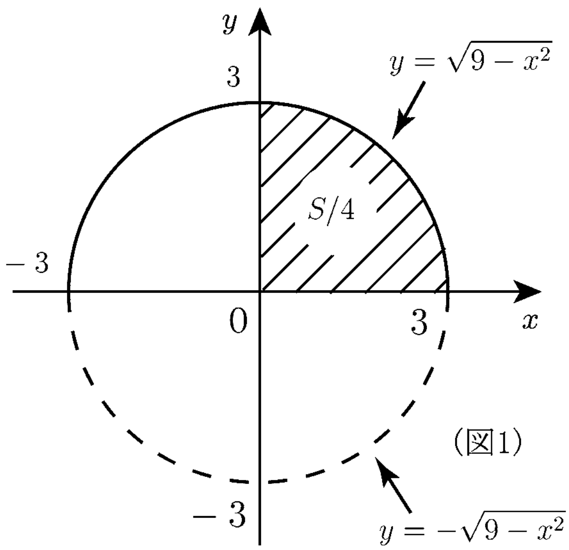
例　半径 3 の円の面積 S を求めたい。原点を中心として半径 3 の円の方程式は

$$x^2 + y^2 = 9$$

である。y について解くと

$$y = \pm\sqrt{9 - x^2}$$

である。これは円を上半円 $(y = \sqrt{9 - x^2})$ と下半円 $(y = -\sqrt{9 - x^2})$ に分けたものである。



(図1)

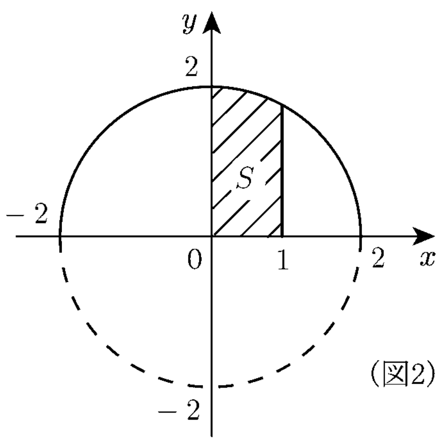
従って $\dfrac{1}{4}$ 円の面積は

$$\frac{S}{4} = \int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\,dx$$

である。34 ページ例題より $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\,dx = \frac{9\pi}{4}$ 。 よって (答) $\underline{S = 9\pi}$

問 1　半径 a の円の面積を求めよ。

問 2　図 2 の斜線部分の面積 S を求めよ。

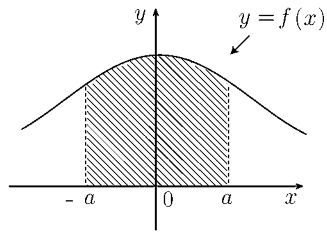


(図2)

< 偶関数・奇関数の定積分 >

$f(-x) = f(x)$　(y 軸対称) である関数 $f(x)$ を**偶関数**という。

例 1　$f(x) = x^{2n}$　(n は整数)，$f(x) = \cos x$，$f(x) = \sin^2 x$ などは偶関数である。

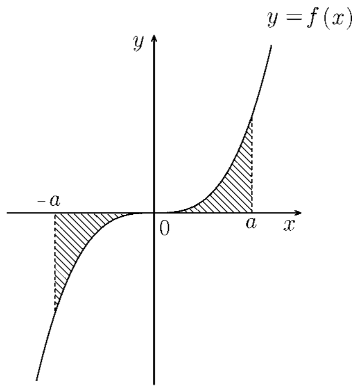


$$\boxed{f(x) \text{ が偶関数であれば } \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx}$$

(証明)　$f(-x) = f(x)$ であるから $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$ よりわかる。

$f(-x) = -f(x)$　(原点対称) である関数 $f(x)$ を**奇関数**という。

例 2　$f(x) = x^{2n-1}$　(n は整数)，$f(x) = \sin x$，$f(x) = \tan x$ などは奇関数である。



$$\boxed{f(x) \text{ が奇関数であれば } \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0}$$

(証明)　$f(-x) = -f(x)$ であるから $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx$ よりわかる。

例 3　$\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^3 + x^4)dx = \int_{-1}^{1} x^3 dx + \int_{-1}^{1} x^4 dx = 0 + 2\int_0^1 x^4 dx = \frac{2}{5}$

問　次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(x^3 + x^4 + x^5)dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x + x^3 + x^6)dx$

(3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x + \cos x)dx$　　(4) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x} + \tan x\right)dx$

< 定積分の応用問題 >

問 1　次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x+x^2+x^3+x^4+x^5)dx$

(2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin x+\cos x+\tan x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$

問 2　次の図形の面積を求めよ。

(1) 曲線 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ と x 軸および 2 直線 $x=1$ と $x=4$ で囲まれた部分の面積

