



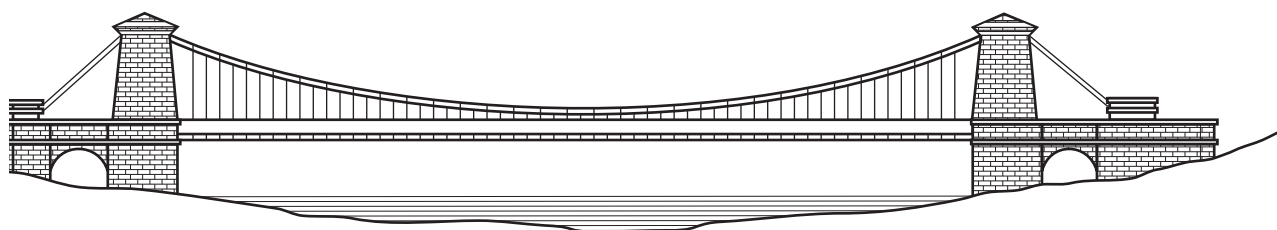
高知工科大学

Kochi University of Technology

基礎数学

2

(2007年度版)



指数・対数，三角関数
合成関数，逆関数，極限

山崎 和雄，井上昌昭 著

< 指数の拡張 >

a を n 個掛け合わせたものを a の n 乗といい、 a^n で表す。

このとき、 n を a^n の**指数**という。

m, n が自然数のとき、次の指数法則が成り立つ。

$$a^m \times a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad (ab)^n = a^n b^n$$

問 1 次の計算をせよ。

$$(1) x^3 \times x^4 \qquad (2) x^2 \times x \qquad (3) (x^3)^4$$

$$(4) (x^2)^4 \qquad (5) (ab)^3 \qquad (6) (a^2 b^3)^4$$

指数が 0 や負の整数のとき a^n をどのように定めるかを考えてみる。

0 や負の整数について、次のように定める。

$$a \neq 0 \text{ とき、} \quad a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

問 2 次の値を求めよ。

$$(1) 3^0 \qquad (2) 5^{-1}$$

$$(3) 5^{-2} \qquad (4) 0.1^{-1}$$

$$(5) \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \qquad (6) \left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$$

問 3 次の計算を行い、結果を負の整数を用いないで表せ。

$$(1) 3x \div 5x^2 \qquad (2) (-3x^2)^3$$

$$(3) x^3 y \div y x^3 \qquad (4) \left(\frac{1}{3} x y^2\right)^2 \times 27 x^2 y$$

$$(5) 12x^2 y^3 \div \left(-2xy^2\right)^2 \qquad (6) (-3ab^2)^2 \div (-a^2 b)$$

< 分数の指数 >

3 乗すると a となる正の数を $\sqrt[3]{a}$ と表した。

このとき、

$$(a^{\frac{1}{3}})^3 = a^{\frac{1}{3} \times 3} = a^1 = a$$

となるから、

$$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$$

となることがわかる。また、

$$a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3} \times 2} = (a^{\frac{1}{3}})^2 = (\sqrt[3]{a})^2$$

$$a^{\frac{2}{3}} = a^{2 \times \frac{1}{3}} = (a^2)^{\frac{1}{3}} = (\sqrt[3]{a^2})$$

したがって、

$$a^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{a})^2 = \sqrt[3]{a^2}$$

まとめると、

$a > 0, m$ が整数, n が整数のとき

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[n]{a^m})$$

また、指数がどのような整数や分数 (有理数) であっても、次の指数法則が成り立つ。

$a > 0, b > 0$ で、 p, q が有理数のとき、

$$a^p \times a^q = a^{p+q} \quad (a^p)^q = a^{pq} \quad (ab)^p = a^p b^p$$

問 1 次の計算をせよ。(ただし、 $a > 0, b > 0$ とする)

(1) $\sqrt{a} \times \sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[6]{a^5}$ (2) $a\sqrt{a} \div \sqrt[3]{a}$

(3) $\sqrt{ab^3} \div \sqrt[3]{a^2b}$ (4) $\sqrt[6]{a^3b} \times \sqrt[3]{ab} \div \sqrt[3]{ab^2}$

問 2 次の値を求めなさい。

(1) $4^{\frac{1}{2}}$ (2) $27^{\frac{2}{3}}$ (3) $8^{\frac{2}{3}}$ (4) $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$

(5) $(-4)^3$ (6) $(-27)^{\frac{1}{3}}$ (7) $9^{\frac{3}{2}}$ (8) $16^{\frac{3}{4}}$

< 指数関数とそのグラフ >

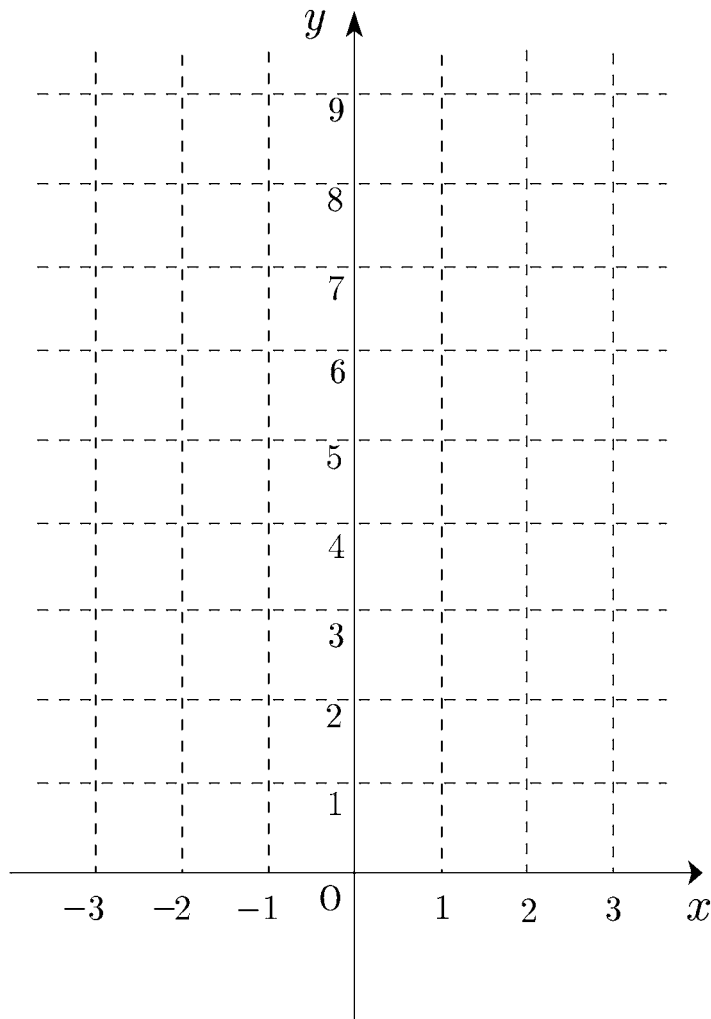
問 (1) $y = 2^x$ と, (2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフを表を完成してからかきなさい。

(1) $y = 2^x$

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y

(2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y



< 常用対数 >

「 $100 = 10^r$ となる r の値はいくらか」という問題の答えは 2 である。

このことを

$$\log_{10} 100 = 2 \quad (\log \text{ はログと読む。})$$

と表す。

$\log_{10} 100$ ということは、「100 は 10 の何乗になるか」という意味である。

このことを、一般化すると、正の数 R に対して

$$R = 10^r$$

となるような数 r を、

$$\log_{10} R$$

と表す。 $\log_{10} R$ を R の**常用対数**という。また 10 を**底**という。

100 は 10^2 である。これを $\log_{10} 100 = 2$ と表し、100 の常用対数は 2 であることを意味する。

つまり、対数という意味は「与えられた数に対する指数のこと」と考えるとよい。

問 1 次の式を \log_{10} の記号を用いて表せ。

(1) $1000 = 10^3$

(2) $1 = 10^0$

(3) $0.01 = 10^{-2}$

(4) $\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}}$

問 2 次の値を求めよ。

(1) $\log_5 125$

(2) $\log_{16} 4$

(3) $\log_3 \sqrt{3}$

(4) $\log_{\frac{1}{2}} 16$

< 一般の対数 >

$8 = 2^3$ である。このことを

$$\log_2 8 = 3$$

と表して、これを

「2 を底とする 8 の対数は 3 である。」という。

一般に、 $R = a^r$ のとき (a は 1 でない正の数とする)

$$\log_a R = r$$

と表し、

「 a を底とする R の対数は r である」という。

つぎに、 $\log_a M, \log_a N$ の値が与えられているとき、

$$1. \quad \log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

の式が成り立つことを証明する。

$$\log_a M = m, \quad \log_a N = n$$

とおくと、

$$M = a^m, \quad N = a^n$$

となる。

$$MN = M \times N = a^m \times a^n = a^{m+n}$$

であるから

$$\log_a MN = m + n = \log_a M + \log_a N$$

となる。

問 1 指数法則

$$a^m \div a^n = a^{m-n}, (a^m)^n = a^{mn}$$

を利用して、次の性質を導け。

$$2. \quad \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$3. \quad \log_a M^n = n \log_a M$$

問 2 次の式を簡単にせよ。

$$(1) \quad \log_3 27$$

$$(2) \quad \log_{10} \frac{1}{10000}$$

$$(3) \quad \log_4 2 + \log_4 32$$

$$(4) \quad \log_3 \sqrt{54} - \log_3 \sqrt{6}$$

$$(5) \quad \log_2 \frac{8}{3} + \log_2 6$$

$$(6) \quad \log_5 75 - \log_5 3$$

< 底の変換公式 >

$a^0 = 1$, $a^1 = a$ であるから、

$$\log_a 1 = 0,$$

$$\log_a a = 1$$

が成り立つことがわかる。

次に、 a を底とする対数 $\log_a b$ を、 c を底とする対数で表してみよう。

$$\log_a b = p$$

とおくと

$$a^p = b$$

両辺に、 c を底とする対数をとると

$$\log_c a^p = \log_c b$$

$$p \log_c a = \log_c b$$

$a \neq 1$ であるから、 $\log_c a \neq 0$

したがって

$$p = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (\text{底の変換の公式})$$

とくに

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

問 次の式を計算せよ。

(1) $\log_{10} 60 + 2 \log_{10} \sqrt{5} - \log_{10} 3$

(2) $\log_2 4 - \log_2 3 + \log_2 6$

(3) $\log_8 5 \cdot \log_{49} 16 \cdot \log_5 7$

(4) $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a$

(5) $(\log_3 \sqrt{2} + \log_9 \sqrt[3]{4}) \log_2 3$

(6) $\log_2 8\sqrt{6} + \log_2 2\sqrt{2} - \log_2 \sqrt{3}$

< 対数関数とそのグラフ >

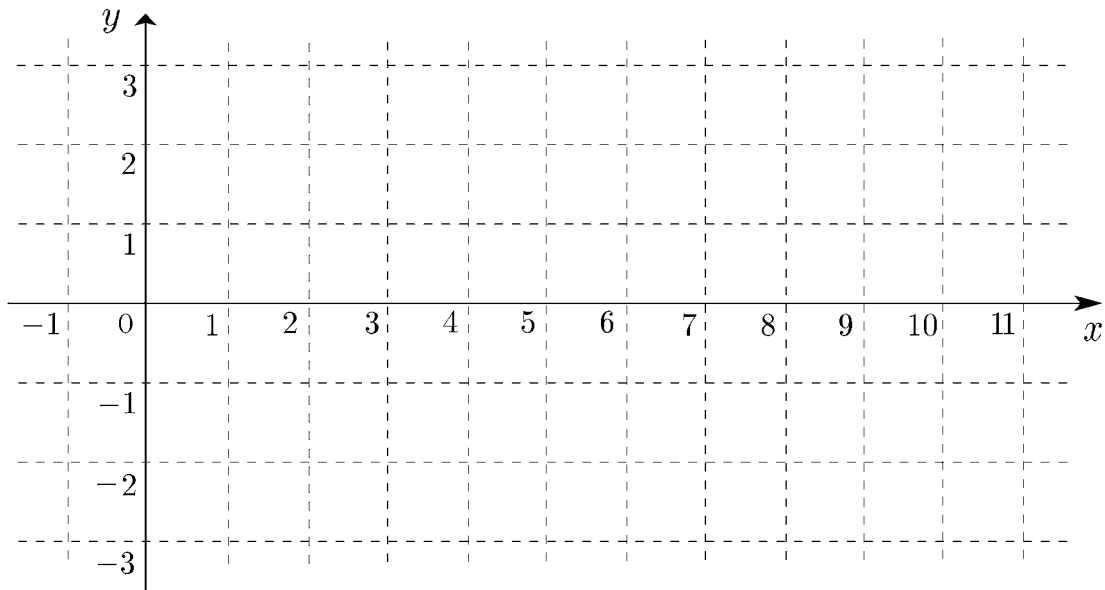
問 (1) $y = \log_2 x$ と, (2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフを表を完成してからかきなさい。

(1) $y = \log_2 x$

x	...	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...
y										

(2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

x	...	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...
y										



< 関数のグラフ >

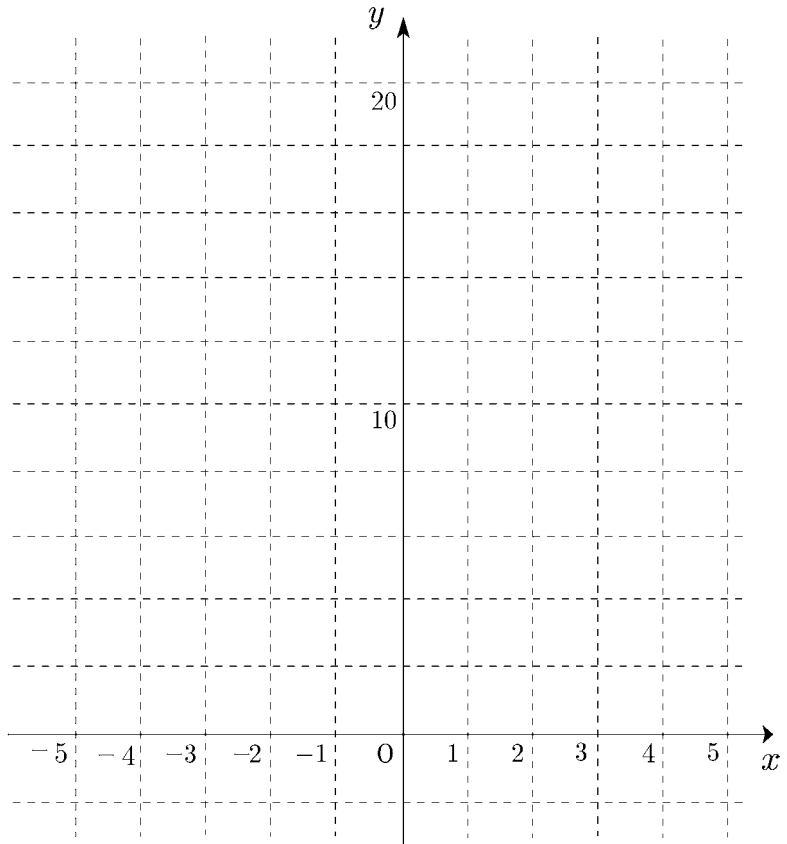
問 1 次の関数のグラフを同じ座標平面上にかけ。

1. $y = x^2$

2. $y = x$

3. $y = 2^x$

4. $y = 2^{-x}$



問 2 1. $y = x$ と $y = x^2$ の交点の座標を求めよ。

2. $x \geq 0$ のとき、 $y = x^2$ と $y = 2^x$ の交点の座標を求めよ。

3. $x \leq 0$ のとき、 $y = x^2$ と $y = 2^{-x}$ の交点の座標を求めよ。

< 指数関数と対数関数の比較 >

指数関数 $y = 2^x$

対数関数 $y = \log_2 x$

1. 定義

$$a^p = M$$

\iff

$$p = \log_a M$$

真数 $M > 0$

底 $a > 0, a \neq 1$

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1$$

2. 指数法則

① $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

\iff

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

② $a^m \div a^n = a^{m-n}$

\iff

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

③ $(a^m)^n = a^{mn}$

\iff

$$\log_a M^k = k \log_a M$$

④ $(ab)^n = a^n b^n$

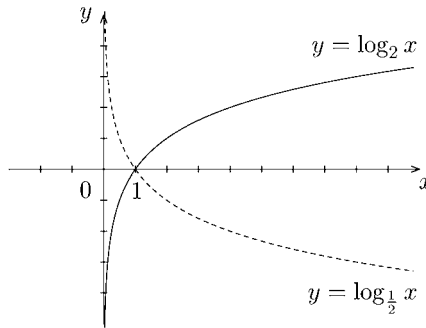
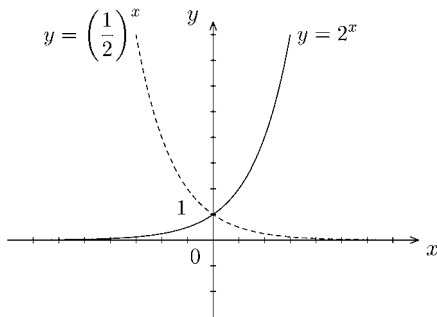
$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (\text{底の変換の公式})$$

(条件. $a > 0, b > 0, m, n$ は有理数)

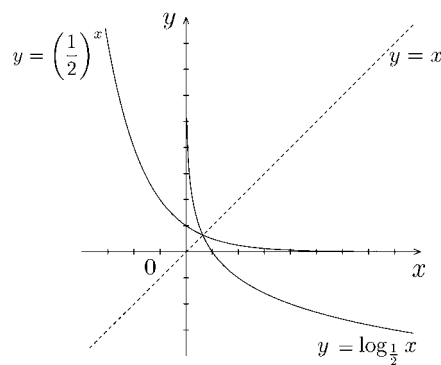
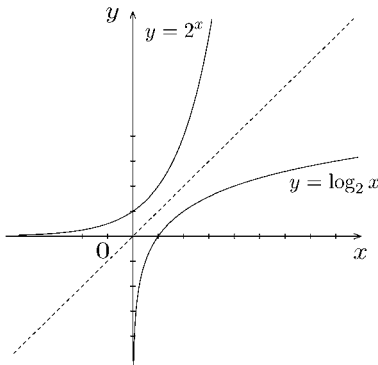
(条件. $a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0, k$ は実数)

$b > 0, b \neq 1, c > 0, c \neq 1,$

3. グラフ



4. グラフ



5. わかったことを書きなさい。

1.

