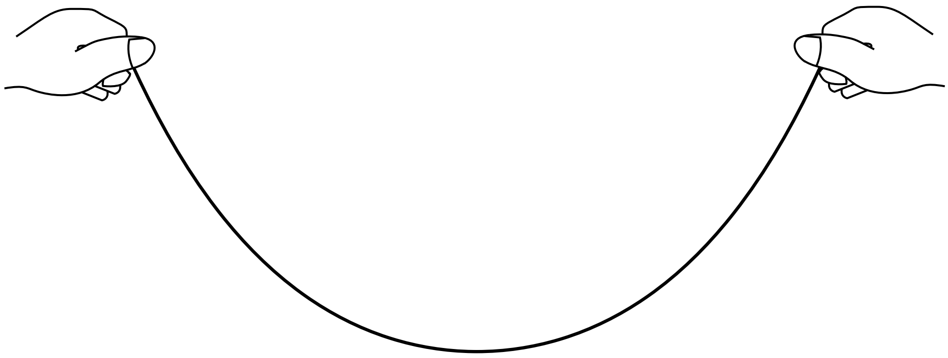
高知工科大学
Kochi University of Technology

基 礎 数 学

1

（2007年度版）



数と式の計算・2次関数
指数関数・対数関数とそのグラフ

山﨑 和雄　著

百ます計算 ①

* 計算の順序は，上から順番に，左のはしから横に進んでいく。
* 時間をはかり，記録をつける。
* 目標タイムは，それぞれ **2** 分以内。
* 目標タイムになるまで，コピーして何回もくり返す。

① 目的…正確に，速く計算できる (分 秒)

+	3	1	9	7	5	4	6	0	8	2	+
8											8
4											4
9											9
0											0
6											6
3											3
2											2
5											5
1											1
7											7

② (分 秒)

+	8	5	1	2	6	4	9	7	0	3	+
9											9
6											6
0											0
1											1
5											5
3											3
7											7
2											2
8											8
4											4

百ます計算 ②

* 計算の順序は，上から順番に，左のはしから横に進んでいく。
* 時間をはかり，記録をつける。
* 目標タイムは，それぞれ **2** 分以内。
* 目標タイムになるまで，コピーして何回もくり返す。

①　目的…正確に，速く計算できる　(　分　秒)

—	17	15	16	14	18	19	10	12	13	11	—
6											6
9											9
7											7
1											1
3											3
4											4
2											2
8											8
0											0
5											5

②　(　分　秒)

—	10	17	13	12	19	16	11	14	18	15	—
7											7
4											4
8											8
5											5
6											6
1											1
3											3
0											0
9											9
2											2

百ます計算 ③

* 計算の順序は，上から順番に，左のはしから横に進んでいく。
* 時間をはかり，記録をつける。
* 目標タイムは，それぞれ **2** 分以内。
* 目標タイムになるまで，コピーして何回もくり返す。

① 目的…正確に，速く計算できる (分 秒)

×	2	8	0	3	1	7	9	4	6	5	×
5											5
3											3
1											1
8											8
0											0
7											7
9											9
2											2
4											4
6											6

② (分 秒)

×	6	9	1	4	2	7	5	0	3	8	×
2											2
0											0
4											4
8											8
5											5
9											9
7											7
6											6
3											3
1											1

わり算

目的…正確に， 速く計算できる

分　　秒 (2.5 分以内)

① $15 \div 2 =$ ⋯
② $26 \div 3 =$ ⋯
③ $19 \div 4 =$ ⋯
④ $27 \div 6 =$ ⋯
⑤ $36 \div 7 =$ ⋯
⑥ $19 \div 3 =$ ⋯
⑦ $38 \div 7 =$ ⋯
⑧ $23 \div 5 =$ ⋯
⑨ $37 \div 9 =$ ⋯
⑩ $49 \div 6 =$ ⋯
⑪ $39 \div 5 =$ ⋯
⑫ $25 \div 4 =$ ⋯
⑬ $45 \div 7 =$ ⋯
⑭ $36 \div 8 =$ ⋯
⑮ $17 \div 2 =$ ⋯
⑯ $37 \div 4 =$ ⋯
⑰ $25 \div 6 =$ ⋯
⑱ $13 \div 5 =$ ⋯
⑲ $44 \div 7 =$ ⋯
⑳ $28 \div 3 =$ ⋯
㉑ $38 \div 9 =$ ⋯
㉒ $13 \div 6 =$ ⋯
㉓ $35 \div 4 =$ ⋯
㉔ $43 \div 8 =$ ⋯
㉕ $23 \div 5 =$ ⋯
㉖ $19 \div 8 =$ ⋯
㉗ $37 \div 9 =$ ⋯
㉘ $22 \div 6 =$ ⋯
㉙ $18 \div 5 =$ ⋯
㉚ $33 \div 6 =$ ⋯
㉛ $29 \div 4 =$ ⋯
㉜ $58 \div 8 =$ ⋯
㉝ $39 \div 5 =$ ⋯
㉞ $23 \div 3 =$ ⋯
㉟ $27 \div 7 =$ ⋯
㊱ $38 \div 5 =$ ⋯
㊲ $16 \div 7 =$ ⋯
㊳ $33 \div 8 =$ ⋯
㊴ $22 \div 3 =$ ⋯
㊵ $49 \div 6 =$ ⋯
㊶ $29 \div 9 =$ ⋯
㊷ $13 \div 5 =$ ⋯
㊸ $59 \div 7 =$ ⋯
㊹ $27 \div 5 =$ ⋯
㊺ $76 \div 9 =$ ⋯
㊻ $59 \div 8 =$ ⋯
㊼ $23 \div 7 =$ ⋯
㊽ $17 \div 3 =$ ⋯
㊾ $67 \div 8 =$ ⋯
㊿ $47 \div 9 =$ ⋯

分　　秒 (2.5 分以内)

① $10 \div 7 =$ ⋯
② $53 \div 8 =$ ⋯
③ $50 \div 8 =$ ⋯
④ $32 \div 9 =$ ⋯
⑤ $11 \div 8 =$ ⋯
⑥ $13 \div 7 =$ ⋯
⑦ $20 \div 7 =$ ⋯
⑧ $26 \div 9 =$ ⋯
⑨ $11 \div 3 =$ ⋯
⑩ $10 \div 4 =$ ⋯
⑪ $21 \div 6 =$ ⋯
⑫ $20 \div 3 =$ ⋯
⑬ $51 \div 8 =$ ⋯
⑭ $54 \div 7 =$ ⋯
⑮ $71 \div 9 =$ ⋯
⑯ $11 \div 3 =$ ⋯
⑰ $40 \div 6 =$ ⋯
⑱ $41 \div 7 =$ ⋯
⑲ $21 \div 6 =$ ⋯
⑳ $11 \div 9 =$ ⋯
㉑ $10 \div 8 =$ ⋯
㉒ $60 \div 8 =$ ⋯
㉓ $52 \div 7 =$ ⋯
㉔ $52 \div 9 =$ ⋯
㉕ $31 \div 8 =$ ⋯
㉖ $51 \div 6 =$ ⋯
㉗ $15 \div 9 =$ ⋯
㉘ $16 \div 9 =$ ⋯
㉙ $50 \div 9 =$ ⋯
㉚ $60 \div 7 =$ ⋯
㉛ $13 \div 8 =$ ⋯
㉜ $29 \div 6 =$ ⋯
㉝ $24 \div 9 =$ ⋯
㉞ $40 \div 7 =$ ⋯
㉟ $34 \div 8 =$ ⋯
㊱ $71 \div 8 =$ ⋯
㊲ $71 \div 9 =$ ⋯
㊳ $22 \div 6 =$ ⋯
㊴ $21 \div 9 =$ ⋯
㊵ $60 \div 7 =$ ⋯
㊶ $61 \div 8 =$ ⋯
㊷ $10 \div 9 =$ ⋯
㊸ $53 \div 7 =$ ⋯
㊹ $31 \div 6 =$ ⋯
㊺ $26 \div 9 =$ ⋯
㊻ $21 \div 8 =$ ⋯
㊼ $12 \div 5 =$ ⋯
㊽ $55 \div 8 =$ ⋯
㊾ $51 \div 9 =$ ⋯
㊿ $53 \div 7 =$ ⋯