(2) 曲線 $y=-x^2+3$ と曲線 $y=x^2-2x-1$ で囲まれた部分の面積

(3) 曲線 $y=x^3$ と直線 $y=x$ で囲まれた部分の面積

(4) $y=\log x$ と x 軸および直線 $x=e$ で囲まれた部分の面積

＜関数の極限＞

例 1 $\displaystyle \lim_{x\to 3}\frac{x^3-8}{x-2}=\frac{27-8}{3-2}=19$

例 2 $\displaystyle \lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)=12$

例 3 $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^3+x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^3+x^2+x+1)=4$

(注) 初項 a^{n-1} ，公比 $\frac{b}{a}$ の等比数列の和の公式より

$$a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+a^{n-4}b^3+\cdots+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1}=\frac{a^n-b^n}{a-b}$$

よって

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+a^{n-4}b^3+\cdots+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

例 4 $\displaystyle \lim_{x\to 3}\frac{x^5-3^5}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^4+x^3\times 3+x^2\times 3^2+x\times 3^3+3^4)}{x-3}$

$$=\lim_{x\to 3}(x^4+3x^3+9x^2+27x+81)=81\times 5=405$$

問 次の関数の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{x^2-16}{x-4}$

(2) $\displaystyle \lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}$

(3) $\displaystyle \lim_{x\to 2}\frac{x^3-27}{x-3}$

(4) $\displaystyle \lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}$

(5) $\displaystyle \lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}$

(6) $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x-1}$

＜ロピタルの定理１＞

＜定理 (ロピタル)＞

$f(x)$，$g(x)$ は微分可能で，$f(a)=0$，$g(a)=0$ であり，極限 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(証明)　右極限を示す。$x>a$ のとき，コーシーの平均値の定理より

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (a<c<x)$$

をみたす c が存在する。$x\to a+0$ のとき $c\to a+0$ より，右辺 $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ は極限値 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ に近づく。左極限の場合も同様に示される。

例 1　$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x-1}$ を求めたい。$x=1$ を代入すると分母，分子共に 0 になるから

ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^5-1)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1}\frac{5x^4}{1} = 5$$

例 2　$$\lim_{x\to e}\frac{\log x-1}{x-e} = \lim_{x\to e}\frac{(\log x-1)'}{(x-e)'} = \lim_{x\to e}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{e}$$

問　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^7-1}{x-1}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

＜ロピタルの定理 2＞

例 1 $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{x^6-6x+5}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^6-6x+5)'}{((x-1)^2)'}=\lim_{x\to 1}\frac{6x^5-6}{2(x-1)}$

$\displaystyle =\lim_{x\to 1}\frac{(6x^5-6)'}{(2(x-1))'}=\lim_{x\to 1}\frac{30x^4}{2}=15$

例 2 $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(-\sin x)'}{(2x)'}$

$\displaystyle =\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{2}=\frac{-\cos 0}{2}=-\frac{1}{2}$

問　次の関数の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{x\to 2}\frac{x^5-32-80(x-2)}{(x-2)^2}$

(2) $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1-\frac{1}{2}(x-1)}{(x-1)^2}$

(3) $\displaystyle \lim_{x\to e}\frac{\log x-1-\frac{1}{e}(x-e)}{(x-e)^2}$

(4) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}$

(5) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\frac{1}{2}x^2}{x^3}$

(6) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{1}{2}x^2}{x^3}$

＜ロピタルの定理 3＞

例　$$\lim_{x\to a}\frac{x^5-a^5-5a^4(x-a)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{5x^4-5a^4}{2(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{20x^3}{2}=10a^3$$

問　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}-\frac{1}{2\sqrt{a}}(x-a)}{(x-a)^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\log x-\log a-\frac{1}{a}(x-a)}{(x-a)^2}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a-(\cos a)(x-a)}{(x-a)^2}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a+(\sin a)(x-a)}{(x-a)^2}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a-e^a(x-a)}{(x-a)^2}$

< 高階導関数 >

関数 $f(x)$ の導関数　$f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ を

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = f^{(1)}(x)$$

等で表す。また $f'(x)$ の導関数 $f''(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$ を

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 f(x) = f^{(2)}(x)$$

等で表し，$f(x)$ の **2 階導関数**という。

また $f''(x)$ の導関数 $f'''(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f''(x+h) - f''(x)}{h}$ を

$$f'''(x) = \frac{d^3 f}{dx^3} = \left(\frac{d}{dx}\right)^3 f(x) = f^{(3)}(x)$$

等で表し，$f(x)$ の **3 階導関数**という。

一般に $f(x)$ を n 回微分した関数を

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x) = f^{(n)}(x)$$

等で表し，$f(x)$ の n **階導関数**という。

例　$f(x) = x^{10}$ のとき

$f^{(1)}(x) = 10x^9$ ， $f^{(2)}(x) = 90x^8$ ， $f^{(3)}(x) = 720x^7$ ， $f^{(4)}(x) = 5040x^6$