2.

< 指数・対数の練習 A >

1. 次の計算をせよ。

(1) $a^5 \times a^{-3}$ (2) $(a^{-3})^2$ (3) $(a^2b^{-1})^2$ (4) $(ab^{-2})^{-2}$

(5) $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a^2}$ (6) $a^2 \div a^{-3}$ (7) $a^{-\frac{1}{2}} \times a^{\frac{5}{6}} \div a^{\frac{1}{3}}$

2. 次の値を求めよ。

(1) $\sqrt[3]{125}$ (2) $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9}$ (3) $\sqrt[4]{16}$ (4) $\sqrt[3]{-8}$

(5) $(0.1)^{-1}$ (6) $27^{\frac{2}{3}}$ (7) $3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{3}{2}}$ (8) $\sqrt[4]{25} \times \sqrt[6]{125}$

3. 次の関数のグラフをかけ。

(1) $y = 3^x$ (2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

4. 次の値を計算せよ。

(1) $\log_{10} 1$ (2) $\log_{10} 10$ (3) $\log_{10} 100$ (4) $\log_{10} 0.1$

(5) $\log_{10} \frac{1}{100}$ (6) $\log_2 4$ (7) $\log_6 4 + \log_6 9$ (8) $\log_3 15 - \log_3 5$

(9) $\frac{1}{2} \log_7 49$ (10) $(\log_2 3) \times (\log_3 2)$

5. 次の関数のグラフをかけ。

(1) $y = \log_3 x$ (2) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

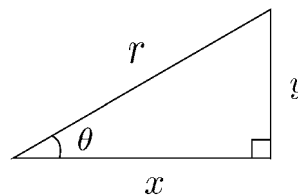
6. 次の方程式を解け。

(1) $2^{x+2} = 16$ (2) $\log_5 x - \log_5 2 = 2$

< 三角比 (1) >

右の図のように、直角三角形の鋭角のひとつを θ とする。

斜辺の長さを r 、他の辺の長さを x, y とするとき、



$$\frac{y}{r}, \quad \frac{x}{r}, \quad \frac{y}{x},$$

の値は、三角形の大きさに関係なく、角 θ の大きさだけで決まる。

これらを、それぞれ θ の

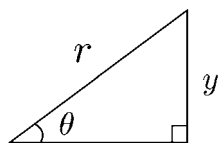
正弦 (sine), 余弦 (cosine), 正接 (tangent)

といい、 $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ と表す。すなわち

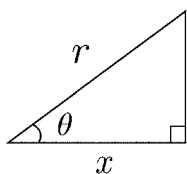
$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

となる。

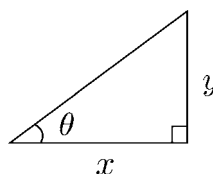
三角比の定義



$$\sin \theta = \frac{y}{r}$$



$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$



$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

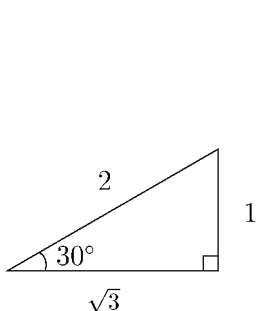
この定義により、辺の長さは、次のように表せる。

$$y = r \sin \theta$$

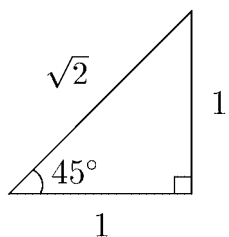
$$x = r \cos \theta$$

$$y = x \tan \theta$$

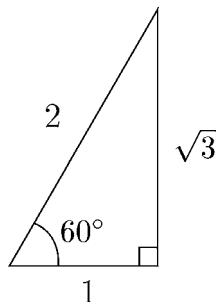
30° , 45° , 60° の三角比は、下の図から求められる。



$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$



$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



$$\tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

問 下の表を完成せよ。

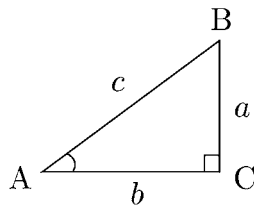
θ	30°	45°	60°
$\sin \theta$			
$\cos \theta$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$\tan \theta$			

< 三角比 (2) >

右の直角三角形 ABC で,

$$a = c \sin A$$

$$b = c \cos A$$



$$\begin{aligned} * \frac{a}{c} &= \sin A \text{ より} \\ a &= c \sin A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \frac{b}{c} &= \cos A \text{ より} \\ b &= c \cos A \end{aligned}$$

であるから,

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{c \sin A}{c \cos A} = \frac{\sin A}{\cos A}$$

となる。したがって,

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \quad (1)$$

また, 三平方の定理から,

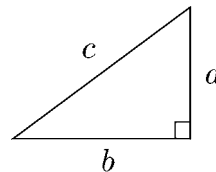
$$a^2 + b^2 = c^2$$

* 三平方の定理

うえの式に, $a = c \sin A$ と, $b = c \cos A$ を代入して

$$(c \sin A)^2 + (c \cos A)^2 = c^2$$

$$c^2(\sin A)^2 + c^2(\cos A)^2 = c^2$$



$$a^2 + b^2 = c^2$$

両辺を, c^2 で割ると

$$(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1$$

$(\sin A)^2 = \sin^2 A$, $(\cos A)^2 = \cos^2 A$ と表すと, 次の式が成り立つ。

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \quad (2)$$

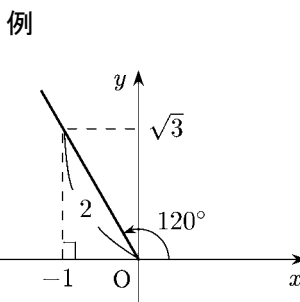
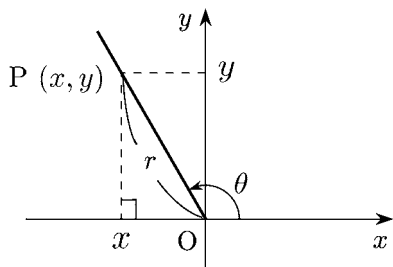
(1), (2) の式を使うと, $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$ のうち, どれかひとつがわかると残りのふたつの値を求めることができる。

問 $\sin A = \frac{2}{3}$ のとき, $\cos A$, $\tan A$ の値を求めよ。

< 三角比と座標 >

$0^\circ \sim 360^\circ$ まで角の範囲を拡張して、その三角比を座標を用いて表してみよう。

下の図のように原点 O から、 x 軸の正の部分 ($x \geq 0$) となす角が θ の半直線を引き、その上に、 $OP = r$ となる点 $P = (x, y)$ をとる。



$$* \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$* \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$* \tan 120^\circ = -\sqrt{3}$$

このとき、三角比を次のように定義する。

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \quad \cos \theta = \frac{x}{r} \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

問 次の表を完成せよ。

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \theta$									
$\cos \theta$			$\frac{\sqrt{2}}{2}$						
$\tan \theta$					X				

θ	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin \theta$								
$\cos \theta$								
$\tan \theta$				X				

< 三角関数のグラフ (1) >

$y = \sin \theta$ のグラフ

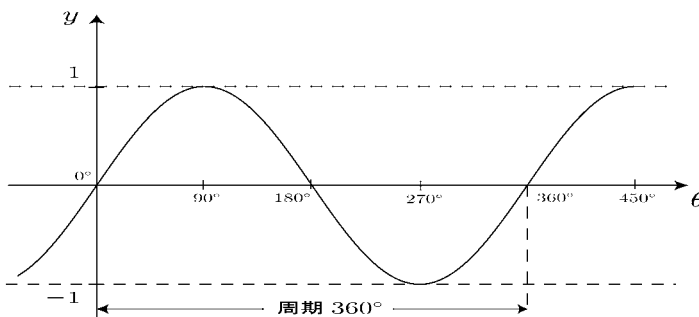
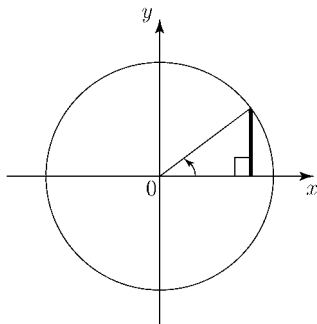
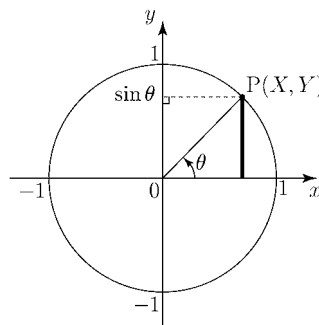
原点を中心とする半径 1 の円を単位円という。

単位円上の点 P の座標は $(\cos \theta, \sin \theta)$ である。

すなわち、点 P の y 座標が $\sin \theta$ であるから

$$y = \sin \theta$$

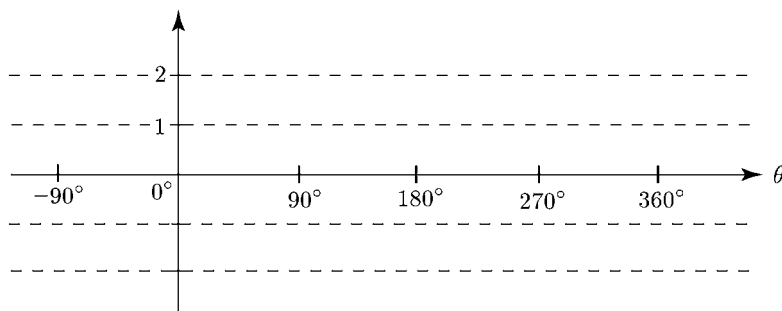
のグラフは、次のようになる。



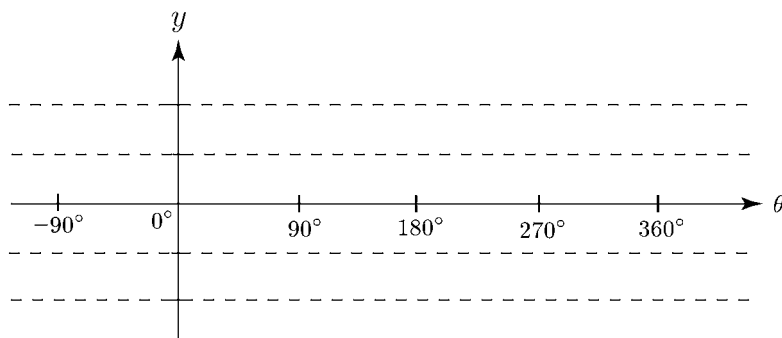
$y = \sin \theta$ のグラフは、 360° ごとに同じ形となっている。

このことを、 $y = \sin \theta$ は 360° を周期とする周期関数であるという。

問 1 $y = 2 \sin \theta$ のグラフをかけ。



問 2 $y = \sin 2\theta$ のグラフをかけ。

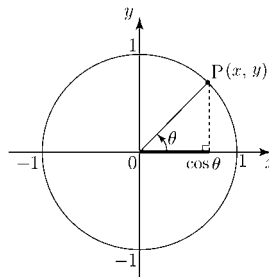


< 三角関数のグラフ (2) >

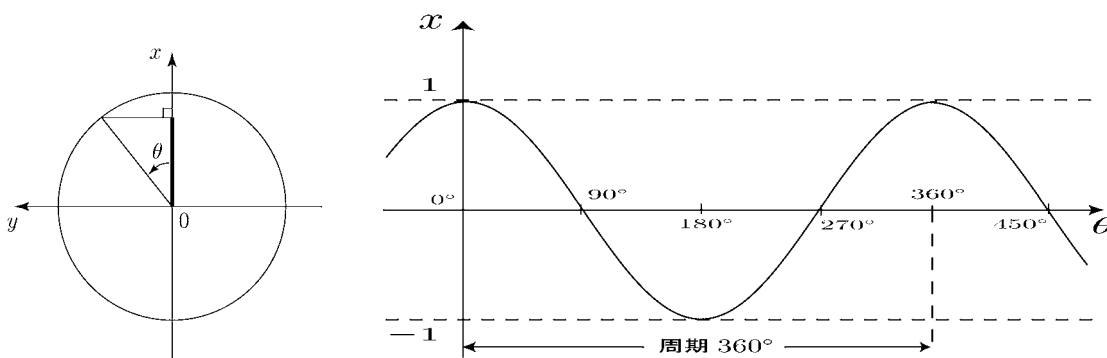
$y = \cos \theta$ のグラフ

$y = \sin \theta$ のグラフと同様に考えると、点 P の x 座標は $\cos \theta$ であるから

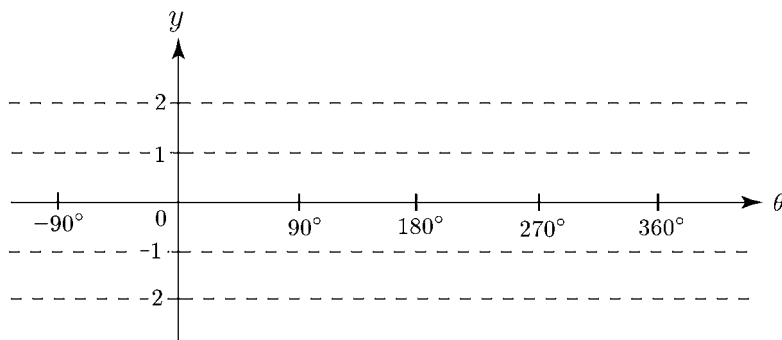
$$x = \cos \theta$$



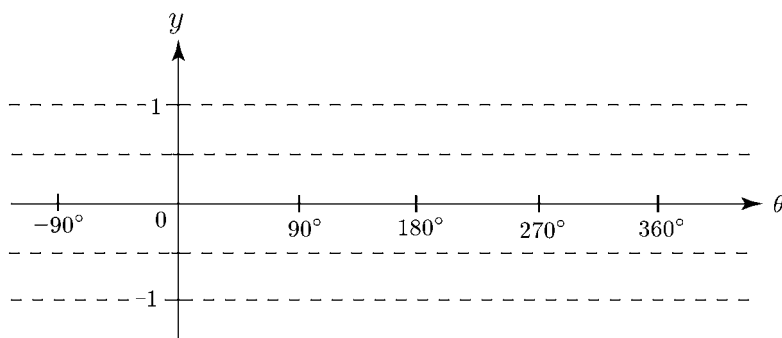
のグラフは、次のようになる。



問 1 $y = 2 \cos \theta$ のグラフをかけ。



問 2 $y = \cos \frac{1}{2} \theta$ のグラフをかけ。

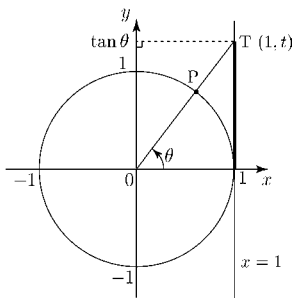


< 三角関数のグラフ (3) >

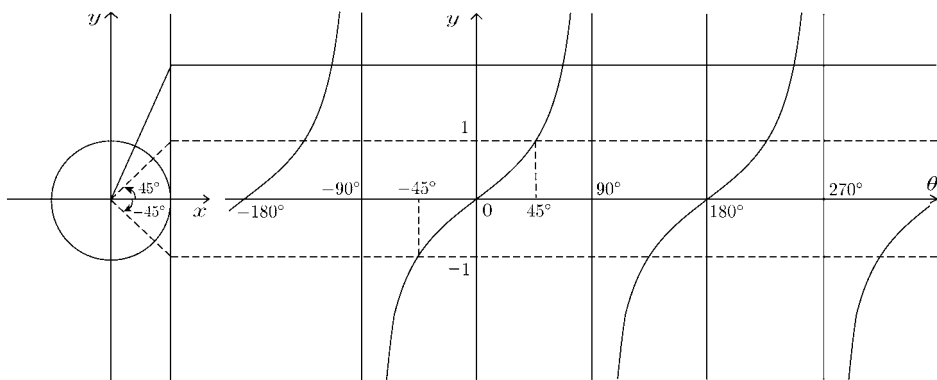
$y = \tan \theta$ のグラフ

右の図で、直線 OP と
直線 $x = 1$ の交点を $T(1, t)$
とすると、

$$\tan \theta = \frac{t}{1} = t$$



となって、点 T の y 座標が $\tan \theta$ に等しくなる。
これを利用して、 $y = \tan \theta$ のグラフをかく。



- * $y = \tan \theta$ は 180° を周期とする周期関数である。
- * $\theta = -90^\circ, \theta = 90^\circ, \theta = 270^\circ$ などの直線は、
 $y = \tan \theta$ のグラフの漸近線となっている。