わり算・かけ算

1

(1) $1372 \div 28 =$

$28\overline{)1372}$

(2) $5382 \div 46 =$

$46\overline{)5382}$

(3) $2377 \div 98 =$

$98\overline{)2377}$

(4) $7448 \div 67 =$

$67\overline{)7448}$

(5) $16.2 + 25.8 =$

$+$

(6) $135 + 7.5 =$

$+$

2

(1) $28 \times 1.4 =$

$\times$

(2) $34.5 \times 0.7 =$

$\times$

(3) $29.9 \div 2.3 =$

$\overline{)\quad\quad}$

(4) $1120.5 \div 2.7 =$

$\overline{)\quad\quad}$

分数 (1)

1

(1) $\dfrac{2}{7}+\dfrac{5}{21}=$

(2) $\dfrac{11}{34}+\dfrac{13}{17}=$

(3) $\dfrac{27}{21}+\dfrac{5}{27}=$

(4) $\dfrac{3}{15}+\dfrac{7}{12}=$

(5) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{5}{6}=$

2

(1) $\dfrac{13}{14}-\dfrac{5}{7}=$

(2) $\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{11}=$

(3) $\dfrac{3}{4}-\dfrac{19}{28}=$

(4) $\dfrac{11}{81}-\dfrac{13}{54}=$

(5) $5-\dfrac{6}{7}-\dfrac{1}{3}=$

3

(1) $\dfrac{1}{7}\times\dfrac{7}{3}=$

(2) $\dfrac{9}{7}\times\dfrac{5}{9}=$

(3) $\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{9}{4}=$

(4) $3\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{7}{18}=$

(5) $\dfrac{7}{4}\times\dfrac{3}{7}\times\dfrac{2}{9}=$

分数 (2)

1

(1) $\dfrac{1}{3} \div \dfrac{1}{5} =$

(2) $\dfrac{3}{7} \div \dfrac{3}{4} =$

(3) $18 \div \dfrac{3}{5} =$

(4) $\dfrac{3}{7} \div \dfrac{12}{13} =$

(5) $\dfrac{3}{7} \div 3 \div \dfrac{1}{7} =$

2

(1) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{12} =$

(2) $3 - \dfrac{1}{5} + \dfrac{5}{6} =$

(3) $\dfrac{4}{3} \div \dfrac{7}{6} \times \dfrac{7}{2} =$

(4) $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{4} + \dfrac{4}{5} \div \dfrac{5}{6} =$

(5) $\dfrac{7}{3} \div 5 - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{8}{3} =$

3

(1)
$69 - 56 \div 8 + 13 =$

(2)
$1.7 - \dfrac{1}{8} + 0.4 - \dfrac{3}{5} =$

(3)
$\dfrac{3}{8} \times \dfrac{4}{9} + 18 \div 0.6 =$

(4)
$0.9 + \left(\dfrac{3}{4} + 0.05\right) \times \dfrac{1}{5} =$

(5)
$1.1 \div \left(\dfrac{3}{4} - 0.2\right) - \dfrac{2}{3} =$

正の数・負の数

1

(1) $(-7)+(-9)=$

(2) $(+3.9)+(-4.7)=$

(3) $\left(+\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{8}{9}\right)=$

(4) $(+18)+(-113)=$

(5) $0+(-\frac{5}{7})=$

2

(1) $(+5)-(+7)=$

(2) $(+15)-(-9)=$

(3) $(+39)-(-23)=$

(4) $(-7)-(+9)=$

(5) $(-7.3)-(-1.7)=$

3

(1) $3-5-7=$

(2) $-7+8-8+7=$

(3) $-7-9+3-5=$

(4) $8-5-7+3=$

(5) $-13-19+7-5+6=$

(6) $-4.7+(-0.3)+(-0.5)=$

(7) $-3+\frac{3}{4}+\frac{5}{12}-\left(-\frac{1}{12}\right)=$

混合算

1

(1) $(-9) \div (-3) =$

(2) $(-21) \times 4 =$

(3) $(-6.3) \div 0.7 =$

(4) $\dfrac{6}{7} \div (-18) =$

(5) $(-36) \times 6 \div 2 =$

(6) $0 \div (-1080) =$

2

(1) $-(-7)^2 =$

(2) $-(-9^2) =$

(3) $(-27) \div (-3^2) =$

(4) $5^2 \times \left(-\dfrac{1}{5}\right)^2 =$

3 次の (1)〜(10) の中から -8 と等しいものを全て選びなさい。

(1) 2^3　(2) -2^3　(3) -4^2　(4) -2^4　(5) $-(2)^3$

(6) $(-2)^3$　(7) $-(-2)^3$　(8) $(-4)^2$　(9) -8^1　(10) $(-8)^1$

4

(1) $13 + (-7) \times (-6) =$

(2) $(-18) \div (-5 + 4) =$

(3) $10 - 8 \div (-2) =$

(4) $(-14) \div (8 - 10) =$

(5) $(-3.9) \times 0 + (-8) \div 0.2 + (-2) =$

(6) $\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2 \div \dfrac{27}{8} - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^3 =$

(7) $\left(-\dfrac{5}{8}\right) \div \left(-\dfrac{20}{3}\right) \times \left(-\dfrac{4}{3}\right) + 10 =$

その他の計算

例 1

$$\begin{aligned}\frac{1}{\frac{1}{2}} &= \frac{1\times 2}{\frac{1}{2}\times 2} && \left(\text{分母，分子に同じ数をかける}\right)\\ &= \frac{2}{1} && \left(\text{分母，分子をそれぞれ計算する}\right)\\ &= 2\end{aligned}$$

例 2

$$\begin{aligned}\frac{b+\frac{b}{3}}{a+\frac{a}{2}} &= \frac{\frac{4b}{3}}{\frac{3a}{2}} && \left(\text{分母，分子を計算する}\right)\\ &= \frac{\frac{4b}{3}\times 6}{\frac{3a}{2}\times 6} && \left(\text{分母，分子に同じ数をかける}\right)\\ &= \frac{8b}{9a} && \left(\text{計算する}\right)\end{aligned}$$

1

(1) $\dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{3}}$　　(2) $\dfrac{\frac{d}{c}}{\frac{b}{a}}$

(3) $\dfrac{2-\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}}$　　(4) $\dfrac{\frac{d-e}{c-d}}{\frac{b+c}{a+b}}$

(5) $\dfrac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$　　(6) $\dfrac{\frac{1}{ac}}{\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}$

(7) $\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}$　　(8) $\dfrac{1+x}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}$

2 次の等式を指定された文字について表せ。

(1) $Q = CV$　　$C =$　　$V =$

(2) $pu = nRT$　　$R =$　　$T =$

(3) $V = \dfrac{2R}{P}$　　$R =$　　$P =$

(4) $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{r}$　　$R =$

(5) $q = \dfrac{GM}{R^2}$　　$G =$

式の計算

1

(1) $19 + 7 \div \{3 - (-4)\} =$

(2) $13 + 3 \times \{-7 - (-4)\} =$

(3) $\{9 - (-7)\} \div 2 - 3 =$

(4) $54 \div \{(2-5)^2 \div 3\} - 6 =$

(5) $3^2 + \{9 - (2-7) \div 5\} =$

2

(1) $(-1) \div a =$

(2) $3x \div 4 =$

(3) $7 \div (x+3) =$

(4) $5x \div (-3) =$

(5) $9a \div 3a =$

3

(1) $5a \times b \times 7 + 3 \times 8b \times 6 =$

(2) $x \times 5 \times 3y - 18 \div 8 \times x =$

(3) $7a - 11a + 7a =$

(4) $-\dfrac{3}{8}x - \dfrac{3}{4}x =$

(5) $x - 0.1x + 0.01x =$

(6) $\dfrac{7}{8}a - \dfrac{3}{4}a - \dfrac{1}{2}a =$

(7) $-0.3x + 3 + (-1.5x) - 5 + 0.9x =$

1 次方程式 (1)