問　$f(x)$ が次の場合に 4 階導関数まで求めよ。

(1)　$f(x) = x^5$

$f^{(1)}(x) =$　　　　$f^{(2)}(x) =$　　　　$f^{(3)}(x) =$　　　　$f^{(4)}(x) =$

(2)　$f(x) = e^x$

$f^{(1)}(x) =$　　　　$f^{(2)}(x) =$　　　　$f^{(3)}(x) =$　　　　$f^{(4)}(x) =$

< 高階微分係数 >

関数 $f(x)$ の n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ の $x=a$ における値 $f^{(n)}(a)$ を $x=a$ における

$f(x)$ の n **階微分係数**という。

例　$f(x)=x^5$ のとき

$f^{(1)}(x)=5x^4$，$f^{(2)}(x)=20x^3$，$f^{(3)}(x)=60x^2$，$f^{(4)}(x)=120x$

より，$x=2$ における 4 階までの微分係数は,

$f^{(1)}(2)=80$，$f^{(2)}(2)=160$，$f^{(3)}(2)=240$，$f^{(4)}(2)=240$

問 1　$f(x)=\sin x$ の 8 階までの導関数 $f^{(1)}(x)\sim f^{(8)}(x)$ を求め,

$x=0$ における 8 階までの微分係数 $f^{(1)}(0)\sim f^{(8)}(0)$ を求めよ。

$f^{(1)}(x)=$　　$f^{(2)}(x)=$　　$f^{(3)}(x)=$　　$f^{(4)}(x)=$

$f^{(5)}(x)=$　　$f^{(6)}(x)=$　　$f^{(7)}(x)=$　　$f^{(8)}(x)=$

$f^{(1)}(0)=$　　$f^{(2)}(0)=$　　$f^{(3)}(0)=$　　$f^{(4)}(0)=$

$f^{(5)}(0)=$　　$f^{(6)}(0)=$　　$f^{(7)}(0)=$　　$f^{(8)}(0)=$

問 2　$f(x)=\cos x$ の 8 階までの導関数 $f^{(1)}(x)\sim f^{(8)}(x)$ を求め,

$x=0$ における 8 階までの微分係数 $f^{(1)}(0)\sim f^{(8)}(0)$ を求めよ。

$f^{(1)}(x)=$　　$f^{(2)}(x)=$　　$f^{(3)}(x)=$　　$f^{(4)}(x)=$

$f^{(5)}(x)=$　　$f^{(6)}(x)=$　　$f^{(7)}(x)=$　　$f^{(8)}(x)=$

$f^{(1)}(0)=$　　$f^{(2)}(0)=$　　$f^{(3)}(0)=$　　$f^{(4)}(0)=$

$f^{(5)}(0)=$　　$f^{(6)}(0)=$　　$f^{(7)}(0)=$　　$f^{(8)}(0)=$

問 3　$f(x)=e^x$ の n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ を求め，$x=0$ における

n 階微分係数 $f^{(n)}(0)$ を求めよ。

$f^{(n)}(x)=$　　$f^{(n)}(0)=$

< テーラーの定理 >

< テーラーの定理 >

$f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で連続であり，$a < x < b$ で何回でも微分可能であるとする。

このとき

$$f(b) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(b-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{(n-1)} + R$$

とおくと

$$R = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n \qquad (\ a < c < b\ )$$

をみたす c が存在する。

(証明)　$n = 1$ のときと $n = 2$ のときの証明をする。

< $n = 1$ のとき >

$F(x) = f(x) - f(a)$，$G(x) = x - a$　とおくと

$F'(x) = f'(x)$，$G'(x) = 1$，$F(a) = 0$，$G(a) = 0$ より，コーシーの平均値の定理から

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} \qquad (\ a < c < b\ )$$

をみたす c が存在する。よって　$\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{f'(c)}{1}$　より

$$\underline{f(b) = f(a) + \frac{f'(c)}{1!}(b-a)}$$

< $n = 2$ のとき >

$F(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$，$G(x) = (x-a)^2$　とおくと

$F'(x) = f'(x) - f'(a)$，$F''(x) = f''(x)$，$G'(x) = 2(x-a)$，$G''(x) = 2$，

$F(a) = 0$，$F'(a) = 0$，$G(a) = 0$，$G'(a) = 0$ より，コーシーの平均値の定理から

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(c_1)}{G'(c_1)} = \frac{F'(c_1) - F'(a)}{G'(c_1) - G'(a)} = \frac{F''(c_2)}{G''(c_2)} \qquad (\ a < c_2 < c_1 < b\ )$$

をみたす c_1，c_2 が存在する。よって $\dfrac{f(b) - f(a) - f'(a)(b-a)}{(b-a)^2} = \dfrac{f''(c_2)}{2}$ より

$$\underline{f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(c_2)}{2!}(b-a)^2}$$

n が 3 以上のときも同様に示される。

＜関数の 1 次近似＞

テーラーの定理で，$n=2$，$b=x$ とおくと

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(c)}{2}(x-a)^2 \qquad (a<c<x)$$