問 漸近線をもつ関数を 2 つあげよ。そして、それを図示せよ。

< 三角比の公式 (1) >

右の図から

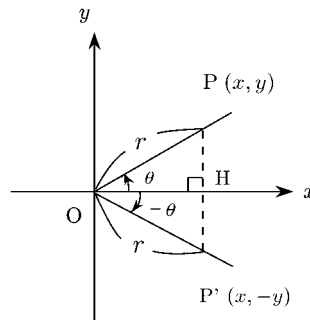
$$\sin(-\theta) = \frac{-y}{r} = -\frac{y}{r} = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \frac{x}{r} = \cos \theta$$

となるから

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$



である。

同様にして

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$

$$\sin(-45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

まとめると

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$

問 $\tan(-45^\circ)$, $\tan(-60^\circ)$ を求めよ。

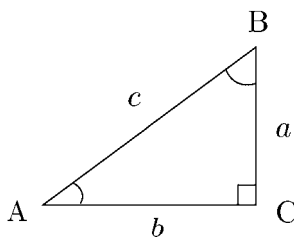
< 三角比の公式 (2) >

右の図の直角三角形において

$$\cos B = \frac{a}{c} = \sin A = \sin(90^\circ - B)$$

より

$$\sin(90^\circ - B) = \cos B$$



さらに

$$\sin B = \frac{b}{c} = \cos A = \cos(90^\circ - B)$$

より

$$\cos(90^\circ - B) = \sin B$$

例 $\sin 75^\circ = \sin(90^\circ - 15^\circ) = \cos 15^\circ$
 $\cos 65^\circ = \cos(90^\circ - 25^\circ) = \sin 25^\circ$ * sin と cos が入れ替わる

また、右図のように P, P', Q, Q' をきめると

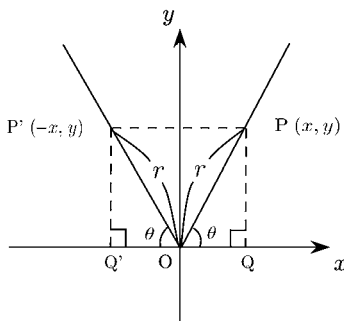
$\triangle OPQ$ と $\triangle OP'Q'$ が合同

になるから

$$\sin(180^\circ - \theta) = \frac{y}{r} = \sin \theta$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = \frac{-x}{r} = -\frac{x}{r} = -\cos \theta$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = \frac{y}{-x} = -\frac{y}{x} = -\tan \theta$$



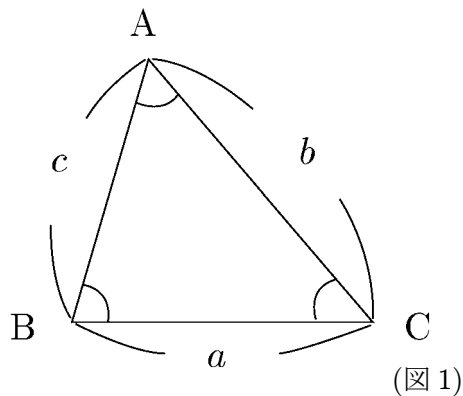
まとめると

$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$	$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$
$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$	$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$
	$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$

問 $\tan(90^\circ - \theta)$ のとき、どうなるか答えよ。

< 正弦定理・余弦定理 >

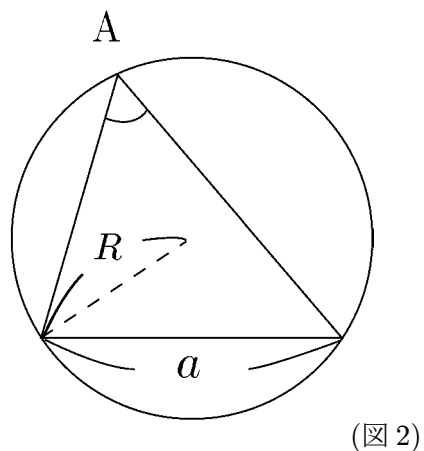
三角形の3頂点 A,B,C の内角を A, B, C (斜体大文字) で表し, 向いあう辺の長さを a, b, c (斜体小文字) で表す。(図1)



< 正弦定理 >

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \boxed{}$$

問1 正弦定理の $\boxed{}$ 内にはいる式を外接円の半径 R を用いて表せ。

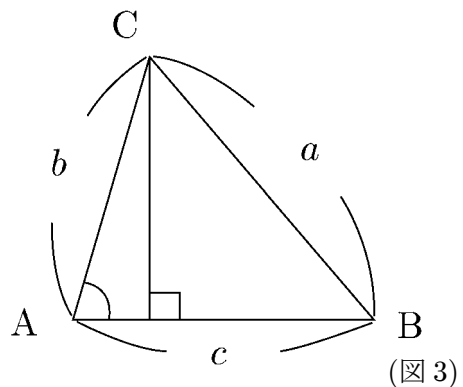


< 余弦定理 >

問2 $\triangle ABC$ が図3のような場合に余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

を導け。

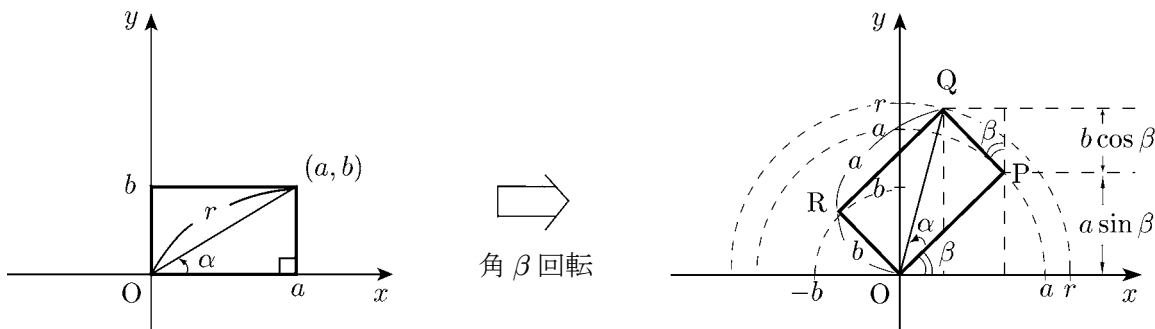


問3 b^2 を a, c と B で表せ。

問4 c^2 を a, b と C で表せ。

問5 余弦定理から三平方の定理を導け。

< 加法定理 >



左図の長方形を原点を中心として角度 β だけ回転し、右図のように長方形 $OPQR$ を描く。このとき点 Q の y 座標は、 $r \sin(\alpha + \beta)$ と書けるし、 $a \sin \beta + b \cos \beta$ と書けるので

$$r \sin(\alpha + \beta) = b \cos \beta + a \sin \beta \quad \dots \quad (1)$$

となる。ここで $a = r \cos \alpha$, $b = r \sin \alpha$ だから (1) の両辺を r で割ると、サインの加法定理

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

が得られる。

問 1 右上図点 Q の x 座標を 2 通りに表示することによって、コサインの加法定理

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

を導け。

さらに $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$, $\sin(-\theta) = -\sin \theta$, $\cos(-\theta) = \cos \theta$

を利用すると、 $\tan(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha - \beta)$, $\cos(\alpha - \beta)$, $\tan(\alpha - \beta)$ の加法定理が得られる。以上をまとめると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & , & & \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta & , & & \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} & , & & \tan(\alpha - \beta) &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \end{aligned}$$

問 2 加法定理を用いて次式を導け。

(1) $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

(2) $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

(3) $\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

(4) $\frac{\sin(2\alpha)}{1 + \cos(2\alpha)} = \tan \alpha$

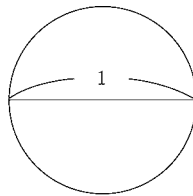
< π の話 >

π の定義 (π とは?)

* 直径 1 の円周の長さを π と定義する。

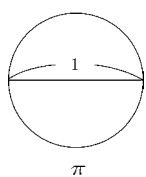
* (円周の長さ) ÷ (直径の長さ) = π

* $\frac{\text{円周の長さ}}{\text{直径の長さ}} = \pi$

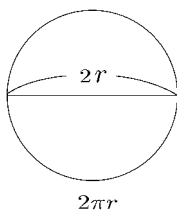


① 半径 r の円周の長さ l は

$$l = 2\pi r$$

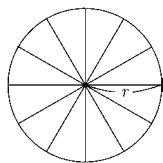


← 相似 →
≅

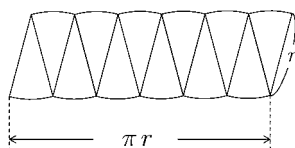


② 円の面積 S_1 は

$$S_1 = \pi r^2$$

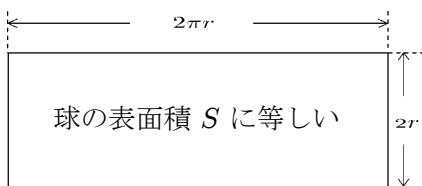
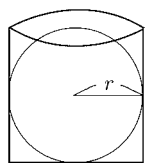


≅



③ 球の表面積 S_2 は

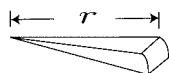
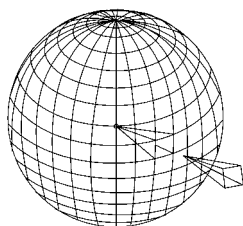
$$S_2 = 4\pi r^2$$



$$S = 2\pi r \times 2r = 4\pi r^2$$

④ 球の体積 V は

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$



の面積は $\frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times r$

であるから

$$V = \frac{1}{3} \times 4\pi r^2 \times r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

⑤ 参考式

$$S_1 = \int_0^r 2\pi x dx$$

$$V = \int_0^r S_2 dx = \int_0^r 4\pi x^2 dx$$

< 弧度法 (1) >

① 三角比

今まで、角の大きさを表すときに、直角の $\frac{1}{90}$ の角の大きさを 1 度として用いてきた。
すなわち

$$\text{直角の } \frac{1}{90} \text{ を 1 度, } 1 \text{ 度の } \frac{1}{60} \text{ を 1 分, } 1 \text{ 分の } \frac{1}{60} \text{ を 1 秒}$$

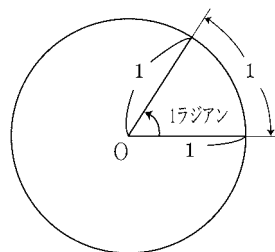
このような表し方を **度数法** という。

これに対して、これからは角の大きさの新しい表し方として、**弧度法** を考える。

右図のように、半径 1 の円の弧の長さが 1 のとき、

その角の大きさを

1 ラジアン (radian)



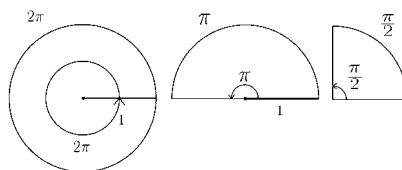
ときめる。

したがって、半径 1 の円周の長さは、 2π であるから

$$2\pi \text{ (ラジアン)} = 360^\circ$$

$$\pi \text{ (ラジアン)} = 180^\circ$$

$$1 \text{ (ラジアン)} = \frac{180^\circ}{\pi}$$



となる。

問 1 次の表を完成させよ。

度数法	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	180°	225°	270°	360°
弧度法											

問 2 次の値を求めよ。

(1) $\sin \frac{\pi}{6}$

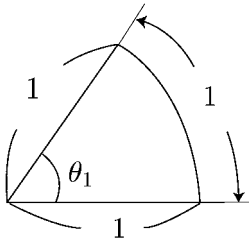
(2) $\cos \frac{\pi}{3}$

(3) $\tan \frac{\pi}{4}$

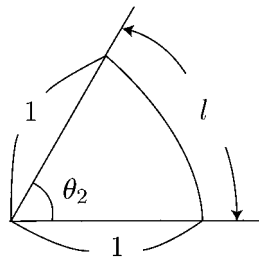
(4) $\sin \frac{\pi}{2}$

< 弧度法 (2) >

① 角の大きさ

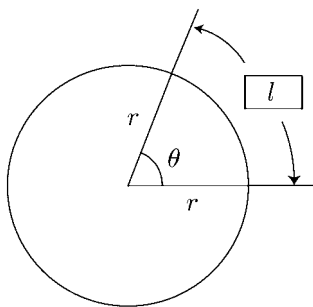


$$\theta_1 = 1 \text{ ラジアン}$$



$$\theta_2 = l \text{ ラジアン}$$

② 弧の長さ



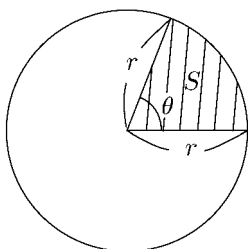
$$2\pi r : l = 2\pi : \theta \text{ より}$$

$$2\pi l = 2\pi r \theta$$

$$\boxed{l = r\theta}$$

③ 面積

扇形の面積を S とする



$$\pi r^2 : S = 2\pi : \theta$$

$$2\pi S = \pi r^2 \theta$$

$$\boxed{S = \frac{1}{2} r^2 \theta}$$

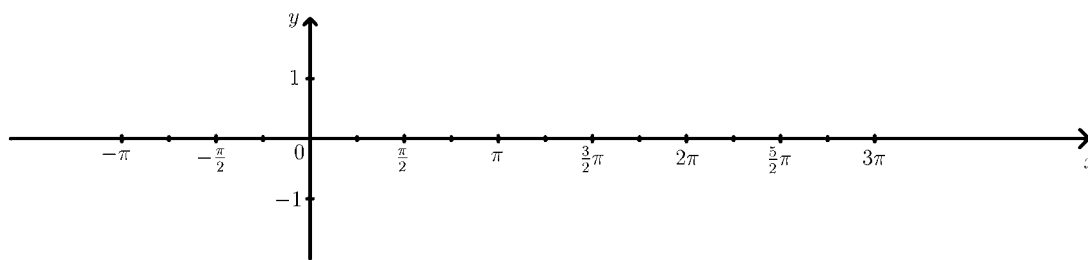
問 なぜ角の大きさを表すときに、度数法と弧度法という2つの方法があると思いますか。

< 弧度法 (3) >

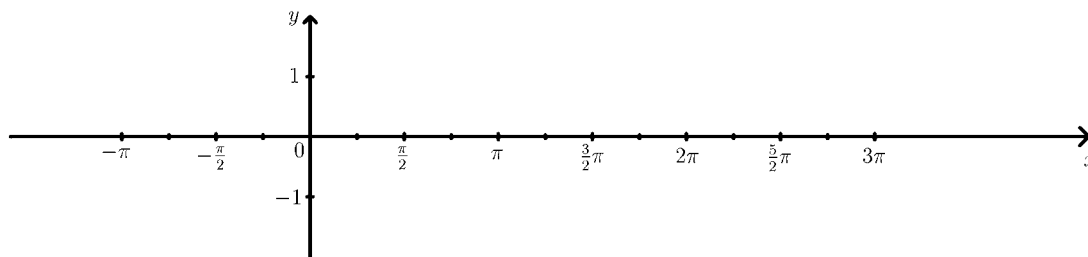
問 表を完成し、 $y = \sin x$ と $y = \cos x$ および $y = \tan x$ のグラフを書け。

x	度数法	-180°			-45°	0°		90°				270°	315°		405°		495°	
	弧度法		$-\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{\pi}{2}$			$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$			2π		$\frac{5}{2}\pi$		3π
$\sin x$																		
$\cos x$																		