1

(1) $a = 7$, $b = -3$ のとき $-4ab$ の値を求めよ。

(2) ① 百の位が x, 十の位が 7, 一の位が y である 3 けたの整数を表す式を書け。

② 上の問題①で $x = 3$, $y = 9$ のときの 3 けたの整数を求めよ。

2 次の 1 次方程式をみたす x を求めよ。

(1) ① $5x = -15$　② $7x = -497$

③ $-8x = 38$　④ $7x - 11x = 12$

⑤ $-11x - 3x = -17 - 9$

(2) ① $-13 + 5x = 8$　② $-17x = 3x - 9$

③ $-11x - 7 = 10$　④ $-9x = -16x + 17$

(3) ① $13x + 7 = 5x + 11$

② $-17x - 26 = -13 - 9x$

③ $0.3x + 1 = 0.1x - 2$

④ $-4.3x - 0.22 = -2.28x - 3.6$

1 次方程式 (2)

1 次の 1 次方程式を解け。

(1) ① $3(x-4)=-7(x-2)$

② $7x-2(3x+5)=13$

③ $6x-5(x-3)=3x+4$

(2) ① $-x=1$

② $5x-7=x-7$

③ $-5x=7x$

④ $-3x+4=4$

⑤ $9x-7=-9x-7$

⑥ $x=-x-1$

(3) ① $\dfrac{1}{7}x=3$

② $-\dfrac{4}{5}x=-\dfrac{10}{8}$

③ $-\dfrac{3}{8}x=-\dfrac{5}{6}$

④ $-\dfrac{5}{9}x=-7$

⑤ $\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$

⑥ $-\dfrac{8}{15}x+\dfrac{4}{5}=\dfrac{5}{6}$

1 次方程式 (3)

1 次の方程式を解け。

(1) ① $-\frac{4}{7}x + 5 = \frac{2}{3}x + 6$

② $-\frac{4}{5}x + \frac{3}{10} = \frac{9}{10}x - 7$

③ $x - \frac{4}{9} = \frac{1}{9}x + \frac{3}{4}$

(2) ① $0.3x + 6 = \frac{3}{5}$

② $\frac{5}{7} - 1.4x = 2$

③ $0.9x - \frac{5}{6} = 4 - \frac{2}{3}x$

(3) ① $\frac{x-1}{2} = \frac{x+2}{3}$

② $-\frac{3x+1}{4} = \frac{x-2}{3}$

③ $1 - \frac{x-2}{3} = -\frac{x+1}{2}$

④ $\frac{5x-4}{7} = \frac{x+3}{4} - \frac{13}{28}$

⑤ $-\frac{x+3}{7} - 1 = \frac{3(x-1)}{5}$

練習問題 (1)

1 次の計算をしなさい。

(1) $986.3 \div 78$

(2) 37×6.9

(3) $5 - \dfrac{2}{7} + \dfrac{5}{21} =$

(4) $\dfrac{7}{4} \times \dfrac{3}{7} \times \dfrac{2}{9} =$

(5) $\dfrac{7}{8} \div 7 \div \dfrac{1}{8} - 1 \times \dfrac{1}{2}$

(6) $1.6 \div \left(\dfrac{6}{7} - \dfrac{2}{3}\right) \times \dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{5}$

(7) $-0.73 - (-73.37)$

(8) $-7 + \dfrac{5}{7} + \dfrac{4}{21} - \left(-\dfrac{19}{21}\right) - 3$

(9) $-7^2 - (-4)^2 - 1^4$

(10) $\left(-\dfrac{5}{8}\right) \div \dfrac{125}{32} - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^3$

(11) $49 \div \{(11-4)^2 \div 7\} - \dfrac{1}{3}$

(12) $a + 0.1a - 0.11a + \dfrac{1}{2}a$

2

(1) 百の位が a，十の位が 7， 一の位が b である 3 けたの整数を表す式を書け。

(2) 上の問題で，$a = 7$，$b = 3$ のときの 3 けたの整数を求めよ。

3 次の 1 次方程式をみたす x を求めよ。

(1) $3x - 7(x-2) = 5x + 9$

(3) $\dfrac{2}{3} - 1.7x = 8$

練習問題 (2)