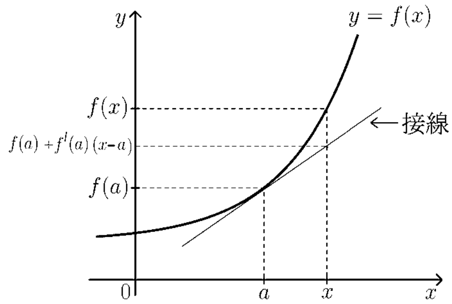
をみたす c が存在する。ここで $f''(c)$ が大きくない場合，x が a に十分近いと $\dfrac{f''(c)}{2}(x-a)^2$ は小さいので，次の近似式が成り立つ。

$$(*)\ \boxed{\ x \fallingdotseq a \text{ のとき } f(x) \fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)\ } \ \text{(1 次近似式)}$$

これを $f(x)$ の $x=a$ の近くでの 1 次**近似式**

という。右辺の式は直線

$$\boxed{\ y=f(a)+f'(a)(x-a)\ } \qquad \text{(接線)}$$



を表す。これは曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,f(a))$ における接線の方程式である。

(注)　$f(x)$ が $x<a$ でも定義されている場合は，1 次近似式 $(*)$ は $x<a$ のときも成り立つ。

例　$f(x)=\sqrt[3]{x}$ のとき $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ より $\sqrt[3]{x}$ の 1 次近似式は

$$\underline{x \fallingdotseq a \text{ のとき} \qquad \sqrt[3]{x} \fallingdotseq \sqrt[3]{a}+\frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}(x-a)}$$

問　$f(x)$ が次の関数の場合に $x=a$ の近くでの 1 次近似式を求めよ。

(1)　$f(x)=\sqrt{x}$　　(2)　$f(x)=\sqrt[4]{x}$

(3)　$f(x)=\log x$　　(4)　$f(x)=\sin x$

(5)　$f(x)=\cos x$　　(6)　$f(x)=e^x$

＜1次近似値＞

例　前のページの例より $f(x) = \sqrt[3]{x}$ の $x = a$ の近くでの 1 次近似式は

$$x \fallingdotseq a \text{ のとき } \sqrt[3]{x} \fallingdotseq \sqrt[3]{a} + \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}(x - a) \ \ ... (*)$$

であった。この近似値を用いて $\sqrt[3]{8.15}$ の近似式を求める。

$x = 8.15$，$a = 8$ とおくと $x \fallingdotseq a$ より $(*)$ 式から

$$\sqrt[3]{8.15} \fallingdotseq \sqrt[3]{8} + \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}(8.15 - 8)$$

$$= 2 + \frac{1}{3 \times 4} \times 0.15 = 2 + \frac{0.05}{4} = 2.0125$$

この値 2.0125 は，1 次近似式 $(*)$ を用いるので，$\sqrt[3]{8.15}$ の **1 次近似値**

という。なお実際の値 $\sqrt[3]{8.15} = 2.01242$ と比べると誤差は 0.0001 以内である。

問　次の 1 次近似値を求めよ。

(1)　$\sqrt{4.1}$

(2)　$\sqrt[4]{16.1}$

(3)　$\log(1.1)$

< 関数の 2 次近似 >

テーラーの定理で，$n = 3$，$b = x$ とおくと

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-a)^3 \qquad (a < c < x)$$

をみたす c が存在する。ここで $f'''(c)$ が大きくない場合，x が a に十分近いと $\dfrac{f'''(c)}{3}(x-a)^3$ は小さいので，次の近似式が成り立つ。

$$(*) \quad \boxed{x \fallingdotseq a \text{ のとき } f(x) \fallingdotseq f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2} \quad (2\text{ 次近似式})$$

これを $f(x)$ の $x = a$ の近くでの 2 **次近似式**という。

(注)　$f(x)$ が $x < a$ でも定義されている場合は，2 次近似式 $(*)$ は $x < a$ のときも成り立つ。

例　$f(x) = x^5$ のとき $f'(x) = 5x^4$，$f''(x) = 20x^3$ より x^5 の 2 次近似式は

$$\underline{x \fallingdotseq a \text{ のとき} \quad x^5 \fallingdotseq a^5 + 5a^4(x-a) + 10a^3(x-a)^2}$$