(1) $y = \sin x$

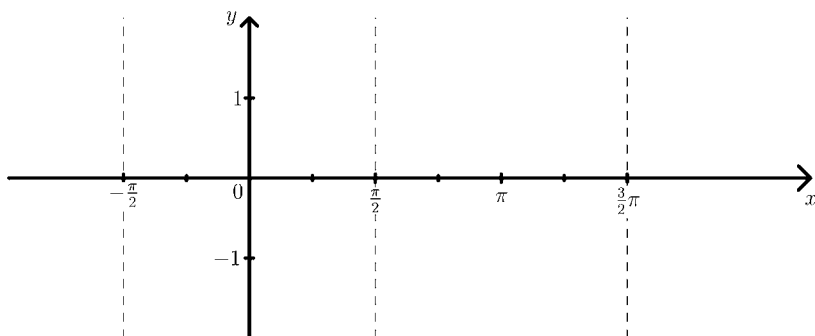


(2) $y = \cos x$



x	度数法	-90°			-30°	0°	30°		60°		120°			180°		225°	240°		
	弧度法		$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$				$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$		$\frac{7}{6}\pi$			$\frac{3}{2}\pi$	
$\tan x$		\times								\times									\times

(3) $y = \tan x$



< 三角関数の合成 >

$a \sin \theta + b \cos \theta$ を $r \sin(\theta + \alpha)$ に変形する

例 加法定理を用いて, $\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta$ を $r \sin(\theta + \alpha)$ の形に変形してみよう。

$\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta = r \sin(\theta + \alpha)$ とおいて r, α を求める

① 計算力で求める

$$\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta = r \sin(\theta + \alpha) \text{ とおくと,}$$

$$\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta = r \sin \theta \cos \alpha + r \cos \theta \sin \alpha$$

左辺と右辺を比較して

$$\begin{cases} \sqrt{3} = r \cos \alpha \\ 1 = r \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = r^2 \cos^2 \alpha \cdots (1) \\ 1 = r^2 \sin^2 \alpha \cdots (2) \end{cases}$$

(1) + (2) より

$$3 + 1 = r^2, r = 2, (r > 0)$$

また,

$$\sqrt{3} = 2 \cos \alpha, \alpha = 30^\circ$$

であるから

$$\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta = 2 \sin(\theta + 30^\circ)$$

② 暗記力で求める

$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha) \text{ とおき,}$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

を覚える

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$$

より

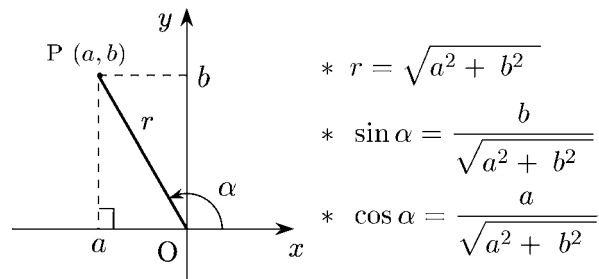
$$\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta \right)$$

$$= 2(\cos 30^\circ \sin \theta + \sin 30^\circ \cos \theta)$$

したがって,

$$\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta = 2 \sin(\theta + 30^\circ)$$

参照図



①の方法は、長期間忘れない。

②の方法は、テスト前には有効である。

なお、この $2 \sin(\theta + 30^\circ)$ のグラフは、 $y = 2 \sin \theta$ のグラフを θ 軸方向に -30° だけ平行移動したものである。

問 (1) と (2) は ①の方法, (3) は ②の方法で $r \sin(\theta + \alpha)$ に変形せよ。

(1) $\sin \theta + \cos \theta$

(2) $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta$

(3) $-\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$

< 三角関数の練習問題 >

1. 次の θ について $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値をそれぞれ求めよ。

$$(1) \theta = \frac{2}{3}\pi \qquad (2) \theta = -\frac{3}{4}\pi$$

2. 次の値を求めよ。

$$(1) \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{3} \cdot \tan \frac{\pi}{4} \qquad (2) \cos \frac{\pi}{6} \cdot \sin \left(-\frac{\pi}{3}\right) \cdot \tan \frac{4}{3}\pi$$

3. θ は第 1 象限の角 ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) $\sin \theta = \frac{1}{5}$ である。 $\cos \theta$ と $\tan \theta$ の値を求めよ。

4. 次の方程式を解け。ただし ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) とする。

$$(1) \sin \theta = \frac{1}{2} \qquad (2) \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (3) \tan \theta = -\sqrt{3}$$

5. 次の方程式を解け。ただし ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) とする。

$$(1) \sin \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (2) \cos 3\theta = -\frac{1}{2} \qquad (3) \tan 2\theta = -\sqrt{3}$$

6. 次の値を求めよ。

$$(1) \sin 75^\circ \qquad (2) \cos 165^\circ \qquad (3) \tan 15^\circ$$

7. 加法定理を使って次の式の値を求めよ。

$$(1) \sin \theta + \sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) + \sin\left(\theta + \frac{4}{3}\pi\right)$$

8. 次の式を $r \sin(\theta + \alpha)$ の形に表わせ。ただし r は正, $-\pi < \alpha \leq \pi$ とする。

$$(1) -\sin \theta + \cos \theta \qquad (2) \sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta$$

9. 次の関数のグラフをかけ。

$$(1) y = -\sin x + \cos x \qquad (2) y = \sin x - \sqrt{3} \cos x$$

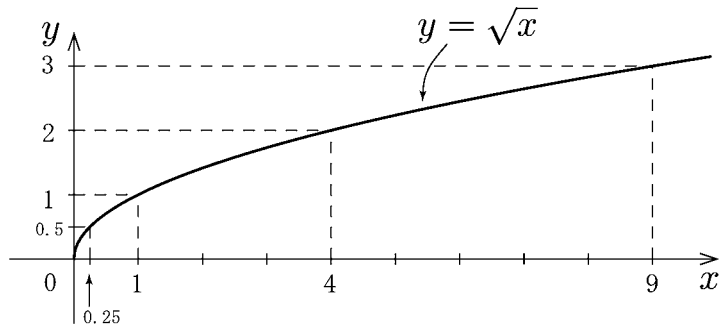
< 無理関数 1 >

$\sqrt{\quad}$ のついた関数を通常無理関数という。

例 1 $y = \sqrt{x}$ のグラフを描きたい。
 $\sqrt{\quad}$ の中は負になってはいけない
 ので x は 0 以上の数を考える。

x と y の対応表

x	0	0.25	1	4	9
y	0	0.5	1	2	3



よりグラフは右図のようになる。無理関数の場合は「 $\sqrt{\quad}$ の中が負になってはいけない」という制限が自動的につく。このような x の範囲 ($x \geq 0$) を**定義域**という。なお $\sqrt{\quad}$ の値は常に 0 以上だから y の範囲は $y \geq 0$ となる。 y の範囲を**値域**という。

例 2 無理関数 $y = \sqrt{x+1}$ を考える。

$\sqrt{\quad}$ の中は 0 以上だから

$$x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$$

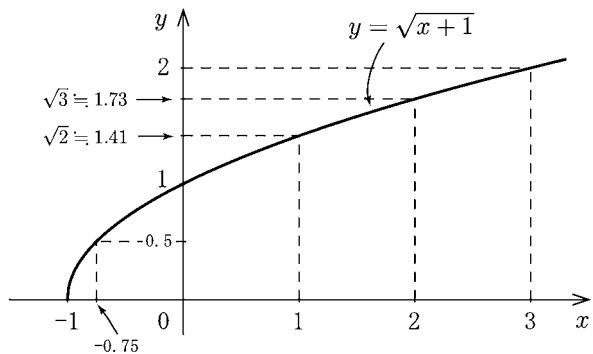
より

定義域: $x \geq -1$

であり、値域は $\sqrt{\quad} \geq 0$ だから

値域: $y \geq 0$

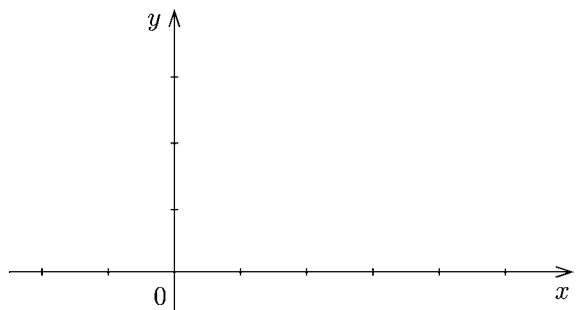
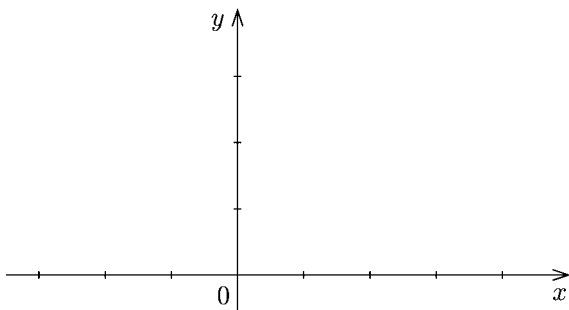
となる。グラフは右図のようになる。



問 以下の無理関数の定義域と値域を求め、グラフを描け。

(1) $y = \sqrt{x+2}$

(2) $y = \sqrt{x-1}$



定義域: _____, 値域: _____

定義域: _____, 値域: _____

< 無理関数 2 >

例 1 無理関数 $y = \sqrt{3-x}$ を考える。

$\sqrt{\quad}$ の中は 0 以上だから

$$3-x \geq 0 \Rightarrow 3 \geq x$$

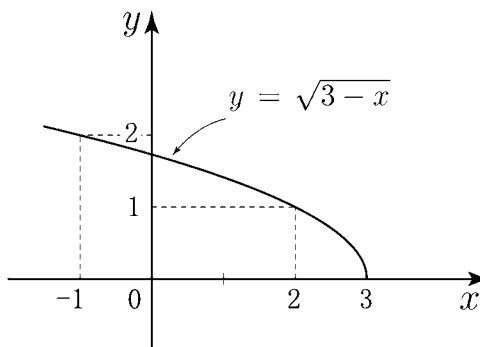
より

$$\boxed{\text{定義域 : } x \leq 3}$$

また $\sqrt{\quad} \geq 0$ より

$$\boxed{\text{値域 : } y \geq 0}$$

である。グラフは右図のようになる。



例 2 無理関数 $y = -\sqrt{x-1}$ を考える。

$\sqrt{\quad}$ の中は 0 以上だから

$$x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

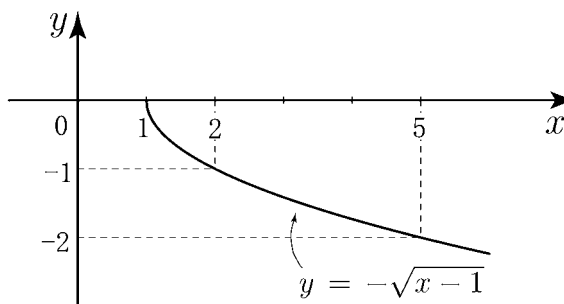
より

$$\boxed{\text{定義域 : } x \geq 1}$$

また $\sqrt{\quad} \geq 0$ より $-\sqrt{\quad} \leq 0$ だから

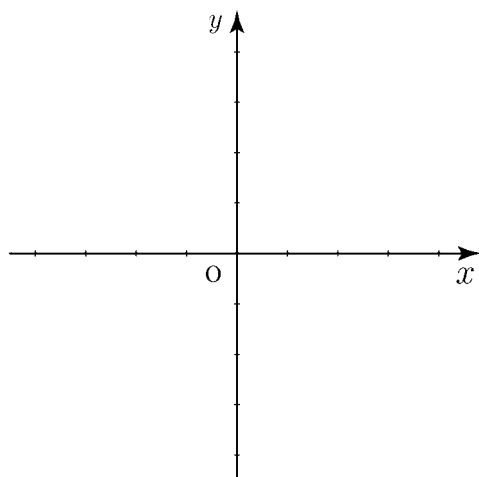
$$\boxed{\text{値域 : } y \leq 0}$$

となる。グラフは右図のようになる。



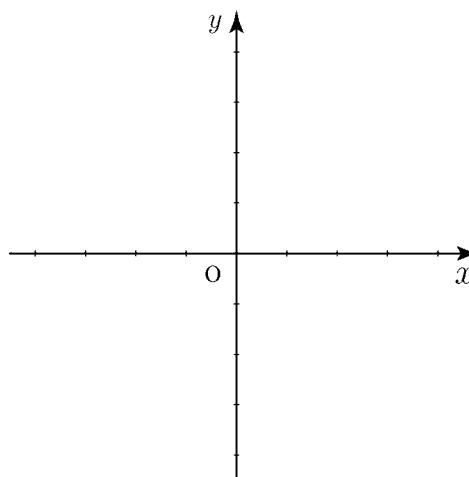
問 以下の無理関数の定義域と値域を求め、グラフを描け。

(1) $y = \sqrt{-x+1}$



定義域： _____ , 値域： _____

(2) $y = -\sqrt{x+2}$



定義域： _____ , 値域： _____

< 分数関数 1 >

例 1 分数関数 $\frac{1}{x}$ を考える。

$x = 0$ のときは分母が 0 になるから定義できない。従って定義域は 0 以外の全ての実数となる。

定義域: $x \neq 0$

$y = \frac{1}{x}$ を変形すると

$$xy = 1$$

より y は 0 にはならない。結局

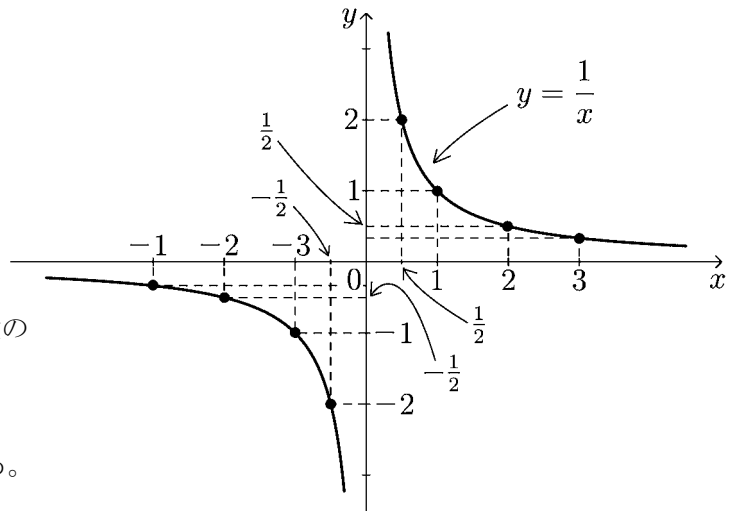
$$y = \frac{1}{x} \neq 0$$

となり、 y は 0 以外のすべての実数の値を取る。

値域: $y \neq 0$

となり、グラフは右図のようになる。

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	X	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$