1 次の計算をしなさい。

(1) $(-12)-(-5)$

(2) $7-(-5)\times 6$

(3) $(-2)^2-(-3^2)\times \dfrac{1}{2}$

(4) $8\sqrt{2}-\sqrt{50}$

(5) $(\sqrt{5}+2)^2-2\sqrt{20}$

(6) $(3x+8)-(5x+2)$

(7) $\dfrac{5x+2}{3}-\dfrac{x-1}{4}$

(8) $2x^2+4x-3x^2-x+2$

(9) $\dfrac{2x+y}{3}+x-3y$

(10) $12xy^3\div(-3x^2y)\times x^2y$

(11) $(3x-1)(2x-3)$

(12) $(2x-1)^2-(3x-1)(x+2)$

2 次の方程式を解きなさい。

(13) $3x-7=6x+8$

(14) $\dfrac{3x}{4}-2=\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{2}$

(15) $x^2-6=0$

(16) $x(x+3)=12-x$

3 次の連立方程式を解きなさい。

(17) $\begin{cases} 4x+3y=5 \\ 3x-5y=11 \end{cases}$

(18) $\begin{cases} 1.2x-0.7y=1 \\ \dfrac{x}{2}+y=3 \end{cases}$

4 次の不等式を解きなさい。

(19) $3x+10>5x-6$

(20) $\dfrac{x-1}{3}-\dfrac{x}{2}<1-\dfrac{x}{4}$

5 次の問いに答えなさい。

(21) $x=-4$，$y=3$ のとき，$x^2-3xy+y^2$ の値を求めなさい。

(22) 等式 $S=ab+bc$ を c について解きなさい。

(23) $\sqrt{15}<x<\sqrt{48}$ にあてはまる整数 x をすべて求めなさい。

(24) y は x に反比例し，$x=4$ のとき $y=-3$ である。$x=-6$ のときの y の値を求めなさい。

(25) $\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}$ のとき，A，B を求めよ。

数と多項式の計算

①　数の表し方

わたしたちは,

一を１０個集めたものを　十

十を１０個集めたものを　百

といっている。このように

１０個集まるごとに位が一つ上がる数の表しかた

のことを十進法という。

例えば,

百が 2 個，十が 4 個，一が 3 個

あるとき，これを 243 と表す。式で書くと,

$$243 = 2 \times 10^2 + 4 \times 10 + 3 \times 1$$

となる。

また，百，十，一をそれぞれ図-1 のような四角形で表すと，243 は図 2 のように表せる。

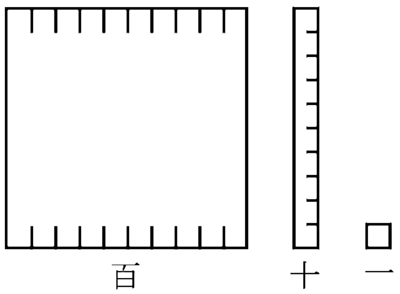


図 1

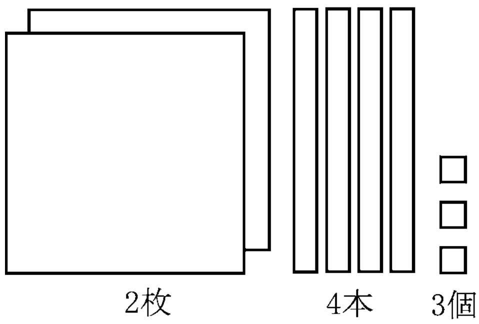


図 2

問　次の数を上のような図で表せ。

(1) 325　　(2) 547　　(3) 302

また

5 個集まるごとに位が一つ上がる

という数えかたもあり，このような数えかたを五進法という。五進法で 243 というのは

$$243 = 2 \times 5^2 + 4 \times 5 + 3 \times 1$$

のことである。これを計算すると十進法の 73 に等しいことがわかる。

数と多項式の計算

②　多項式

十進法で 243 は

$$2 \times 10^2 + 4 \times 10 + 3 \times 1$$

五進法で 243 は

$$2 \times 5^2 + 4 \times 5 + 3 \times 1$$

であった。

このとき，10 や 5 のかわりに文字 x を用いて，

$$2 \times x^2 + 4 \times x + 3$$

すなわち

$$2x^2 + 4x + 3$$

のような式について考えてみる。$2x^2$ や $4x$ や 3 のことを **項**という。

また，上の式のように，数と文字の積をいくつか加えてできる式を**多項式**という。

多項式の一つの項の中で，掛け合あわせた文字の個数をその項の**次数**という。
$2x^2$ の次数は 2，$4x$ の次数は 1 である。文字を含まない項を**定数項**という。

定数項の次数は 0 である。各項の次数の中で最大のものを，その多項式の

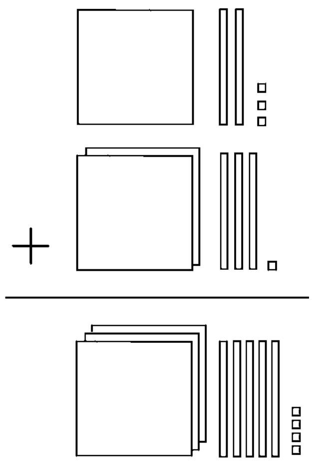
次数という。$2x^2 + 4x + 3$ の次数は 2 である。

問 1　$7x^3, -5x^2, 3x, 1$ の次数はいくらか。また，多項式 $-5x^2 + 1 + 7x^3 + 3x$ の次数はいくらか。

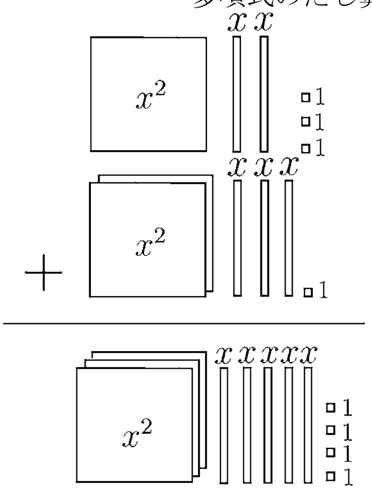
また，多項式の計算の仕方は下の図のように考えるとわかりやすい。

数のたし算

$$\begin{array}{r} 123 \\ +\ 231 \\ \hline 354 \end{array}$$



多項式のたし算



$$\begin{array}{r} x^2 + 2x + 3 \\ +\ \ 2x^2 + 3x + 1 \\ \hline 3x^2 + 5x + 4 \end{array}$$

多項式のひき算についても，同様に考えて計算ができる。

問 2 次の多項式の和 $A + B$，差 $A - B$ を計算せよ。

(1)　$A = 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 4x + 7,\quad B = 3x^3 - 7x^2 + 5x - 4$

(2)　$A = 7 + y^2 - 5y^6 + 3y,\quad B = y^2 + 3y^3 - 7y^4 + 5y - 9$

数と多項式の計算

③　多項式の積

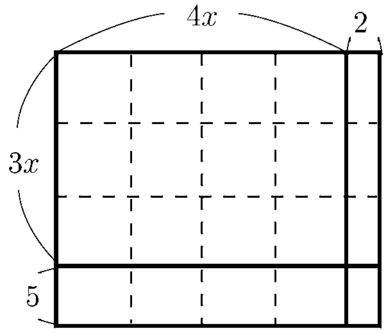


図-1　$(3x+5)(4x+2)$

多項式、

$$3x+5 \text{ と } 4x+2$$

の積を計算してみる。
図- 1 のように考えると、この積は、

$$3x \times 4x,\ 3x \times 2$$
$$5 \times 4x,\ 5 \times 2$$

を加えたものになるから、

$$\begin{aligned}(3x+5)(4x+2) &= 12x^2+6x+20x+10\\ &= 12x^2+26x+10\end{aligned}$$

となる。
このように多項式の積を計算して、単項式の和に表す（和の式に表す）ことを**展開する**という。

例 1　$(a+b)^2$ を展開せよ。

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a^2+ab+ba+b^2\\ &= a^2+2ab+b^2\end{aligned}$$

問 1　$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ となることを計算と図を使って示せ。

問 2　$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$ となることを計算と図を使って示せ。

例 2　$(a+b)^3$ を展開せよ。

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

であるから、次のように計算できる。

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2\\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2)\\ &= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

	a^2	$2ab$	b^2
a	a^3	$2a^2b$	ab^2
b	a^2b	$2ab^2$	b^3

$(a+b)(a^2+2ab+b^2)$

問 3　次の式を展開せよ。

(1)　$(2x+1)(5x-3)$

(2)　$(3x-1)(5y+2)$

(3)　$(x-1)(x^2+x+1)$

(4)　$(3x+2y)(x^2+2xy+3y^2)$

(5)　$(a-b)^3$

(6)　$(x+y)(x^2-xy+y^2)$

(7)　$(a+b+c)^2$

(8)　$(x+y+z)(x-y+z)$

数と多項式の計算

④　因数分解 (1)

多項式の積　$(x+3)(x+4)$　を展開すると，

$$x^2+7x+12$$

となる。逆に　$x^2+7x+12$　は

$$(x+3)(x+4)$$

と表されることがわかる。このように，１つの多項式をいくつかの多項式の積で表すことを**因数分解する**という。ここで，　$x+3$　と　$x+4$　を　$x^2+7x+12$　の**因数**という。

例１　$x^2+14x+45$ を因数分解せよ。

$$x^2+14x+45=(x+\bigcirc)(x+\triangle)$$

としたい。

右辺を展開すると　$x^2+(\bigcirc+\triangle)x+\bigcirc\times\triangle$

となる。両辺を比較して，

$$\bigcirc+\triangle=14$$
$$\bigcirc\times\triangle=45$$

となる○と△を見つければよいことがわかる。

○を 5，△を 9 にすれば，和が 14，積が 45 となるから，

$$x^2+14x+45=(x+5)(x+9).$$

問１　次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2+8x+15$

(2) x^2+6x+5

(3) $x^2+10x+21$

(4) $x^2-11x+24$

(5) $x^2+2x-15$

(6) x^2-6x-7

次に，$2x^2+11x+15$ のように，x^2 の係数が 1 以外の 2 次式の因数分解を考えてみる。

$$2x^2+11x+15=(x+\bigcirc)(2x+\triangle)$$

とおくと

$$2\times\bigcirc+\triangle=11$$
$$\bigcirc\times\triangle=15$$

となる。

○と△は図-1 のような図式で見つけることができる。

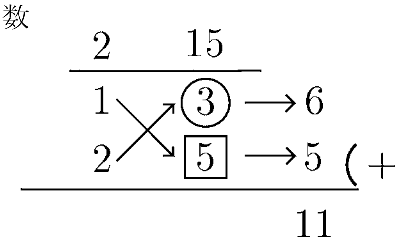


図-1　○と□を見つける

問２　次の式を因数分解せよ。

(1) $2x^2+5x+2$

(2) $4x^2+16x+15$

(3) $2x^2-5x-3$

(4) $3x^2-4x-4$

(5) $3x^2-10x+3$

(6) $6x^2-x-2$

数と多項式の計算

⑤　因数分解 (2)