問　$f(x)$ が次の関数の場合に $x = a$ の近くでの 2 次近似式を求めよ。

(1)　$f(x) = x^n$

(2)　$f(x) = \sqrt{x}$

(3)　$f(x) = \log x$

(4)　$f(x) = \sin x$

(5)　$f(x) = \cos x$

(6)　$f(x) = e^x$

< テーラー展開 >

テーラーの定理で $b = x$ とおくと

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

をみたす $c\ (a < c < x)$ が存在する。ここで $f(x) = e^x$ や $\sin x$，$\cos x$ などの場合のように，$f^{(n)}(c)$ が大きくならない場合は，最後の項 $\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$ は $n \to \infty$ のとき 0 に近づく。この極限の式

$$(*)\quad \boxed{f(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots}$$

の右辺は無限個の和である。この式 $(*)$ を $f(x)$ の $x = a$ の近くでの**テーラー展開**という。

(注)　$f(x)$ が $x < a$ でも定義されている場合は，$(*)$ 式は $x < a$ でも成り立つ。

例　$f(x) = e^x$ のとき $f^{(n)}(x) = e^x$ であるから，$x = 2$ の近くでテーラー展開は

$$\underline{e^x = e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2}{2!}(x-2)^2 + \frac{e^2}{3!}(x-2)^3 + \cdots + \frac{e^2}{n!}(x-2)^n + \cdots}$$

問 1　$f(x) = e^x$ に対し，$x = a$ の近くでのテーラー展開を求めよ。

問 2　定数 a，A_0，A_1，A_2，A_3，$\cdots$，A_n，$\cdots$ に対し，関数

$$f(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + A_3(x-a)^3 + \cdots + A_n(x-a)^n + \cdots$$

を考える。次の値

$f(a) =$　　　$f^{(1)}(a) =$　　　$f^{(2)}(a) =$　　　$f^{(3)}(a) =$　　　$f^{(n)}(a) =$

を求め，A_0，A_1，A_2，A_3，A_n を $f(a)$ および $f^{(1)}(a)$，$\cdots$，$f^{(n)}(a)$ などを用いて表せ。

$A_0 =$　　　$A_1 =$　　　$A_2 =$　　　$A_3 =$　　　$A_n =$

< マクローリン展開 1 >

関数 $f(x)$ の $x=0$ の近くでのテーラー展開

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

を**マクローリン展開**という。

問 1 $f(x) = e^x$ に対し，$f(0)$ および $f^{(n)}(0)$ の各値を求め，

$f(x) = e^x$ のマクローリン展開を求めよ。

$f(0) =$ 　　　　　　　　$f^{(n)}(0) =$

$e^x =$

問 2 $f(x) = \sin x$ に対し，$f(0)$ および $f^{(1)}(0) \sim f^{(12)}(0)$ の各値を求め，

$\sin x$ のマクローリン展開を求めよ。

$f(0) =$ 　$f^{(1)}(0) =$ 　$f^{(2)}(0) =$ 　$f^{(3)}(0) =$ 　$f^{(4)}(0) =$

$f^{(5)}(0) =$ 　$f^{(6)}(0) =$ 　$f^{(7)}(0) =$ 　$f^{(8)}(0) =$

$f^{(9)}(0) =$ 　$f^{(10)}(0) =$ 　$f^{(11)}(0) =$ 　$f^{(12)}(0) =$

$\sin x =$

問 3 $f(x) = \cos x$ に対し，$f(0)$ および $f^{(1)}(0) \sim f^{(12)}(0)$ の各値を求め，

$\cos x$ のマクローリン展開を求めよ。

$f(0) =$ 　$f^{(1)}(0) =$ 　$f^{(2)}(0) =$ 　$f^{(3)}(0) =$ 　$f^{(4)}(0) =$

$f^{(5)}(0) =$ 　$f^{(6)}(0) =$ 　$f^{(7)}(0) =$ 　$f^{(8)}(0) =$

$f^{(9)}(0) =$ 　$f^{(10)}(0) =$ 　$f^{(11)}(0) =$ 　$f^{(12)}(0) =$

$\cos x =$

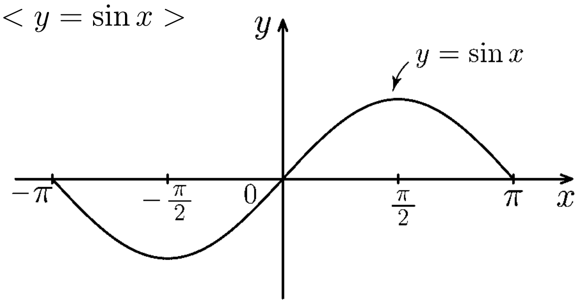
＜マクローリン展開 2＞

例 1　$\sin x$ のマクローリン展開は

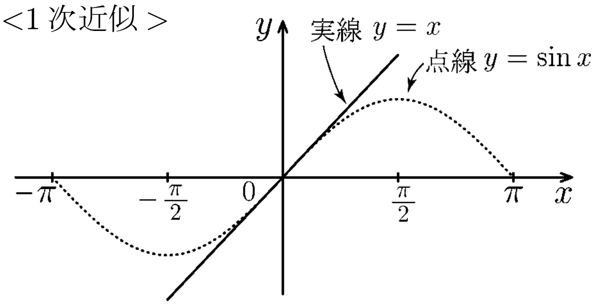
$$\boxed{\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \cdots}$$