例 2 分数関数 $y = \frac{1}{x-2}$ を考える。

分母が 0 になってはならないので $x - 2 \neq 0$ より

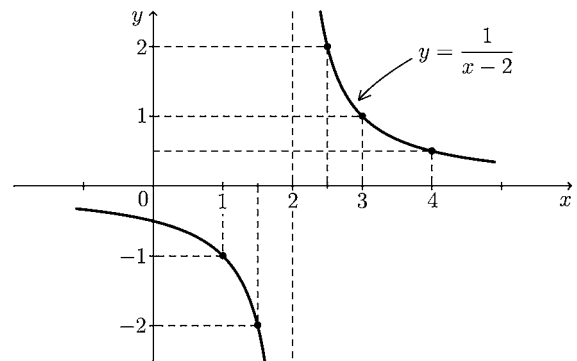
定義域: $x \neq 2$

となり、値域は上と同様に

値域: $y \neq 0$

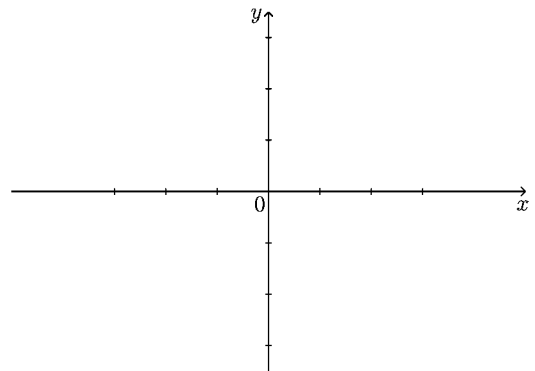
であり、グラフは右図のようになる。

このグラフは $y = \frac{1}{x}$ のグラフを x 軸方向に +2 だけ平行移動したものである。



問 分数関数 $y = \frac{1}{x+1}$ の定義域と値域を求め、右にグラフを描け。

定義域: _____, 値域: _____



< 分数関数 2 >

例 分数関数 $y = 3 + \frac{1}{x-2}$ を考える。

定義域は分母 $\neq 0$ より

$$\boxed{\text{定義域 : } x \neq 2}$$

である。一方逆数 $\frac{1}{\square} \neq 0$ より

$$y - 3 = \frac{1}{x-2} \neq 0$$

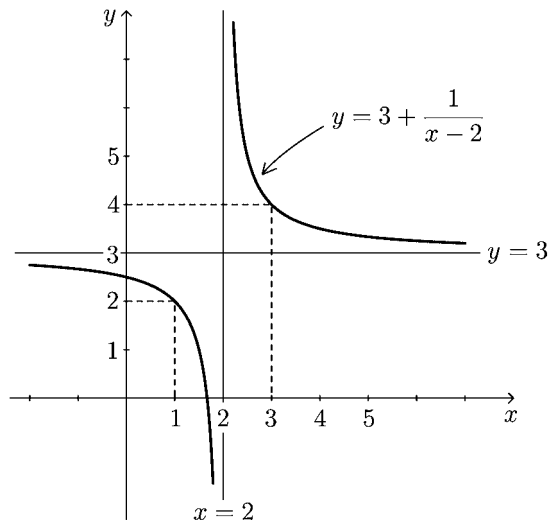
であるから $y - 3 \neq 0$ より

$$\boxed{\text{値域 : } y \neq 3}$$

となる。このグラフは右図の

ように $y = \frac{1}{x}$ のグラフを x 軸

方向に $+2$, y 軸方向に $+3$ だけ
平行移動したものである。



このグラフは x の値が 2 に近づくほど直線 $x = 2$ に近づき, x の値が 2 から遠ざかるほど直線 $y = 3$ に近づく。

この 2 直線 $x = 2$, $y = 3$ を分数関数 $y = 3 + \frac{1}{x-2}$ の ゼンキンセン 漸近線 という。

問 分数関数 $y = 2 + \frac{1}{x+1}$

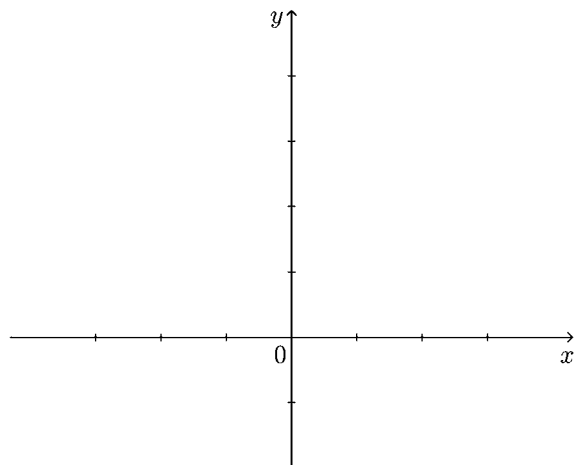
定義域と値域および漸近線を求め, 右にそのグラフを描け。

(漸近線のグラフも描く。)

定義域 : _____

値域 : _____

漸近線 : $x =$ _____ , $y =$ _____

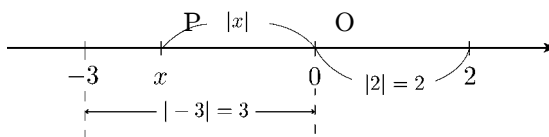


< 絶対値 >

実数 x の数直線上の位置を点 P とする。
 原点 O からの距離 OP を x の絶対値といい、

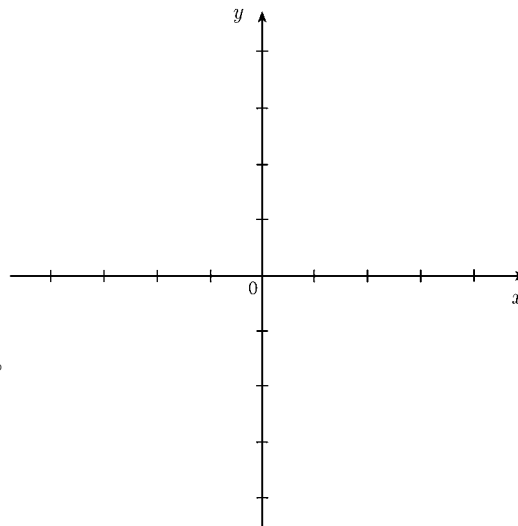
$$OP = |x|$$

と表す。例えば $|2| = 2$, $|-3| = 3$ である。



問 1 表を完成し、 $y = |x|$ のグラフを描け。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$ x $							



問 2 次の文章の の中に適当な文字式を入れよ。

「 $y = |x|$ のグラフは

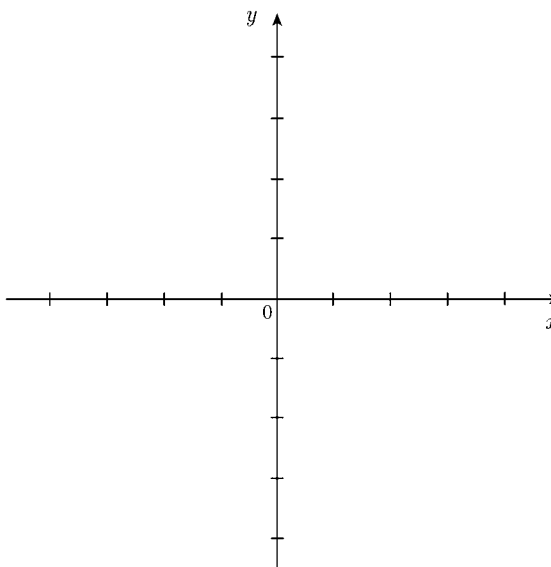
$x \geq 0$ の範囲では直線 $y =$ であり、

$x < 0$ の範囲では直線 $y =$ である。」

問 3 $x < 0$ のとき $|x|$ を x を用いて表せ。

問 4 次の関数のグラフを描け。

$$y = \frac{|x|}{x} \quad (x \neq 0)$$



< ガウス記号 >

実数 x に対して、 x を超えない最大の整数を n とすると

$$n \leq x < n + 1, \quad n \text{ は整数}$$

の関係がある。この整数 n は x によって決まるので

$$n = [x]$$

と表す。この記号 $[x]$ を **ガウス記号** という。

例	$[1.5] = 1,$	$[2.76] = 2$
	$[3.024] = 3,$	$[4.8196] = 4$
	$[0.135] = 0,$	$[-0.52] = -1$
	$[-1.23] = -2,$	$[-2.746] = -3$

問1 次の値を求めよ。

(1) $[1.23] =$ (2) $[9.87] =$ (3) $[0.9999] =$

(4) $[-0.1] =$ (5) $[-3.69] =$ (6) $[-9.5] =$

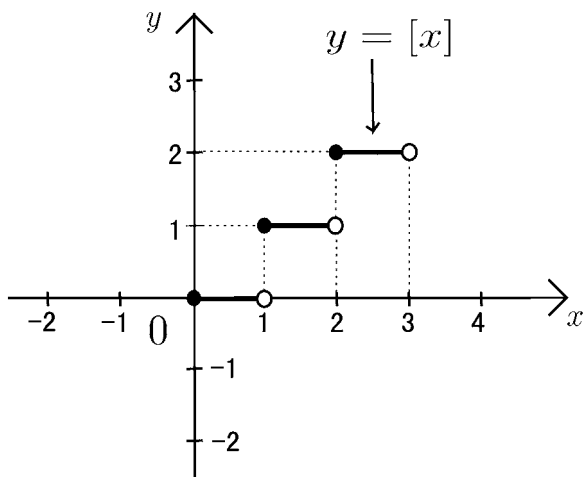
問2 関数 $f(x) = [x]$ のグラフを描きたい。

$$0 \leq x < 1 \text{ のとき } [x] = 0$$

$$1 \leq x < 2 \text{ のとき } [x] = 1$$

$$2 \leq x < 3 \text{ のとき } [x] = 2$$

だから $0 \leq x < 3$ の範囲では、 $y = [x]$ のグラフは右図のようになる。このグラフを $-2 \leq x < 4$ の範囲まで拡張せよ。

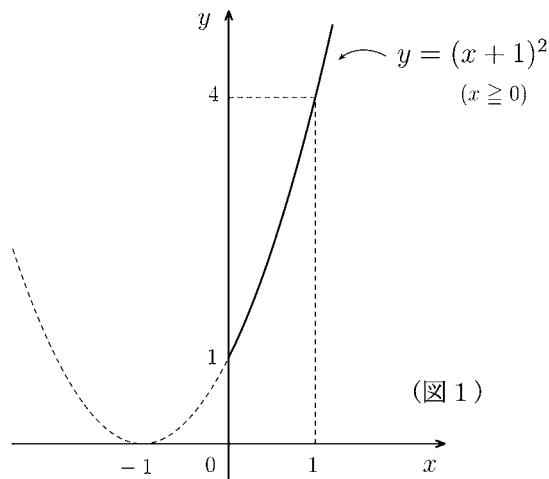


< 定義域の制限 >

関数の通常定義域をさらに制限する場合がある。
 そのような場合の定義域に対応する値域を考える。

例 1 $y = (x + 1)^2$ の通常定義域は実数全体
 であり、値域は $y \geq 0$ である。

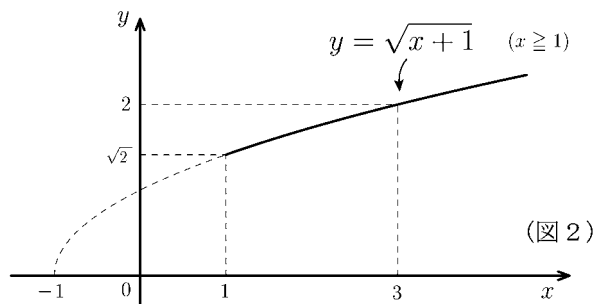
例 2 $y = (x + 1)^2$ の定義域を $x \geq 0$ に制限する
 場合の値域は $y \geq 1$ である。(図 1)



(図 1)

例 3 $y = \sqrt{x + 1}$ の通常定義域は $x \geq -1$ で
 あり値域は $y \geq 0$ である。

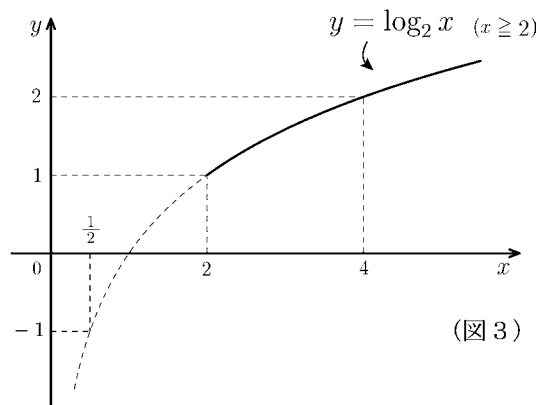
例 4 $y = \sqrt{x + 1}$ の定義域を $x \geq 1$ に制限する
 場合の値域は $y \geq \sqrt{2}$ である。(図 2)



(図 2)

例 5 $y = \log_2 x$ の通常定義域は $x > 0$ で
 あり値域は実数全体である。

例 6 $y = \log_2 x$ の定義域を $x \geq 2$ に制限する
 場合の値域は $y \geq 1$ である(図 3)



(図 3)

問 次の関数の () 内の定義域に対応する値域を求めよ。

(1) $y = (x - 1)^2$ ($x \geq 2$)

(2) $y = \sqrt{x + 3}$ ($x \geq 1$)

(3) $y = \log_3 x$ ($x \geq 1$)

(4) $y = 2^x$ ($x \geq 0$)

(5) $y = \sin x$ $\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$

(6) $y = \cos x$ $\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}\right)$

< 単調関数 >

図 1 のように関数 $f(x)$ の定義域内の任意の 2 点 x_1, x_2 に対し,

$$x_1 < x_2 \quad \text{ならば} \quad f(x_1) < f(x_2)$$

が常に成り立つとき、 $f(x)$ は定義域内で**単調増加**という。

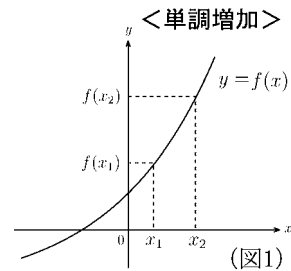
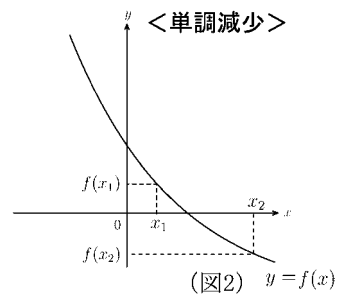


図 2 のように関数 $f(x)$ の定義域内の任意の 2 点 x_1, x_2 に対し,

$$x_1 < x_2 \quad \text{ならば} \quad f(x_1) > f(x_2)$$

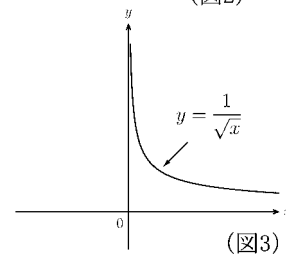
が常に成り立つとき、 $f(x)$ は定義域内で**単調減少**という。

単調増加関数および単調減少関数をまとめて**単調関数**という。



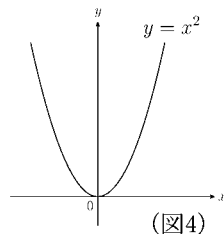
例 1 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ の定義域は $x > 0$ である。

図 3 より定義域内で単調減少である。

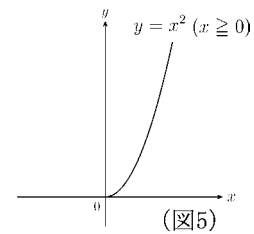


例 2 $f(x) = x^2$ の定義域は実数全体である。

図 4 より単調関数ではない。



例 3 $f(x) = x^2$ ($x \geq 0$) は $y = x^2$ の定義域を $x \geq 0$ に制限した関数である。図 5 より定義域 ($x \geq 0$) 内で単調増加である。