$m(a+b)$ を展開すると，$ma+mb$ になる。したがって，
$ma+mb$ は $m(a+b)$ と因数分解される。
すなわち，多項式の中に共通の因数があれば，それを括弧（カッコ）の外にくくり出すことによって因数分解ができる。

例 1　$3xy^2+6x^2y$ を因数分解せよ。

$3xy$ が共通の因数であるので，これをくくり出して

$$3xy^2+6x^2y=3xy(y+2x)$$

と因数分解できる。

例 2　$x(3a+5)-y(3a+5)$ を因数分解せよ。

$(3a+5)$ が共通の因数であるので，これをくくり出して

$$x(3a+5)-y(3a+5)=(3a+5)(x-y)$$

と因数分解できる。

次に，a^2-b^2 は $(a+b)(a-b)$ と因数分解される。
すなわち，多項式が 2 乗の差の形をしている場合は，和と差の積として因数分解できる。

問 1　次の式を因数分解せよ。

(1)　$3ax^2-27a$

(2)　$2a^3-18ab^2$

(3)　$(x-y)a+(y-x)b$

(4)　$ax^2-5ax+6a$

(5)　$(a-b)x^2-(a-b)y^2$

(6)　$11x^2-99$

問 2　次の式を因数分解せよ。

(1)　$2x^2y+6xy^2$

(2)　$(a+2b)^2-3(a+2b)$

(3)　$9x^2-49$

(4)　$(x+y)a-(x+y)b$

(5)　$3a^2-75b^2$

(6)　$1-9x^2$

数と多項式の計算

⑥　多項式の割り算

数の割り算 $679 \div 32$ について考えてみよう。

式の割り算 $(6x^2 + 7x + 9) \div (3x + 2)$ について考えてみよう。

立てる

$$\begin{array}{rl} & 2 \\ \cline{2-2} 32\,\big) & 679 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & 2x \\ \cline{2-2} 3x+2\,\big) & 6x^2 + 7x + 9 \end{array}$$

↓

掛ける

$$\begin{array}{rl} & 2 \\ \cline{2-2} 32\,\big) & 679 \\ & 64 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & 2x \\ \cline{2-2} 3x+2\,\big) & 6x^2 + 7x + 9 \\ & 6x^2 + 4x \end{array}$$

↓

引く

$$\begin{array}{rl} & 2 \\ \cline{2-2} 32\,\big) & 679 \\ & 64 \\ \cline{2-2} & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & 2x \\ \cline{2-2} 3x+2\,\big) & 6x^2 + 7x + 9 \\ & 6x^2 + 4x \\ \cline{2-2} & 3x \end{array}$$

↓

下ろす

$$\begin{array}{rl} & 2 \\ \cline{2-2} 32\,\big) & 679 \\ & 64 \\ \cline{2-2} & 39 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & 2x \\ \cline{2-2} 3x+2\,\big) & 6x^2 + 7x + 9 \\ & 6x^2 + 4x \\ \cline{2-2} & 3x + 9 \end{array}$$

↓

立てる

$$\begin{array}{rl} & 21 \\ \cline{2-2} 32\,\big) & 679 \\ & 64 \\ \cline{2-2} & 39 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & 2x + 1 \\ \cline{2-2} 3x+2\,\big) & 6x^2 + 7x + 9 \\ & 6x^2 + 4x \\ \cline{2-2} & 3x + 9 \end{array}$$

↓

掛ける

$$\begin{array}{rl} & 21 \\ \cline{2-2} 32\,\big) & 679 \\ & 64 \\ \cline{2-2} & 39 \\ & 32 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & 2x + 1 \\ \cline{2-2} 3x+2\,\big) & 6x^2 + 7x + 9 \\ & 6x^2 + 4x \\ \cline{2-2} & 3x + 9 \\ & 3x + 2 \end{array}$$

↓

引く

$$\begin{array}{rl} & 21 \\ \cline{2-2} 32\,\big) & 679 \\ & 64 \\ \cline{2-2} & 39 \\ & 32 \\ \cline{2-2} & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & 2x + 1 \\ \cline{2-2} 3x+2\,\big) & 6x^2 + 7x + 9 \\ & 6x^2 + 4x \\ \cline{2-2} & 3x + 9 \\ & 3x + 2 \\ \cline{2-2} & 7 \end{array}$$

$$679 = 32 \times 21 + 7$$

$$6x^2 + 7x + 9 = (3x + 2)(2x + 1) + 7$$

数と多項式の計算

⑦　多項式の割り算

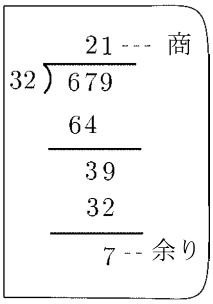


図-1　$679 \div 32$

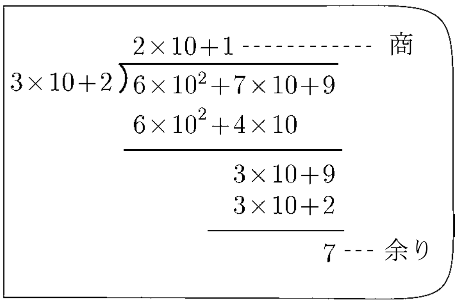


図-2

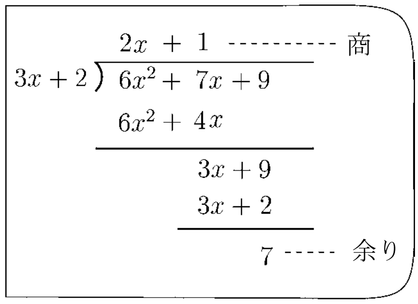


図-3　$(6x^2 + 7x + 9) \div (3x + 2)$

多項式 A を多項式 B で割ったとき，商が Q で余りが R となったとすると，$A = BQ + R$ がなりたつ。このとき，**R の次数は必ず B の次数より低くなる**ことに注意する。

また，多項式の割り算は整数のときと同じように,「商を立てる」,「掛ける」,「引く」,「下ろす」の４種類の計算を繰り返して求めることができる。ただ，整数の計算と違って，係数が分数であってもよい。

問 1　下の□のなかに適当な数を入れて，
$(6x^2 + 7x + 3) \div (2x + 1)$　を計算せよ。

$$
\begin{array}{rlll}
 & \square x + \square & & \text{---------- 商} \\
2x+1 \,\big) & 6x^2 + 7x + 3 & & \\
 & \square x^2 + \square x & & \\ \hline
 & \qquad \square x + 3 & & \\
 & \qquad \square x + \square & & \\ \hline
 & \qquad\qquad \square & & \text{----- 余り}
\end{array}
$$

問 2　次の割り算を行い，商と余りを求めよ。

(1)　$(x^2 + 5x + 9) \div (x + 2)$

(2)　$(3x^2 + 5x + 7) \div (x + 2)$

(3)　$(2x^3 + 3x^2 + 5x + 7) \div (2x + 1)$

(4)　$(2x^3 + 5x^2 - 2x + 1) \div (x^2 - x + 2)$

(5)　$(x^3 - 8) \div (x - 2)$

数と多項式の計算

分数式の掛け算・割り算

分母に文字を含んだ式，例えば

$$\frac{1}{x^2}\ ,\quad \frac{5}{x-3}\ ,\quad \frac{2y+3}{y^2+1}$$

などの式を，分数式という。

例 1　$$\frac{6xy^3}{15x^3y} = \frac{2\times 3\times x\times y^2\times y}{5\times 3\times x^2\times x\times y} = \frac{2y^2}{5x^2}$$

例 2　$$\frac{x^2+x}{x^2-x-2} = \frac{x(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{x}{x-2}$$