となる。以下の図のように $\sin x$ のグラフの $x=0$ の近くを近似していることがわかる。

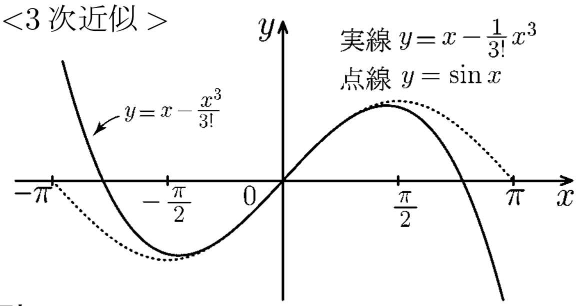
＜ $y = \sin x$ ＞



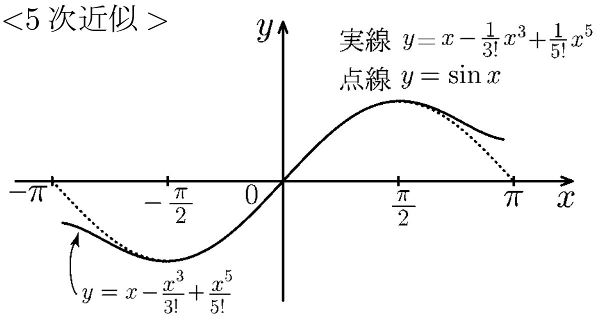
<1 次近似＞



<3 次近似＞



<5 次近似＞

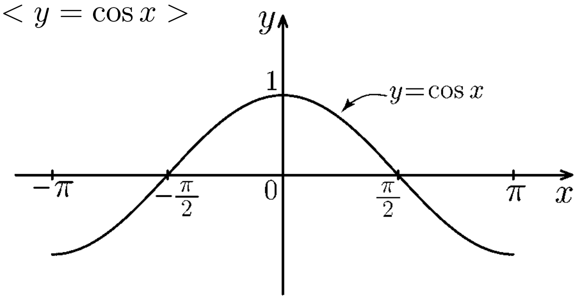


例 2　$\cos x$ のマクローリン展開は

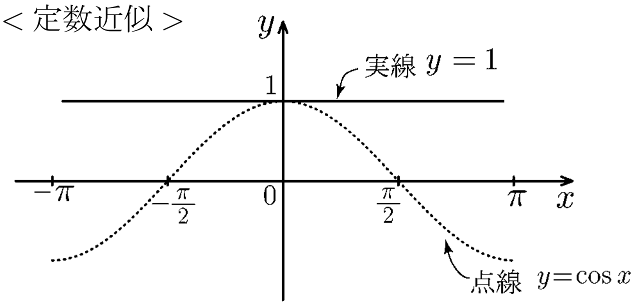
$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \frac{1}{10!}x^{10} + \cdots}$$

となる。以下の図のように $\cos x$ のグラフの $x=0$ の近くを近似していることがわかる。

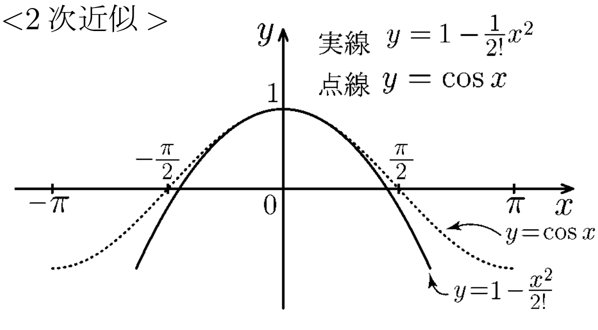
＜ $y = \cos x$ ＞



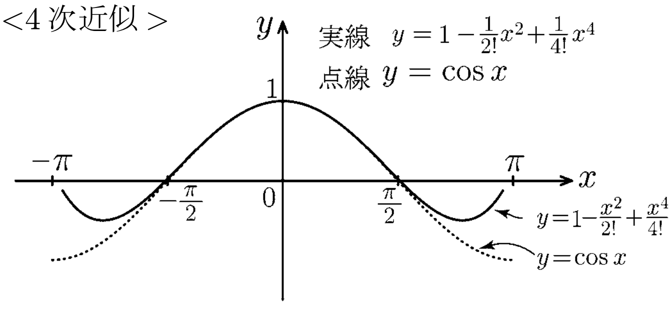
＜定数近似＞



<2 次近似＞



<4 次近似＞



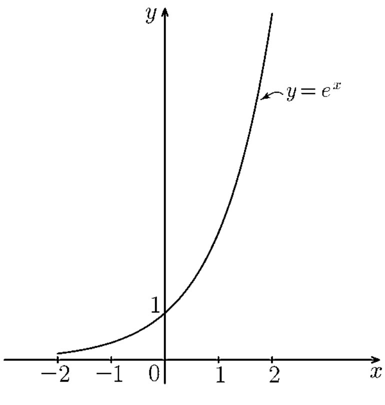
$<$ マクローリン展開 3 $>$

指数関数 e^x のマクローリン展開は

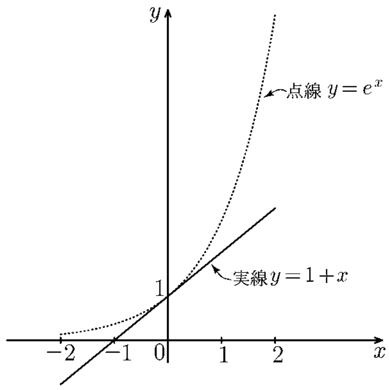
$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots}$$