問 次の関数が単調関数かどうか判断せよ。もし単調関数であれば、単調増加か単調減少かを明記せよ。ただし () 内は定義域である。

(1) $y = 3x - 2$

(2) $y = |x|$

(3) $y = -(x - 1)^2 \quad (x \geq 2)$

(4) $y = [x]$

(5) $y = \sin x$

(6) $y = \sin x \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$

< 逆関数 1 >

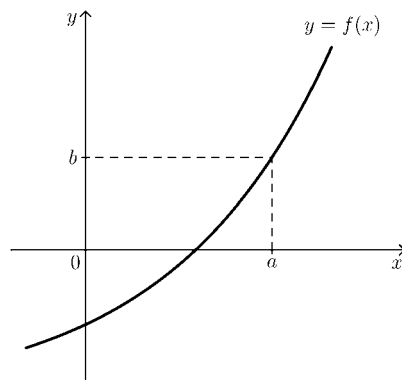
関数 $f(x)$ が単調関数であるとき、 y の値 b に対して、

$$\boxed{b = f(a)}$$

となるような x の値 a がただ 1 つ定まる。このとき

$$\boxed{a = f^{-1}(b)}$$

と書く。



例 $\boxed{f(x) = 2x - 1}$ のとき、

関数 $y = f(x)$ は単調関数である。

$$b = f(a)$$

とおくと、 $f(a) = 2a - 1$ より

$$b = 2a - 1$$

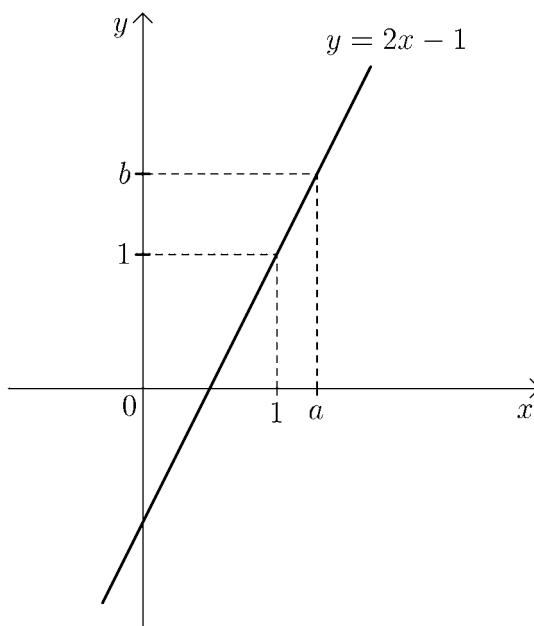
である。これを a について解くと

$$a = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}$$

となる。 $a = f^{-1}(b)$ であるから

$$\boxed{f^{-1}(b) = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}}$$

となる。



問 $f(x)$ が以下の場合に、関数 $y = f(x)$ はすべて定義域内で単調関数である。

このとき $f^{-1}(b)$ を b に関する式で表せ。

(1) $f(x) = 3x - 2$

(2) $f(x) = \frac{1}{x} + 2 \quad (x > 0)$

(3) $f(x) = \sqrt{x} \quad (x \geq 0)$

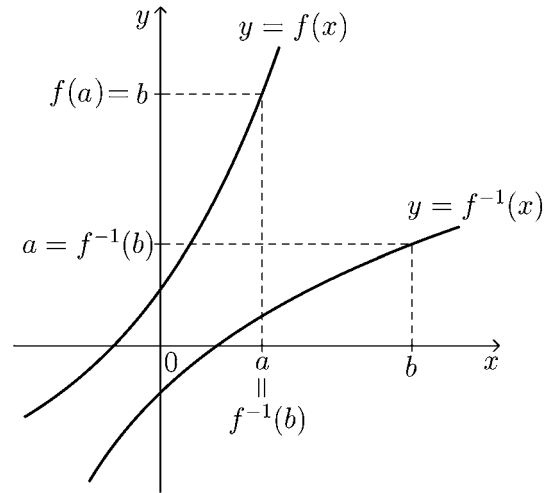
(解)

(解)

(解)

< 逆関数 2 >

関数 $y = f(x)$ が単調関数のとき、 y の値 b に x の値 $f^{-1}(b)$ を対応させる関係は関数と考えられる。この関数を $y = f^{-1}(x)$ と表して、関数 $y = f(x)$ の**逆関数**という。



例 $f(x) = 2x + 1$ の逆関数を求める。

$$b = f(a) \iff a = f^{-1}(b)$$

より

$$b = 2a + 1 \iff a = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2} = f^{-1}(b)$$

だから逆関数は

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

である。

(注) 次のようにして逆関数を求めてよい。

$$\text{元の関数 : } y = 2x + 1$$

↓ < x について解く >

$$x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$$

↓ < x と y を入れ替える >

$$\text{逆関数 : } y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$\text{よって (答) } \underline{f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}$$

問 $f(x)$ が以下の場合に、逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

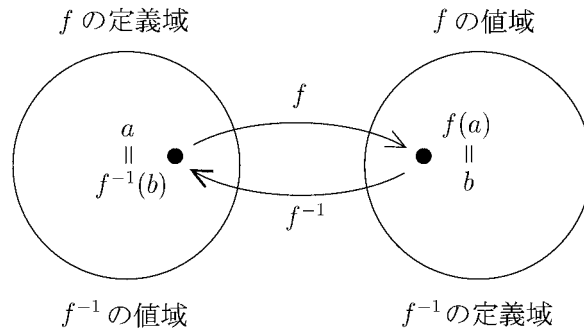
(1) $f(x) = 3x + 2$

(2) $f(x) = \frac{1}{x-1} \quad (x > 1)$

(3) $f(x) = \sqrt[3]{x} \quad (x \geq 0)$

< 逆関数 3 >

関数 $y = f(x)$ が単調であるとき、関数 f の値域は逆関数 f^{-1} の定義域であり、関数 f の定義域は逆関数 f^{-1} の値域になっている。



例 $f(x) = x^2 + 1$ のとき、 f の定義域を $x \geq 0$ に制限すれば $y = f(x)$ は単調増加である。この逆関数を以下のようにして求める。

$$b = f(a) \iff a = f^{-1}(b)$$

より

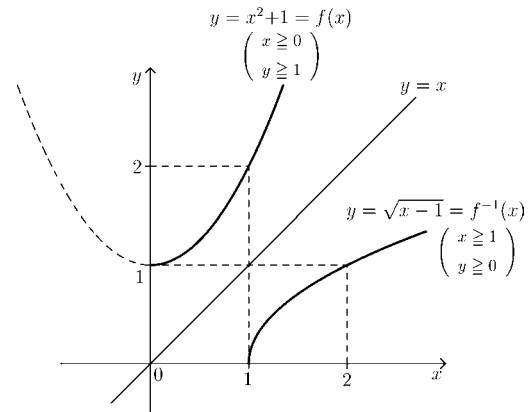
$$b = a^2 + 1 \iff a = \sqrt{b-1} = f^{-1}(b)$$

$(a \geq 0, b \geq 1)$ $(a \geq 0, b \geq 1)$

となる。 b を x でおきかえると、逆関数

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} \quad (\text{定義域 } x \geq 1)$$

が求まる。 $y = f(x)$ と $y = f^{-1}(x)$ のグラフは右図のように直線 $y = x$ に関し、対称になる。



(別解) $y = x^2 + 1$ ($x \geq 0, y \geq 1$) の逆関数を次のようにして求めてもよい。

↓(① x について解く)

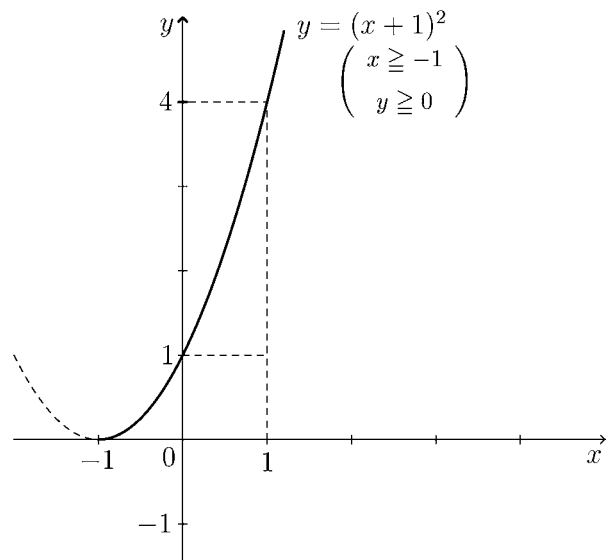
$$x = \sqrt{y-1} \quad (x \geq 0, y \geq 1)$$

↓(② x と y を入れかえる)

$$y = \sqrt{x-1} \quad (y \geq 0, x \geq 1) \leftarrow \text{求める逆関数}$$

問 $f(x) = (x+1)^2$ のとき f の定義域を $x \geq -1$ に制限すれば $y = f(x)$ は単調増加になる。この逆関数を求め、グラフを右図に描け。

(解)



< 逆関数 4 >

例題 次の関数の逆関数を求めよ。

$$(1) y = \sqrt{x+1} \qquad (2) y = 3^x$$

(解) (1) 定義域は $x \geq -1$ であり値域は $y \geq 0$ である。

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x+1} && (x \geq -1, y \geq 0) \\ &\Downarrow && \text{< } x \text{ について解く >} \\ x &= y^2 - 1 && (x \geq -1, y \geq 0) \\ &\Downarrow && \text{< } x \text{ と } y \text{ を入れ替える >} \\ y &= x^2 - 1 && (y \geq -1, x \geq 0) \end{aligned}$$

(答) 逆関数は $y = x^2 - 1$ であり, その定義域は $x \geq 0$ である。

(2) $y = 3^x$ の定義域は実数全体であり, 値域は $y > 0$ である。

$$\begin{aligned} y &= 3^x && (y > 0) \\ &\Downarrow \\ \log_3 y &= \log_3 3^x = x \\ &\Downarrow \\ x &= \log_3 y && (y > 0) \\ &\Downarrow && \text{< } x \text{ と } y \text{ を入れ替える >} \\ y &= \log_3 x && (x > 0) \end{aligned}$$

(答) 逆関数は $y = \log_3 x$ であり, その定義域は $x > 0$ である。

問 次の関数の逆関数を求め, その定義域も求めよ。

$$(1) y = \sqrt{x-1}$$

$$(2) y = 4^x$$

$$(3) y = \log_2 x$$

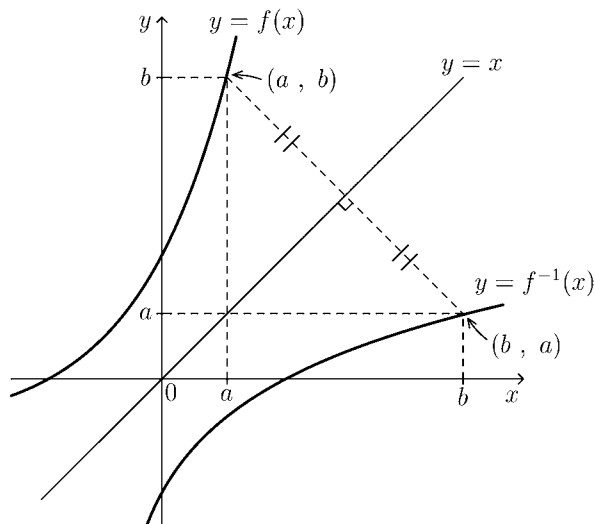
< 逆関数 5 >

関数 $y = f(x)$ が単調であるとき、 $y = f(x)$ のグラフ上の点の座標を (a, b) とすると

$$b = f(a) \iff a = f^{-1}(b)$$

より、点 (b, a) は逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフ上の点である。

このことから、逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフは、元の関数 $y = f(x)$ のグラフを、直線 $y = x$ に関して、対称に折り返したものになっている。



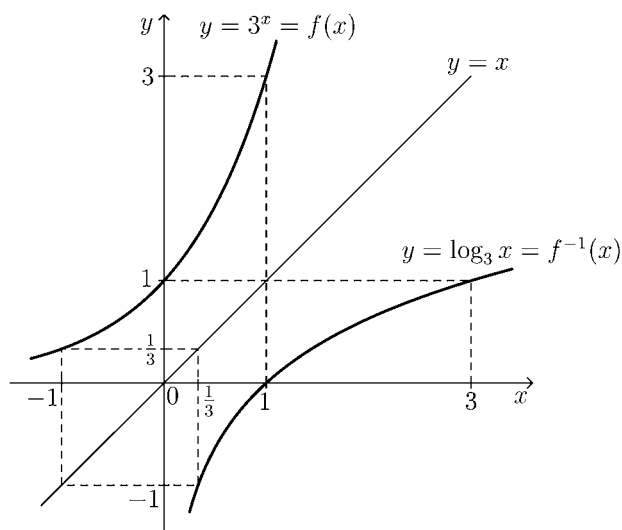
例 $f(x) = 3^x$ のとき、前ページの例題より
逆関数は

$$f^{-1}(x) = \log_3 x$$

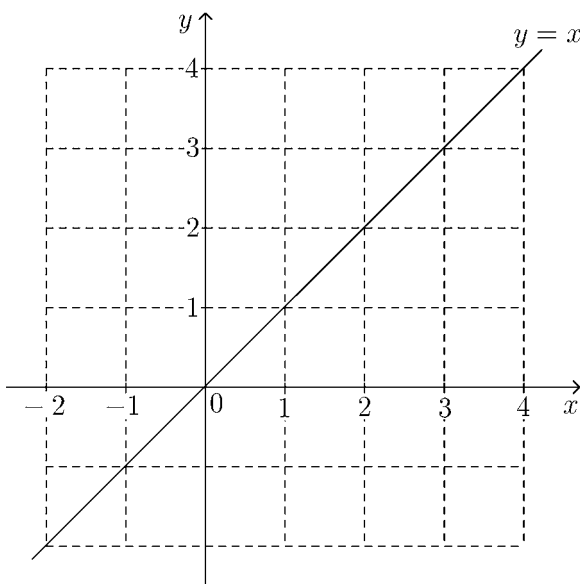
である。

対数関数 $y = \log_3 x$ は指数関数 $y = 3^x$ の逆関数である。

$y = \log_3 x$ の正確なグラフは、指数関数 $y = 3^x$ のグラフを直線 $y = x$ を対称軸として折り返すことによって求められる。



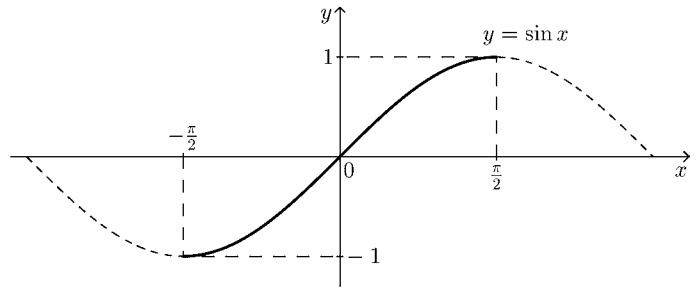
問 $f(x) = 2^x$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求め、元の関数 $y = f(x)$ と逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフを同じ座標平面上に描け。



< 逆三角関数 1 >

正弦関数 $y = \sin x$ の通常の見域域は実数全体であり、値域は $-1 \leq y \leq 1$ である。

この関数の見域域を $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ に制限すると、単調増加になる。このとき、関数



$$y = \sin x \quad (\text{見域域: } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \text{ 値域: } -1 \leq y \leq 1)$$

の逆関数が存在して、これを、

$$y = \sin^{-1} x \quad \text{又は} \quad y = \arcsin x \quad (\text{見域域: } -1 \leq x \leq 1, \text{ 値域: } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2})$$

(インバースサイン) (アークサイン)

と表す。 $y = \sin^{-1} x$ のグラフは、 $y = \sin x$ のグラフを直線 $y = x$ に関して対称に折り返したものである。

(注) $\sin^{-1} x$ は $\frac{1}{\sin x}$ ではない。これを区別するため $\frac{1}{\sin x} = \operatorname{cosec} x$ と書く。

問 1 右の座標平面上に $y = \sin^{-1} x$ のグラフを描け。

例 逆関数の見域域より、

$$a = \sin^{-1} b \iff b = \sin a$$

である。例えば $\sin^{-1} \left(\frac{1}{2} \right)$ の値 θ を求めよう

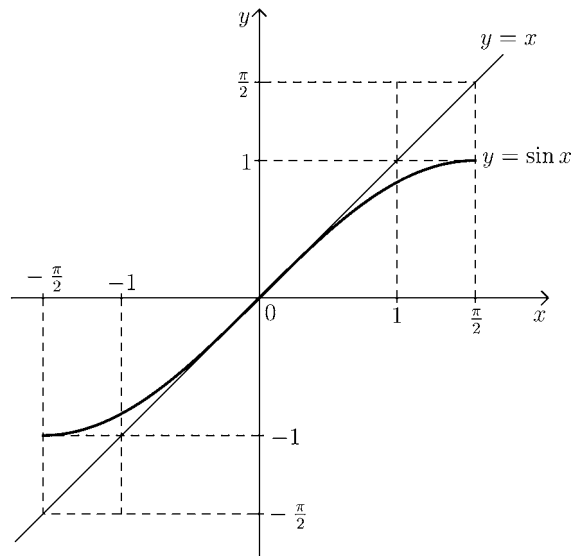
とすると、

$$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) \iff \frac{1}{2} = \sin \theta$$

より、 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で $\sin \theta$ が

$\frac{1}{2}$ となる角度 θ を求める。右表より

$$\theta = \frac{\pi}{6} \text{ であるから (答) } \sin^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{6}$$



θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	-1				0	$\frac{1}{2}$			1

問 2 表を完成させよ。

問 3 次の値を求めよ。

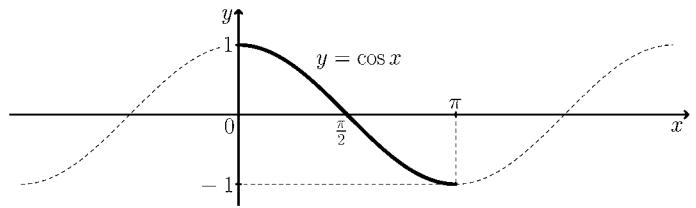
(1) $\sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) =$