問 1　次の分数式を約分せよ。

(1) $\dfrac{21x^3y^2}{3xy}$

(2) $\dfrac{x^2+4x-21}{x^2-9}$

(3) $\dfrac{x^5}{x^3-3x^2}$

(4) $\dfrac{6x^2+7x-3}{2x^2+x-3}$

問 2　次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6}\times\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4}$

(2) $\dfrac{x^2+xy}{x-y}\times\dfrac{(x-y)^2}{x^2-y^2}$

(3) $\dfrac{a^2-a-2}{a^2-2a+4}\div\dfrac{(a+1)^2}{a^3+8}$

(4) $\dfrac{4x^2-y^2}{x^3+8y^3}\div\dfrac{6x^2-xy-y^2}{x^2-2xy+4y^2}$

数と多項式の計算

分数式のたし算・ひき算

例 1 $$\frac{5x}{x^3-4x}-\frac{10}{x^3-4x}=\frac{5x-10}{x^3-4x}=\frac{5(x-2)}{x(x+2)(x-2)}=\frac{5}{x(x+2)}$$

例 2 $$\frac{x-2}{x+3}-\frac{x+1}{x-1}=\frac{(x-2)(x-1)-(x+1)(x+3)}{(x+3)(x-1)}$$

$$=\frac{x^2-3x+2-(x^2+4x+3)}{(x+3)(x+1)}$$

$$=\frac{-7x-1}{(x+3)(x-1)}$$

問 次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{1}{xy}+\dfrac{2}{yz}$

(2) $\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{3}{x-2}$

(3) $\dfrac{x-2}{x^2-4x+3}-\dfrac{x+2}{x^2+2x-3}$

(4) $\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}$

(5) $\dfrac{x-1}{x(x+1)}+\dfrac{x+1}{x(x-1)}$

(6) $\dfrac{1}{x^2+5x+6}+\dfrac{3}{x^2-x-6}$

(7) $\dfrac{x+5}{x^2+8x+7}-\dfrac{2x}{2x^2+x-1}$

式の問題

1 次の割り算を行い，商と余りを求めよ。

(1) $(2x^2+13x+20)\div(x+5)$

(2) $(2x^3+3x^2+5x+8)\div(2x+1)$

(3) $(3x^4-2x^3+7x^2+5x+6)\div(x^2-x+2)$

2 次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{4x-2}{x^2-x-2}\times\dfrac{x+1}{2x-1}$

(2) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}\times\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-7x+12}$

(3) $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+x}\times\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-x-6}$

(4) $\dfrac{x-y}{x^2+xy}\times\dfrac{x^2-y^2}{(x-y)^2}$

(5) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-9}\div\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-5x+6}$

(6) $\dfrac{x^2+7x+12}{x^2+6x+8}\div\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}$

(7) $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-2x}\div\dfrac{x^2-x-6}{x^2-x-2}$

(8) $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\div\dfrac{a+b}{a-b}$

3 次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}$

(2) $\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{2}{x+2}$

(3) $\dfrac{x+2}{x^2+4x+3}-\dfrac{x-2}{x^2-2x-3}$

(4) $\dfrac{x+2}{x-1}+\dfrac{x^2-1}{x^2+2x}$

(5) $\dfrac{x+2}{x-3}-\dfrac{x-1}{x+1}$

平方根

　ある数を 2 乗すると a になるとき，その数を a の**平方根**という。
したがって，例えば $3^2 = 9, (-3)^2 = 9$ であるから，3 と -3 は，9 の平方根である。
　正の数 a の平方根は，2 つあり正のほうを $\sqrt{a}$，負のほうを $-\sqrt{a}$ と表す。
　平方根の積と商について，次のことが成り立つ。
a と b が正の数のとき

(1) $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$　　　(2) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

＊ a の平方根は，
$x^2 = a$ にあてはまる
x の値のことである

＊ $a \geqq 0$ のとき，
・$a\sqrt{a} = \sqrt{a^3}$
・$\sqrt{a^3} = a\sqrt{a}$
・$m\sqrt{a} + n\sqrt{a} = (m+n)\sqrt{a}$
・$m\sqrt{a} - n\sqrt{a} = (m-n)\sqrt{a}$

(1) の証明

　$\sqrt{a}\sqrt{b} > 0$，$(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = ab$ となる。2 乗して ab になる正の数が $\sqrt{ab}$ であるから，$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

問 1 上の証明と同じ方法で，(2) を証明せよ。

問 2　次の式を簡単にせよ。

(1) $(\sqrt{12})^2$　　(2) $\sqrt{\dfrac{9}{25}}$

(3) $\sqrt{2}\sqrt{3}$　　(4) $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$

(5) $\sqrt{12}$　　(6) $\sqrt{32}$

(7) $\sqrt{3} + \sqrt{12}$　　(8) $5\sqrt{3} - 2\sqrt{12} + \sqrt{27}$

(9) $\sqrt{27} \times \sqrt{12}$　　(10) $(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})^2$

(11) $\sqrt{2} - \sqrt{8} + \sqrt{18}$　　(12) $2\sqrt{3} - \dfrac{3}{\sqrt{3}} + \sqrt{27}$

例 1　$\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

例 2　$\dfrac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \dfrac{1 \times (\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{5 - 3} = \dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}$

問 3　次の式の分母を有理化せよ。

(1) $\dfrac{12}{\sqrt{12}}$　　(2) $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{10} - 3}$

(3) $\dfrac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}$

展開・因数分解の練習問題

次の式を展開せよ。

1.

(1) $3x\,(\,x-4\,)$

(2) $\dfrac{2}{3}\,(\,9x^2-6x+12\,)$

(3) $-3\,(\,x-7\,)$

(4) $-3x\,(\,x^2-8x+5\,)$

(5) $(\,2x^2-3x+4\,)\times 3x$

2.

(1) $(\,2x-3y\,)(\,2x+3y\,)$

(2) $(\,9x+7y\,)(\,9x-7y\,)$

(3) $(-a+2b\,)(\,-a-2b\,)$

(4) $(\,x^2-x-5\,)(\,x^2-x+5\,)$

(5) $(\,x-3y+1\,)(\,x+1+3y\,)$

3.

(1) $(\,a+2b\,)^2$

(2) $(\,3x-2y\,)^2$

(3) $(-2x-y\,)^2$

(4) $(\,p+q-1\,)^2$

(5) $(\,xy-yz\,)^2$

4.

(1) $(\,x+3\,)(\,x+4\,)$

(2) $(\,x-3\,)(\,x+5\,)$

(3) $(\,2x-3\,)(\,4x+5\,)$

(4) $(\,5x-3\,)(\,3x-4\,)$

(5) $(-2x+y\,)(\,3x-2y\,)$

5.

(1) $(\,2a-3b+c\,)^2$

(2) $(\,x+1\,)(\,x+2\,)(\,x-3\,)(\,x-4\,)$

(3) $(\,x+3\,)^3$

(4) x^4-y^4

(5) x^6-y^6

次の式を因数分解せよ。

1.

(1) $ab-bc$

(2) $3ab^2+9a^2b$

(3) $2x^2-6x$

(4) $x\,(\,x-1\,)-2\,(\,x-1\,)$

(5) $ab\,(\,x-y\,)+a\,(\,y-x\,)$

2.

(1) x^2-16

(2) $25x^2-4$

(3) $9x^2-4y^2$

(4) $3x^2-27y^2$

(5) $(\,x-y\,)^2-(\,a-b\,)^2$

3.

(1) $x^2+10x+25$

(2) $4x^2-4x+1$

(3) $9x^2-6x+1$

(4) $9x^2+12x+4$

(5) $a^2b^2+2abcd+c^2d^2$

4.

(1) $x^2+11x+24$

(2) x^2-x-12

(3) x^2+x-12

(4) $(\,a-b\,)^2-2\,(\,a-b\,)-15$

(5) $3x^2+5x-2$

5.