となる。以下の図のように e^x のグラフの $x=0$ の近くを近似していることがわかる。

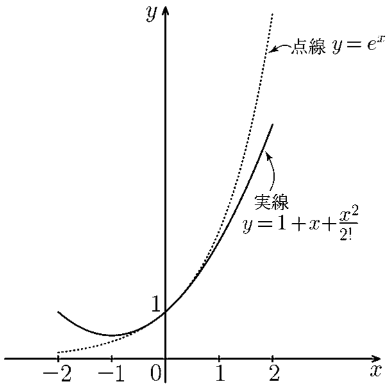
$< y = e^x >$



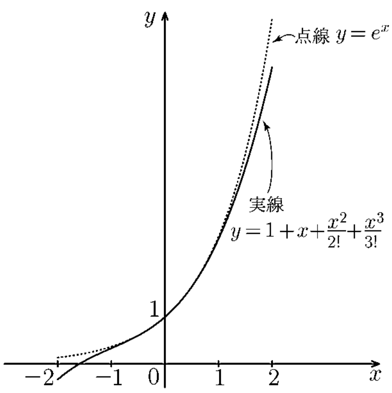
$<$ 1 次近似 $>$



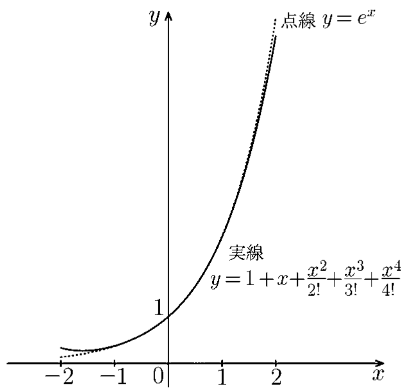
$<$ 2 次近似 $>$



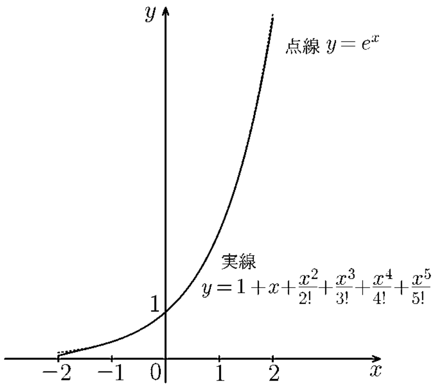
$<$ 3 次近似 $>$



$<$ 4 次近似 $>$



$<$ 5 次近似 $>$



上の図からわかるように 4 次関数 $1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4$ は $-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲

で e^x のグラフとほぼ一致している。従って次の近似式が成り立つ。

$$\boxed{-1 \leqq x \leqq 1 \quad \text{のとき} \quad e^x \fallingdotseq 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4}$$

この近似式で $x = 1$ とおくと

$$e \fallingdotseq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \fallingdotseq 2.70833$$

となる。実際の値 $e = 2.71828...$ と比較すると誤差は 0.01 以内である。

＜練習問題＞

問 1　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^6-64}{x-2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^6-64}{x-2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a-e^a(x-a)-\frac{1}{2}e^a(x-a)^2}{(x-a)^3}$