(2) $\sin^{-1} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) =$

(3) $\sin^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right) =$

< 逆三角関数 2 >

余弦関数 $y = \cos x$ の通常の見域は実数全体であり、値域は $-1 \leq y \leq 1$ である。この関数の見域を $0 \leq x \leq \pi$ に制限すると、単調減少になる。そのとき、関数



$$y = \cos x \quad (\text{見域: } 0 \leq x \leq \pi, \text{ 値域: } -1 \leq y \leq 1)$$

の逆関数が存在して、これを、

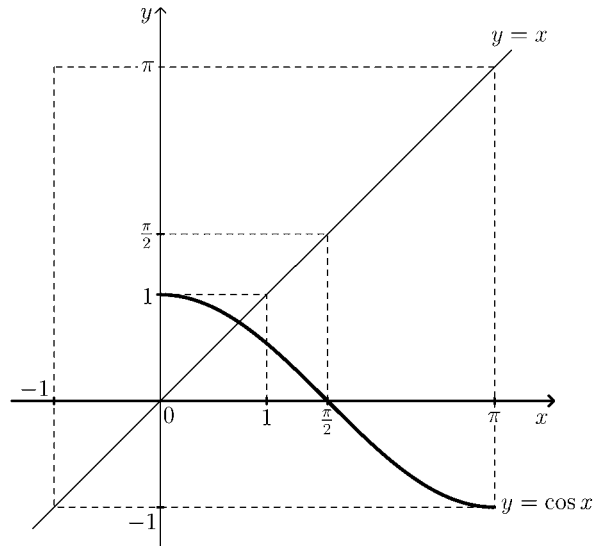
$$y = \cos^{-1} x \quad \text{又は} \quad y = \arccos x \quad (\text{見域: } -1 \leq x \leq 1, \text{ 値域: } 0 \leq y \leq \pi)$$

(インバースコサイン) (アークコサイン)

と表す。 $y = \cos^{-1} x$ のグラフは、 $y = \cos x$ のグラフを直線 $y = x$ に関して対称に折り返したものである。

(注) $\cos^{-1} x$ は $\frac{1}{\cos x}$ ではない。これを区別するため $\frac{1}{\cos x} = \sec x$ と書く。

問 1 右の座標平面上に $y = \cos^{-1} x$ のグラフを描け。



例 逆関数の見域より、

$$a = \cos^{-1} b \iff b = \cos a$$

である。例えば $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ の値 θ を求めようとするとき、

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \iff \frac{1}{2} = \cos \theta$$

より、 $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲で $\cos \theta$ が $\frac{1}{2}$ となる角度 θ を求める。右表より

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos \theta$	1			$\frac{1}{2}$	0				-1

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ であるから (答) } \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

問 2 表を完成させよ。

問 3 次の値を求めよ。

$$(1) \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \quad (2) \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \quad (3) \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) =$$

< 逆三角関数 3 >

正接関数 $y = \tan x$ の通常の実数全体の定義域は $\frac{\pi}{2} + n\pi$ (n は整数) 以外の実数であり、値域は実数全体である。この関数の定義域を $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ に制限すると、単調増加になる。そのとき、関数

$$y = \tan x \quad (\text{定義域: } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \text{ 値域: 実数全体})$$

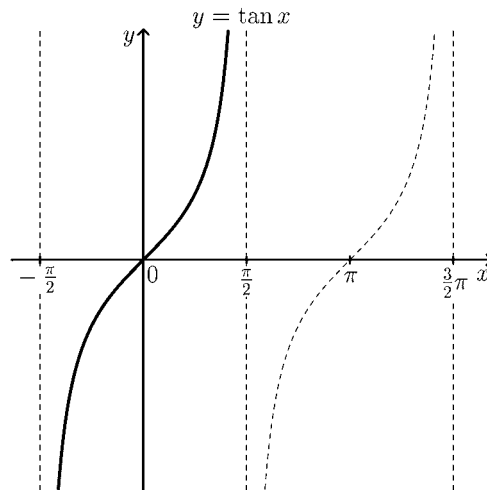
の逆関数が存在して、これを、

$$y = \tan^{-1} x \quad \text{又は} \quad y = \arctan x \quad (\text{定義域: 実数全体, 値域: } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2})$$

(インバーstanジェント) (アークタンジェント)

と表す。 $y = \tan^{-1} x$ のグラフは、 $y = \tan x$ のグラフを直線 $y = x$ に関して対称に折り返したものである。

(注) $\tan^{-1} x$ は $\frac{1}{\tan x}$ ではない。これを区別するため $\frac{1}{\tan x} = \cot x$ と書く。



問1 右の座標平面上に $y = \tan^{-1} x$ のグラフを描け。

例 逆関数の定義より、

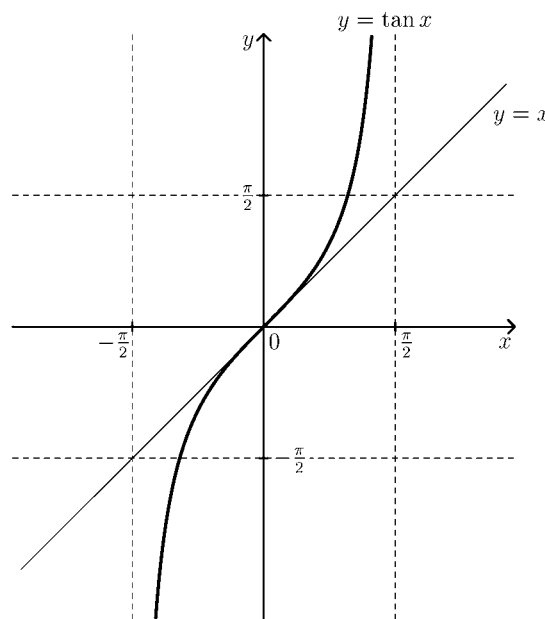
$$a = \tan^{-1} b \iff b = \tan a$$

である。例えば $\tan^{-1}(\sqrt{3})$ の値 θ を求めようとするとき、

$$\theta = \tan^{-1}(\sqrt{3}) \iff \sqrt{3} = \tan \theta$$

より、 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で $\tan \theta$ が $\sqrt{3}$ となる角度 θ を求める。右表より $\theta = \frac{\pi}{3}$ であるから

$$(\text{答}) \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$



θ	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan \theta$				0			$\sqrt{3}$

問2 表を完成させよ。

問3 次の値を求めよ。

(1) $\tan^{-1}(1) =$ (2) $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) =$ (3) $\tan^{-1}(-\sqrt{3}) =$

< 合成関数 1 >

2つの関数 $f(x)$, $g(x)$ について, 関数 $f(g(x))$ や関数 $g(f(x))$ を考えることができる。これら関数を $f(x)$ と $g(x)$ の合成関数という。

例 1 $f(x) = x^3$, $g(x) = \sin x$ のとき

$$g(f(x)) = g(x^3) = \sin(x^3)$$

$$f(g(x)) = f(\sin x) = (\sin x)^3 = \sin^3 x$$

注 $\sin(x^3) \neq \sin^3 x$ である。一般に $f(g(x))$ と $g(f(x))$ は一致しない。

問 1 関数 $f(x)$ と $g(x)$ が以下の場合に, 合成関数 $g(f(x))$ と $f(g(x))$ を求めよ。

$$(1) f(x) = x^2 + 1, g(x) = 3x, g(f(x)) = \quad, f(g(x)) =$$

$$(2) f(x) = \tan x, g(x) = x + 2, g(f(x)) = \quad, f(g(x)) =$$

$$(3) f(x) = \sqrt{x}, g(x) = x^2 - 1, g(f(x)) = \quad, f(g(x)) =$$

$$(4) f(x) = x^2 + 2, g(x) = \log_2 x, g(f(x)) = \quad, f(g(x)) =$$

例 2 複雑な式の関数を簡単な関数の合成関数として表すことができる。

例えば

$$y = \log_{10}(x^2 + 3x)$$

は

$$f(x) = x^2 + 3x, g(x) = \log_{10} x$$

とおくと

$$y = \log_{10}(f(x)) = g(f(x))$$

問 2 以下の関数を $g(f(x))$ の形にしたい。関数 $f(x)$ と $g(x)$ の式を求めよ。

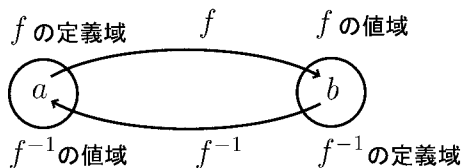
$$(1) y = (x^2 - x + 2)^7, f(x) = \quad, g(x) =$$

$$(2) y = \cos(2x + 3), f(x) = \quad, g(x) =$$

$$(3) y = \sqrt{1 - x^2}, f(x) = \quad, g(x) =$$

< 合成関数 2 >

問 1 関数 $f(x)$ が単調であれば逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在し, $f(a) = b$ ならば $f^{-1}(b) = a$ である。次式を a か b で表せ。



(1) $f^{-1}(f(a))$ (2) $f(f^{-1}(b))$

問 2 関数 $f(x)$ と $g(x)$ が以下の場合に $g(f(x))$ と $f(g(x))$ を求めよ。

(1) $f(x) = x^4$, $g(x) = \sqrt[4]{x}$ ($x \geq 0$)

(2) $f(x) = 2^x$, $g(x) = \log_2 x$ ($x > 0$)

(3) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sin^{-1} x$ ($-1 < x < 1$)

問 3 次式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt[3]{x^3}$ (2) $(\sqrt[3]{x})^3$

(3) $\log_3(3^x)$ (4) $3^{\log_3 x}$

(5) $\tan^{-1}\left(\tan \frac{\pi}{4}\right)$ (6) $\tan(\tan^{-1}(1))$

問 4 $f(x)$ と $g(x)$ が次の各場合に, 合成関数 $f(g(x))$ と $g(f(x))$ を求めよ。

(1) $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^4$, $f(g(x)) =$ $g(f(x)) =$

(2) $f(x) = \cos x$, $g(x) = x^5$, $f(g(x)) =$ $g(f(x)) =$

(3) $f(x) = x^5$, $g(x) = 3x + 4$, $f(g(x)) =$ $g(f(x)) =$

(4) $f(x) = x^6$, $g(x) = x^2 + 3x$, $f(g(x)) =$ $g(f(x)) =$

< 練習問題 >

問 1 次の関数の定義域と値域を求めよ。

$$(1) y = \sqrt{x+2} \qquad (2) y = -\sqrt{x-1} \qquad (3) y = \frac{1}{x-1} + 2$$

$$(4) y = \sin x \qquad (5) y = \cos x \qquad (6) y = \tan x$$

$$(7) y = 2^x \qquad (8) y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \qquad (9) y = \log_4 x$$

問 2 $f(x)$ が次の各場合に逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。ただし () 内は定義域である。

$$(1) f(x) = 4x - 3 \qquad (2) f(x) = \sqrt{x-1} \quad (x \geq 1)$$

$$(3) f(x) = \frac{1}{x-2} \quad (x > 2) \qquad (4) f(x) = x^3 \quad (x \geq 0)$$

$$(5) f(x) = 3^x \qquad (6) f(x) = \log_5 x \quad (x > 0)$$

問 3 $f(x)$ が次の場合に、逆関数 $f^{-1}(x)$ を求め、元の関数 $y = f(x)$ と逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフを同じ座標平面上に描け。ただし () 内は定義域である。

$$(1) f(x) = x^4 \quad (x \geq 0) \qquad (2) f(x) = 4^x$$

問 4 次の値を求めよ。

$$(1) \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad (2) \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$(3) \tan^{-1}(\sqrt{3}) \qquad (4) \log_3(3^5)$$

$$(5) 3^{\log_3 5} \qquad (6) \sin\left(\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

問 5 $f(x) = x^5$, $g(x) = \tan x$, $h(x) = 3x + 4$ のとき、次の関数を x の式で表せ。

$$(1) f(g(x)) \qquad (2) h(g(x)) \qquad (3) g(f(x))$$

< 数列の極限 2 >

数列 $\{a_n\}$ が収束しないとき、 $\{a_n\}$ は **発散する** という。

例 1 $a_n = 2n - 1$ のとき、この数列は

$$1, 3, 5, 7, 9, \dots, 2n - 1, \dots$$

となり、 n を限りなく大きくするとき第 n 項 $a_n = 2n - 1$ は限りなく大きくなる。このようなとき

$$\boxed{n \rightarrow \infty \text{ のとき } 2n - 1 \rightarrow \infty} \quad \text{または} \quad \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} (2n - 1) = \infty}$$

と表し、数列 $\{2n - 1\}$ は **正の無限大に発散する** という。

例 2 数列 $a_n = -n^2$ を考える。

$$a_1 = -1, a_2 = -4, a_3 = -9, a_4 = -16, a_5 = -25, \dots$$

このように a_n は常にマイナスであり、その絶対値は限りなく大きくなる。

このようなとき

$$\boxed{n \rightarrow \infty \text{ のとき } a_n \rightarrow -\infty} \quad \text{または} \quad \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty}$$

と書き、数列 $\{a_n\}$ は **負の無限大に発散する** という。

(注) 正の無限大を負の無限大と区別するために $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

と書くことがある。 $+\infty$ を **正の無限大** といい、 $-\infty$ を **負の無限大** という。

例 3
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^3 - n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) = +\infty \times (1 - 0) = +\infty$$

例 4
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2^n - 3^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \times \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1 \right\} = +\infty \times (0 - 1) = -\infty$$

問 次の極限值を求めよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^3 - n^4)$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^5 - n^4)$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (4^n - 3^n)$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (4^n - 5^n)$

< 数列の極限 3 >

数列の極限には次の性質がある。

- [1] $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$
- [2] 任意の正の定数 $\varepsilon > 0$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon \times n = +\infty$
- [3] (1) $r > 1$ なる定数 r に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = +\infty$
- (2) $0 < r < 1$ なる定数 r に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$

[1] は分母が無限大になる分数列の極限は 0 に収束することを示す。

これを $\frac{1}{\infty} = 0$ と覚えるとよい。

[2] はどんなに小さな数 $\varepsilon (> 0)$ でもたくさん集めると限りなく大きくなることを示す。

これを「チリ ツモ塵も積れば山となす」という。

[3] の (1) は [2] から導ける。この証明は研究課題とする。[3] の (2) は [3] の (1) と [1] から導ける。

例 1 $\lim_{n \rightarrow \infty} 0.01n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (1.01)^n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (0.99)^n = 0$

例 2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{4^n + 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\frac{3}{4})^n}{1 + (\frac{1}{2})^n} = \frac{0}{1+0} = 0$

問 次の極限值を求めよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + (0.001)^n}$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1.001)^n}{100}$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} 10 \times (0.999)^n$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{5^n + 3^n}$

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{4^n + 3^n}$

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{2^n + 3^n}$

< 無限等比級数 >

無限に続く等比数列

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^{n-1}, \dots$$

の和を考える。第 n 項までの和を

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \dots \textcircled{1}$$

とおくと

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n \dots \textcircled{2}$$

であるから $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より

$$(1-r)S_n = a - ar^n$$

よって $r \neq 1$ のとき

$$S_n = \frac{a - ar^n}{1 - r}$$

ここで $0 < r < 1$ のときは $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ となる。

従って無限和は

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - ar^n}{1 - r} = \frac{a}{1 - r}$$

よって

$$0 < r < 1 \text{ のとき } \boxed{a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots = \frac{a}{1 - r}}$$

これを初項 a , 公比 r ($0 < r < 1$) の 無限等比数列の和 または 無限等比級数の和 という。

例

$$2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \dots + 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \dots = \frac{2}{1 - \frac{1}{3}} = 3$$

問 次の和を求めよ。

(1) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots =$

(2) $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots + \frac{1}{10^n} + \dots =$

(3) $\frac{3}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{3}{10} \times \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \dots + \frac{3}{10} \times \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} + \dots =$

< 循環小数 1 >

分数は有限小数かまたは循環する無限小数で表される。

例 1 $\frac{1}{8} = 0.125$, $\frac{1}{25} = 0.04$, $\frac{3}{40} = 0.075$

例 2 $\frac{1}{3} = 0.3333333\cdots$, $\frac{1}{6} = 0.166666\cdots$

$\frac{7}{12} = 0.583333\cdots$, $\frac{4}{11} = 0.363636\cdots$

$\frac{853}{1665} = 0.5123123123123\cdots$

$$\begin{array}{r} 0.3636 \\ 11 \overline{) 40} \\ \underline{33} \\ 70 \\ \underline{66} \\ 40 \\ \underline{33} \\ 70 \\ \underline{66} \\ 4 \end{array}$$