(1) $(\,a^2-b^2\,)\,x^2-a^2+b^2$

(2) $1-\dfrac{x^2}{4}$

(3) $x-x^5$

(4) $x-27x^3$

(5) $ax^2-(\,a+1\,)x+1$

2 次方程式の解の公式

$ax^2 + bx + c = 0$ の解を求める

x^2 の係数を 1 にするために，両辺を a で割ると

定数項を移項すると

両辺に，x の係数の半分の 2 乗を加えると

左辺を平方の形 (○ + △)^2 にすると

両辺の平方根をとると

解は

問題　解の公式を使って次の方程式を解け。

(1) $x^2 + x - 1 = 0$　　(2) $2x^2 + 2x - 1 = 0$

2 次方程式

② 2 次方程式

$$x^2 = 1, \qquad x^2 + 2x + 1 = 0, \qquad 3x^2 - 5x = 1$$

のように x^2 を含む方程式を 2 次方程式といい、x のように未知の値を表す文字を**未知数**という。

次に、未知数 x の値を**解**といい、**解を求めることを方程式を解く**という。

(1) 因数分解による方法

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

左辺を因数分解すると

$$(x+3)(2x-1) = 0$$

となるから

$$x + 3 = 0 \text{ または } 2x - 1 = 0$$

したがって

$$x = -3 \text{ または } x = \frac{1}{2}$$

(2) 解の公式による方法

$ax^2 + bx + c = 0$ の解は,

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ と } x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

の 2 つである。これを解の公式という。

問 次の方程式を解け。

(1) $(x+2)(3x-4) = 0$

(2) $x(x+7) = 0$

(3) $x^2 + 2x - 15 = 0$

(4) $x^2 - 6x + 8 = 0$

(5) $x^2 = 12$

(6) $(x+3)^2 = 2$

(7) $x^2 + 5x + 1 = 0$

(8) $3x^2 - 7x + 3 = 0$

(9) $12x - 4 = x^2$

(10) $x^2 - 9 = 8x$

連立１次方程式

② 連立 3 元 1 次方程式

ある店で，ケーキとプリンとドーナツを販売している。

ケーキ 1 個，プリン 2 個，ドーナツ 3 個では 390 円

ケーキ 2 個，プリン 3 個，ドーナツ 1 個では 460 円

ケーキ 3 個，プリン 4 個，ドーナツ 2 個では 680 円

であった。ケーキ，プリン，ドーナツはそれぞれ 1 個いくらになるか。

この問題を式で表すと，1 組の方程式ができる。このような方程式の組を連立 3 元 1 次方程式という。この方程式を解くには，**順に一文字ずつ消去する**とよい。上の問題を解きなさい。

問 100 円硬貨 1 枚，50 円硬貨 1 枚，1 円硬貨 1 枚，の重さは $10g$,

100 円硬貨 2 枚，50 円硬貨 3 枚，1 円硬貨 4 枚，の重さは $26g$,

100 円硬貨 3 枚，50 円硬貨 1 枚，1 円硬貨 2 枚，の重さは $21g$,

である。100 円硬貨，50 円硬貨，1 円硬貨の重さは，それぞれいくらか。

連立 1 次方程式の問題

1 A さんは，家から $7km$ 離れた駅まで行くのに，家から途中の友達の家までは自転車でいき，そこから駅まで歩いたら，全体で 45 分かかった。自転車の速さは毎時 $12km$，歩く速さは毎時 $4km$ のとき，家から友達の家までの道のりを求めよ。(ヒント:問題の内容を図で表す。何を x，y とおけば方程式を作りやすいかを考える)

2 K さんは，家から $1500m$ 離れた学校へ向かった。最初は毎分 $60m$ の速さで歩き，途中から毎分 $180m$ の速さで走り，家を出てから 21 分後に学校に着いた。走った道のりは何 m か。

3 ある大学の今年度の学生数は，昨年度にくらべて，男子の学生数が 4 %増加し，女子の学生数は 1 %減少した。全体としては 8 人増加して，583 人になった。この大学の今年度の男子，女子の学生数をそれぞれ求めよ。(ヒント:問題の内容を表で表す。何を x，y で表すかきめる。)

4 A，B 2 種類の食塩水が $400g$ ずつある。食塩水 A から $200g$，食塩水 B から $100g$ とって混ぜたら，8 %の食塩水ができた。また，食塩水 B の残りの $300g$ に $20g$ の食塩を混ぜたら，食塩水 A と同じ濃度になった。食塩水 A，B のはじめの濃度はそれぞれ何%か。

5 花屋で，バラを 4 本とカーネーションを 6 本買い，代金として 1800 円払った。ところが，店の人が，バラとカーネーションの値段を取り違えて計算していたことに気づき，100 円返してくれた。バラ 1 本，カーネーション 1 本の値段を求めなさい。

関数の意味

関数

ある量とそれにともなって変わる他の量があり，それぞれを変数（いろいろな値をとる文字のこと）x，y で表す。**x の値をきめるとそれに応じて y の値もただ 1 つきまるとき**，**y は x の関数である**という。

例 1　ある車は，ガソリン 1 リットルで 15km 走行できる。このとき，この車はガソリン x リットルで走行できる距離を y km とすると，$y = 15x$ と表すことができる。

例 2　風呂に水を入れるとき，水の深さとその時間がわかれば水を入れ始めてから何分後に水を止めればよいか推測できる。

例 3　気温は，上空へ行けば行くほど低くなる。調査の結果

1km 高くなると　6 ℃だけ気温が下がる

ということがわかった。地上の気温が 15 ℃のとき，高さ x km の場所 の気温を y ℃とする。高さを決めると，そのときの気温がきまるから，この働きは関数になっている。この関係を式で表すと

$$y = 15 - 6x$$

となる。

問 1　50 リットルのお湯がたまっているバスタブに，1 分間に 10 リットルの割合でお湯を入れる。x 分後にたまったお湯の量を y リットルとする。y を x の式で表せ。

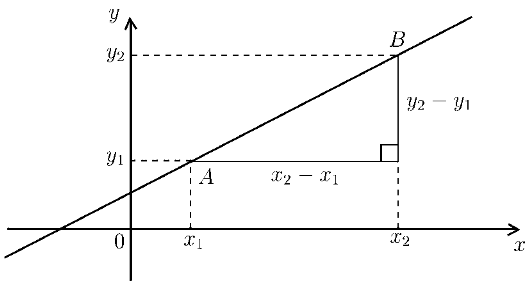
問 2　長さ 30cm のろうそくに火をつけたら，毎分 $\dfrac{1}{3}$ cm の速さで短くなっていった。火をつけてから x 分後の長さを y cm とするとき，y を x の式で 表せ。

傾きの意味 (直線の傾き)

あなたは，直線というと何を思い浮かべますか。ピンと張った糸，まっすぐな棒などでしょうか。数学では，直線は平面上の異なる 2 点を結ぶ最短の図形，または平面と平面が交わってできる図形であると考えています。

では，平面に描かれたいろいろな直線にある共通な性質として，傾きということを考えてみます。平面上に x 軸，y 軸をとる。そのとき，平面上の異なる 2 点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ を通る直線の傾き m を