問 2　関数 $f(x)=e^x$ の $x=a$ の近くでのテーラー展開を求めよ。

問 3　次の近似式を求めよ。

(1) $f(x)$ の $x=a$ の近くでの 2 次近似式

(2) $f(x)=\sqrt{x}$ の $x=a$ の近くでの 1 次近似式

(3) $f(x)=\log x$ の $x=a$ の近くでの 1 次近似式

(4) $f(x)=\sin x$ の $x=a$ の近くでの 2 次近似式

問 4　次の 1 次近似値を求めよ。

(1) $\sqrt{16.1}$　　(2) $\log 1.05$

問 5　次のマクローリン展開を求めよ。

(1) $\sin x$

(2) $\cos x$

< 付録.1 数学史年表 (1000〜1500) >

年代	数学史	一般史
1000	ジェルベール (940 頃〜1003 頃)(フランス)（インド・アラビア数字 1〜9 の紹介) 割り算記号 ÷ の使用（アラビア）(発明者不明)	トルコ帝国エルサレムを占領 東ローマ帝国十字軍の東征開始
1100	バースカラ II 世 (1114 頃〜1185 頃)(インド) 著書「ビージャニカ」 （代数学，負の数，正の数の平方根は正と負の２個）	羅針盤の発明（中国） イタリアの海港都市=地中海貿易で栄える →「読み，書き，算数」の教育熱高まる
1200	フィボナッチ (1180 頃〜1250 頃)(イタリアのピサ) 著書「算盤の書」(インド・アラビア式の十進位取り記数法の紹介，筆算の仕方・分数計算・比例計算・２次方程式・三角法の解説，フィボナッチ数列)	
1300	トーマス・ブラッドワーデン (1290 頃〜1349 頃)(イギリス) 著書「比例論」「算術概論」「幾何学概論」（正多面体、星形多角形）「運動における速度の比例について」 ニコル・オレーム (1320 頃〜1382 頃)(パリ) （運動論＝運動をグラフで表示（横軸を時間・縦軸を速度），地球の自転の可能性）著書「比例論」（分数指数の発明）	マルコ・ポーロ (1254〜1324)(イタリア)「東方見聞録」(1298 頃) ルネサンス（イタリア） グーテンベルグ (1390〜1468)(ドイツ)(金属活字による印刷)
1400	パチョーリ (1450 頃〜1520 頃)(ミラノ) 著書「算術・幾何・比および比例大全」（式の記号化，複式簿記) ヨハネス・ウイッドマン (1489 頃)(ドイツのライプチヒ) 著書「全商業のための機敏にして親切な計算」（記号＋，—）	コロンブス (1451 イタリア生)(1492 西インド諸島到達) レオナルド・ダ・ビンチ (1452〜1519)(フィレンツェ)(絵画の遠近法)，実現可能なパラシュートの絵，ヘリコプターの設計，毛管現象を注目，振り子時計の図，ローラーベアリングとローラー製粉器の設計， 西洋式銃の絵を描く。
1500	クリストル・ルドルフ (1525 頃)(ドイツ) 著書「代数学」（平方根の記号）	

< 付録.2 数学史年表 (1500〜1600) >

年代	数学史	一般史
1500	シピオーネ・デル・フェッロ (1465〜1526 頃) (イタリア ボローニア大学教授)(3 次方程式 $x^3+cx=d$ の解法)	アメリクス・ヴェスプッチ (新大陸探検 1497〜1504)
	タルターリア (1499〜1577 頃)(イタリア) (3 次方程式の解法)	ヴァルトゼーミュラー (新大陸をアメリカと命名 1507)
	ロバート・レコード (1510〜1556 頃)(イギリス) 著書「知恵の砥石」(代数学、等号＝)	
	カルダーノ (1501〜1576 頃)(イタリア) (代数学の本「偉大なる術」出版 (1545)…3 次方程式の解 (タルターリアの方法)・4 次方程式の解（フェラリの方法) の紹介，負の数，複素数)	マゼラン (世界一周航海中 1480〜1521 フィリピン群島で殺される)
	フェラリ (1522〜1560 頃)(イタリア)(4 次方程式の解法)	コペルニクス (ポーランド) (1473〜1543)「天体の回転について」(地動説)(1514 執筆 1543 出版)
	ボンベリ (1526〜1572)(イタリア)（著書「代数学 Algebra」(1572 出版)…方程式の複素数解，複素数の演算)	
	フランキスクス・ヴィエタ (1540〜1603)(フランス) 著書「解析法入門」(数式の記号化，等式の性質，未知数を母音の大文字・既知数を子音の大文字で表す)	ティコ・ブラーエ (1546〜1601)(デンマーク → プラハ) (天文学，超新星の発見，視差による彗星と地球との距離の計算 → 彗星が大気中の現象でないことを示す)
	シモン・ステビン (1548〜1620)(オランダ) 著書「小数」(1586 出版)（10 進法による分数の表現＝小数表示，力の平行四辺形の法則，静水の器底に及ぼす圧力はその深さのみに依存する)	ガリレオ・ガリレイ (1564〜1642)(イタリアのピサ)（自然落下する物体の落下距離が時間の 2 乗に比例 → 落下速度は時間に比例 → 加速度一定，慣性の法則，放物運動，木星の衛星・金星の満ち欠けの観測からコペルニクス体系の正しさを示す)
	ネピア (1550〜1617)(スコットランド) 著書「対数の規則の叙述」(1614 出版)「対数の規則の構成」(1619 出版)	
	オートレッド (1578〜1660 頃)(イギリス)（計算尺の発明 積の記号 ×)	
1600	メルセンヌ (1588〜1648)(フランス)…サイクロイド，完全数	ケプラー (1571〜1630)(ドイツ → プラハ)(天文学，日食と月食の理論，惑星運動に関するケプラーの法則，回転体の体積)
	デカルト (1596〜1650)(フランス)（解析幾何学＝図形を座標平面上の座標で表示，放物線を 2 次方程式で表す，軌跡)	