このように同じ数が無限に繰り返される小数を**循環小数**という。

限りなく続くことをあらわすために、繰り返される最初と最後の数の上にドット(黒丸)を付けて表す。

例えば

$\frac{1}{3} = 0.3333\cdots = 0.\dot{3}$

$\frac{1}{6} = 0.16666\cdots = 0.1\dot{6}$

$\frac{7}{12} = 0.58333\cdots = 0.58\dot{3}$

$\frac{4}{11} = 0.363636\cdots = 0.3\dot{6}$

$\frac{853}{1665} = 0.5123123123\cdots = 0.5\dot{1}2\dot{3}$

等で表す。

$$\begin{array}{r} 0.5123123 \\ 1665 \overline{) 8530} \\ \underline{8325} \\ \hline \boxed{2050} \\ \underline{1665} \\ 3850 \\ \underline{3330} \\ 5200 \\ \underline{4995} \\ \hline \boxed{2050} \\ \underline{1665} \\ 3850 \\ \underline{3330} \\ 5200 \\ \underline{4995} \\ \hline \boxed{2050} \end{array}$$

問 次の分数を小数になおせ。

(1) $\frac{11}{16}$

(2) $\frac{5}{12}$

(3) $\frac{4}{33}$

(4) $\frac{43}{99}$

< 循環小数 2 >

例 (1) $0.\dot{3} = 0.3333\cdots = 0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + 0.00003 + \cdots$

$$= \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \frac{3}{100000} + \cdots$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{3}{10} \times \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{3}{10} \times \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \frac{3}{10} \times \left(\frac{1}{10}\right)^4 + \cdots$$

より初項 $a = \frac{3}{10}$, 公比 $r = \frac{1}{10}$ の無限等比級数の和であるから

$$0.\dot{3} = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

(2) $0.\dot{3}\dot{6} = 0.36363636\cdots = 0.36 + 0.0036 + 0.000036 + 0.00000036 + \cdots$

$$= \frac{36}{100} + \frac{36}{10000} + \frac{36}{1000000} + \frac{36}{100000000} + \cdots$$

$$= \frac{36}{100} + \frac{36}{100} \times \left(\frac{1}{100}\right) + \frac{36}{100} \times \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \frac{36}{100} \times \left(\frac{1}{100}\right)^3 + \cdots$$

$$= \frac{\frac{36}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$$

問 次の循環小数を分数または整数になおせ。

(1) $0.\dot{5} = 0.5555\cdots =$

(2) $0.\dot{9} = 0.9999\cdots =$

(3) $0.\dot{1}\dot{2} = 0.12121212\cdots =$

(4) $0.4\dot{3} = 0.434343\cdots =$

(5) $0.\dot{1}2\dot{3} = 0.123123123123\cdots =$

< 小数の表示 >

例 1 (1) $0.\dot{9} = 0.9999\cdots = 1$ (前ページ問 (2) より)

$$\begin{aligned} (2) 0.0\dot{9} &= 0.09999\cdots = 0.09 + 0.009 + 0.0009 + 0.00009 + \cdots \\ &= 0.09 + 0.09 \times \frac{1}{10} + 0.09 \times \left(\frac{1}{10}\right)^2 + 0.09 \times \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \cdots \\ &= \frac{0.09}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{0.09}{\frac{9}{10}} = \frac{0.9}{9} = 0.1 \end{aligned}$$

例 2 $0.00\dot{9} = 0.009999\cdots = 0.009 + 0.0009 + 0.00009 + 0.000009 + \cdots$

$$\begin{aligned} &= 0.009 + 0.009 \times \frac{1}{10} + 0.009 \times \left(\frac{1}{10}\right)^2 + 0.009 \times \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \cdots \\ &= \frac{0.009}{1 - \frac{1}{10}} = 0.01 \end{aligned}$$

問 1 次の循環小数を有限小数になおせ。

(1) $0.000\dot{9} =$ (2) $0.0000\dot{9} =$

例 3 (1) $1.\dot{9} = 1.9999\cdots = 1 + 0.9999\cdots = 1 + 0.\dot{9} = 1 + 1 = 2$

(2) $2.4\dot{9} = 2.4 + 0.0\dot{9} = 2.4 + 0.1 = 2.5$

(3) $3.13\dot{9} = 3.13 + 0.00\dot{9} = 3.13 + 0.01 = 3.14$

問 2 次の循環小数を整数または有限小数になおせ。

(1) $9.\dot{9} =$ (2) $0.1\dot{9} =$

例 4 1 を循環小数によって次の 2 通りに表すことができる。

$$1 = 0.\dot{9} = 0.9999\cdots$$

$$1 = 1.\dot{0} = 1.0000\cdots$$

問 3 例 4 のように次の数を循環小数によって 2 通りに表せ。

(1) $10 =$ (2) $5.3 =$

< 関数の極限 1 >

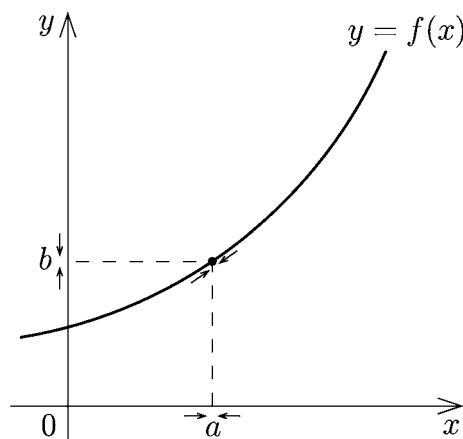
関数 $f(x)$ の定義域内で、 x が a と異なる値をとりながら、 a に限りなく近づくととき、どのように近づいても $f(x)$ の値が一定の値 b に限りなく近づくなれば、これを

$$x \rightarrow a \text{ のとき } f(x) \rightarrow b$$

または

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

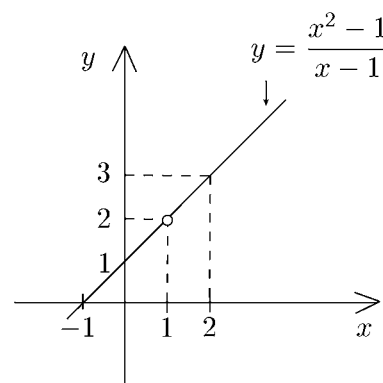
と表し、 b を、 x が a に限りなく近づくとときの $f(x)$ の極限值という。



例 1 $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x^2 + 2x} = \sqrt{3^2 + 2 \times 3} = \sqrt{9 + 6} = \sqrt{15}$

例 2 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{2^2 - 1}{2 - 1} = 3$

例 3 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$



(注) 例 3 の場合 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ は $x = 1$ では定義されていない。

無理に代入すると $f(1) = \frac{0}{0}$ の形で計算できないので、分子を因数分解して代入できる形になおしてから $x = 1$ を代入する。

例 4 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x - 2)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x - 2) = -1 - 2 = -3$

問 次の極限值を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x + 1}$

(2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \cos x$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x$

(4) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \log_2 x$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

(6) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1}$

(7) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$

(8) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x + 2}$

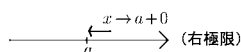
< 関数の極限 2 >

変数 x が a に近づくとき、

(1) a より小さい値をとりながら a に近づく場合に $x \rightarrow a-0$



(2) a より大きい値をとりながら a に近づく場合に $x \rightarrow a+0$



と表し、(1) を a への左側からの極限 (左極限)、(2) を a への右側からの極限 (右極限) という。

例 1 $\lim_{x \rightarrow 2-0} [x]$ を考える。

$x \rightarrow 2-0$ とは $x = 1.9, x = 1.99, x = 1.999, \dots \rightarrow 1.\dot{9} = 2$

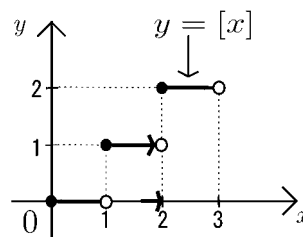
というふうに 2 より小さい値をとりながら 2 に近づく極限である。

ガウス記号 $[x]$ の定義より

$$[1.9] = 1, [1.99] = 1, [1.999] = 1, \dots$$

より

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} [x] = 1$$



例 2 $\lim_{x \rightarrow 2+0} [x]$ を考える。

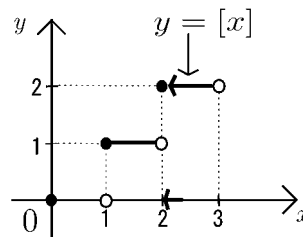
$x \rightarrow 2+0$ とは $x = 2.1, x = 2.01, x = 2.001, \dots \rightarrow 2.\dot{0} = 2$

というふうに 2 より大きい値をとりながら 2 に近づく極限である。

$$[2.1] = 2, [2.01] = 2, [2.001] = 2, \dots$$

より

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} [x] = 2$$



問 次の極限值を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 1-0} [x] =$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1+0} [x] =$

(3) $\lim_{x \rightarrow 3-0} [x] =$

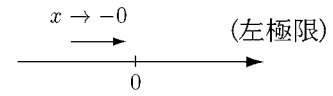
(4) $\lim_{x \rightarrow 3+0} [x] =$

< 関数の極限 3 >

(1) 0 への左極限 $x \rightarrow 0-0$ を略して $x \rightarrow -0$ と書く。

$x \rightarrow -0$ とは $x = -0.1, x = -0.01, x = -0.001, \dots$

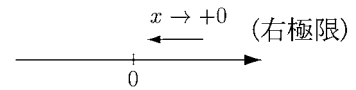
というふうに 0 より小さい値をとりながら 0 に近づく極限である。



(2) 0 への右極限 $x \rightarrow 0+0$ を略して $x \rightarrow +0$ と書く。

$x \rightarrow +0$ とは $x = 0.1, x = 0.01, x = 0.001, \dots$

というふうに 0 より大きい値をとりながら 0 に近づく極限である。



問 1 次の極限值を求めよ。ただし $[x]$ はガウス記号である。

(1) $\lim_{x \rightarrow -0} [x] =$

(2) $\lim_{x \rightarrow +0} [x] =$

例 1 (1) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x}$ を考える。 x と $\frac{1}{x}$ の対応

x	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001
$\frac{1}{x}$	10	100	1000	10000	100000	1000000

より $x \rightarrow +0$ のとき $\frac{1}{x}$ は限りなく大きくなる。

従って

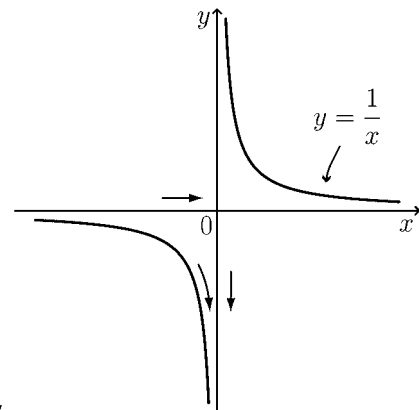
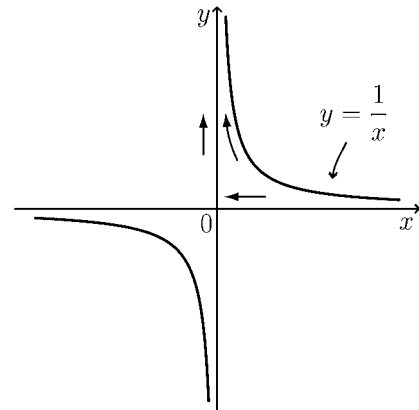
$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = +\infty$$

(2) $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x}$ を考える。 x と $\frac{1}{x}$ の対応

x	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	-0.00001
$\frac{1}{x}$	-10	-100	-1000	-10000	-100000

より

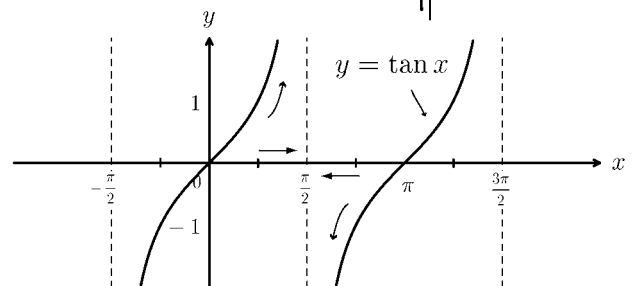
$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} = -\infty$$



例 2 右図より

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \tan x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \tan x = -\infty$$



問 2 次の極限值を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{x-2}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{x-2}$

< 関数の極限 4 >

極限式 $(*) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ は「 x が a 以外の値をとりながら a に限りなく近づくとき $f(x)$ は b に限りなく近づく」ことを意味する。この「 x が a 以外の値をとりながら a に近づく」ということは①「 x が a の左側から a に近づく」場合と②「 x が a の右側から a に近づく」場合がある。どちらの場合でも「 $f(x)$ は b に近づく」から

$$(*) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff (**) \left(\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b \text{ かつ } \textcircled{2} \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b \right)$$

となる。もし左極限值 $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ と右極限 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ の値が異なっていれば、そのとき「極限值 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ は存在しない」という。

- 例 (1) $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{2}$ より $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{2}$
- (2) $\lim_{x \rightarrow 2-0} [x] = 1$, $\lim_{x \rightarrow 2+0} [x] = 2$ より $\lim_{x \rightarrow 2} [x]$ は存在しない。
- (3) $\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{1}{x-3} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{1}{x-3} = +\infty$ より $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3}$ は存在しない。
- (4) $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ より $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

問 次の極限值を求めよ。また極限が存在しない場合は、そのように記せ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 4-0} [x]$ $\lim_{x \rightarrow 4+0} [x]$ $\lim_{x \rightarrow 4} [x]$

(2) $\lim_{x \rightarrow 2.5-0} [x]$ $\lim_{x \rightarrow 2.5+0} [x]$ $\lim_{x \rightarrow 2.5} [x]$

(3) $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x-1}$ $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x-1}$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}$

(4) $\lim_{x \rightarrow -0} [x]$ $\lim_{x \rightarrow +0} [x]$ $\lim_{x \rightarrow 0} [x]$

< 極限の練習 >

問 1 次の極限值を求めよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{5n - 3}$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 7n - 1}{7n^2 - 5n + 3}$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - n^3)$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (5^n - 4^n)$

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1.001)^n}{4}$

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} 10 \times (0.7)^n$

(7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{3^n + 4^n}$

(8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{3^n + 2^n}$

問 2 次の無限等比級数の和を求めよ。

(1) $\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \dots$

(2) $9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \dots$

問 3 次の分数を少数になおせ。

(1) $\frac{1}{9}$

(2) $\frac{2}{11}$

問 4 次の循環小数を分数になおせ。

(1) $0.\dot{3}$

(2) $0.1\dot{8}$

(3) $1.2\dot{9}$

問 5 次の極限值を求めよ。また極限值が存在しない場合はそのように記せ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x - 1}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 4} [x]$

(4) $\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{1}{x - 3}$

問 6 次の極限の式は正しくない。その理由を記せ。

(1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = 1$

< 付録 1. 古代数学史年表 >

年代	数学史	一般史
BC600	<p>ターレス (BC624~BC542 頃) (ミレトス) (三角形の相似を用いてピラミッドの高さを測る、初等幾何)</p> <p>ピタゴラス学派 (BC580~BC500 頃) (サモス => クロトン) (三平方の定理、黄金比、正多面体、無理数の発見、天文学他)</p>	
BC500	<p>ゼノン (BC450 頃) 運動の逆理 (エレア) (空間と時間の無限分割から起こる矛盾)</p> <p>デモクリストス (BC460~BC370) (アブデラ) (原子論、錐の体積を無限小的方法で求める)</p>	<p>ソクラテス (BC470~BC399)</p> <p>プラトン (BC427~BC347)</p>
BC400	<p>エウドクソス (BC408~BC355) (クニドス) (比例論 (分数の原理)、取り尽くし法、天文学)</p>	<p>アリストテレス (BC384~322)</p> <p>アレクサンダー大王 (BC323 没)</p>
BC300	<p>ユークリッド (BC300 頃) 原論 (アレクサンドリア) (幾何学を公理・公準から厳密に証明した最初の教科書)</p> <p>アルキメデス (BC285~BC212) (シラクサ) (てこの原理、浮力の原理、面積・体積の計算法、円周率 3.14)</p> <p>エラトステネス (BC276~BC194) (アレクサンドリア) (地球の半径を測る、素数のふるい分け)</p> <p>アポロニオス (BC270~BC190) (ベルガ => アレクサンドリア) (円錐曲線論、円周率 3.1416)</p>	<p>アリスタルコス 天文学 (BC310~BC230) (サモス) (太陽・地球・月の距離を測る、地動説)</p>
BC200	<p>ヒッパルコス (BC180~BC125) (ニカイア) (三角法の表を作る、星図作成)</p> <p>プトレマイオス (BC127~BC151 頃) (アレクサンドリア) (円を 360 度に分割、三角関数の加法定理)</p>	