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$



と決めます。これは坂道の勾配を表していると考えてもよいでしょう。
また，定点 $A(a,b)$ を通る直線上の任意の点を $P(x,y)$ とするとその直線の
傾き m は

$$\frac{y-b}{x-a}=m$$

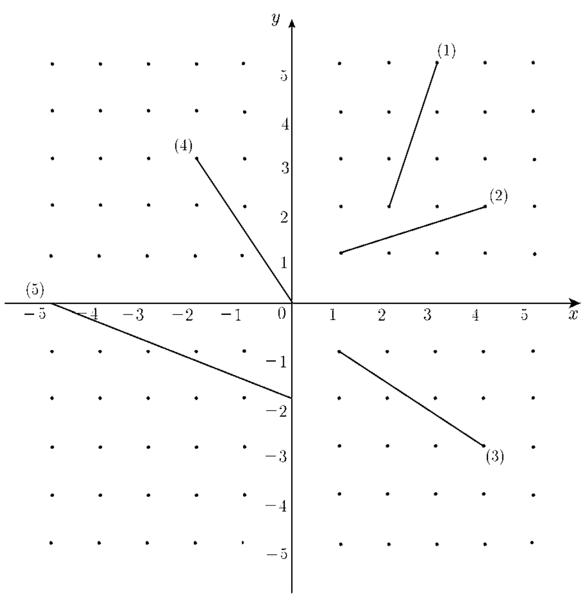
となる。この両辺に $x-a$ をかけると次式が得られる。

$$y-b=m(x-a)$$

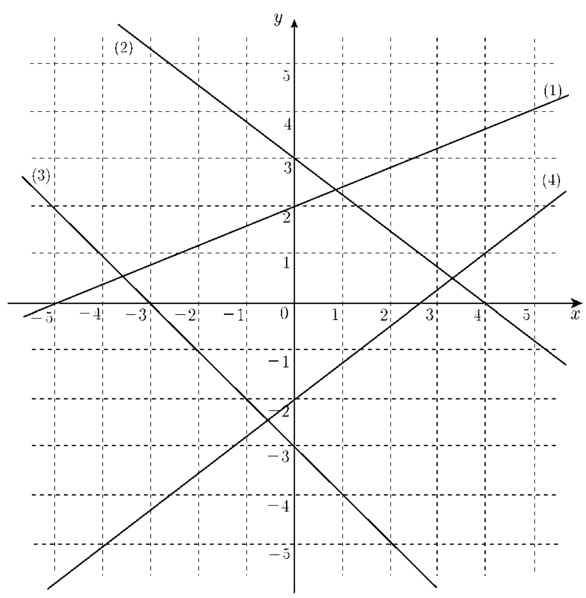
この式は定点 (a,b) を通り傾きが m である直線の式を表すことになる。

また，傾きが同じ直線は同じ性質を持つ直線と考えてよい。なぜなら，平行移動すれば重なるからである。

問 1　(1)〜(5) の線分の傾きを求めよ。



問 2　(1)〜(4) の直線の傾きを求めよ。



1次関数のグラフ

座標軸を書きこんだ平面上に直線があり，

この直線は，x 軸の正の方向に 1 増加すると，

y 軸の正の方向には m 増加したとする。

このようなとき，m を直線の傾きという。

また，

$$\frac{(y \text{ の増加量})}{(x \text{ の増加量})} = m \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

と考えてもよい。

したがって，右の図-1 と図-2 を見比べてみると，

点 (a , b) を通り傾き m の直線の式は

①の式を利用して，

$$\frac{y-b}{x-a} = m$$

である。この両辺に $x-a$ をかけると，

$$\boxed{y-b = m(x-a)}$$

で与えられる。

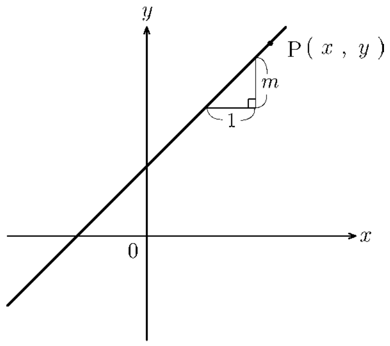


図-1

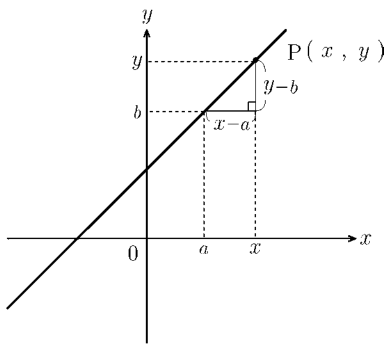


図-2

問　次の直線を表す 1 次関数の方程式を求めよ。

(1)　点 (0 , 3) を通り，傾き 4 の直線

(2)　点 (3 , 0) を通り，傾き 5 の直線

(3)　点 (2 , 3) を通り，傾き 4 の直線

(4)　点 (-1 , 2) を通り，傾き -1 の直線

(5)　点 (-2 , 3) を通り，傾き 0 の直線

(6)　2 点 (0 , 1) , (3 , 2) を通る直線

(7)　2 点 (1 , 0) , (2 , 2) を通る直線

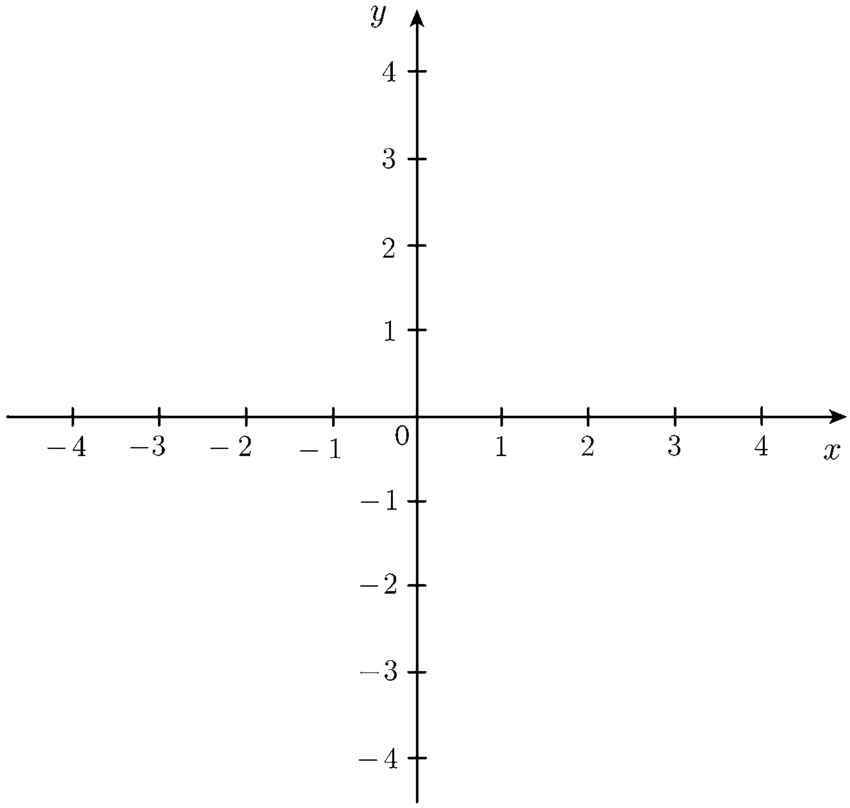
(8)　2 点 (0 , 4) , (3 , 0) を通る直線

1 次関数のグラフの問題 (1)

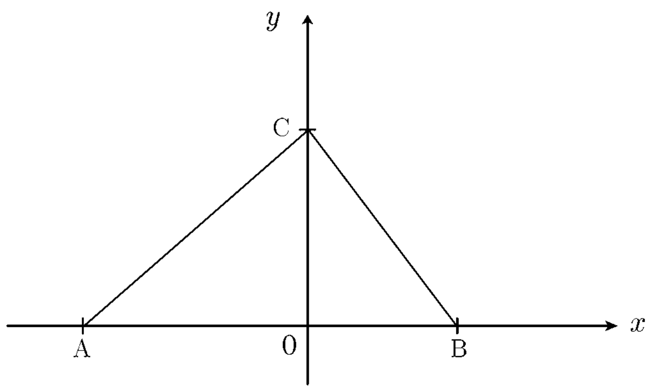
1 次の方程式のグラフをかけ。

(1) $2x-3y=9$　　(2) $x+2y=3$

(3) $y-2=0$　　(4) $4x-12=0$



問 2 下の図のように，3 点 A(-6,0)，B(4,0)，C(0,5) がある。
点 C を通り，△ ABC の面積を 2 等分する直線の式を求めよ。

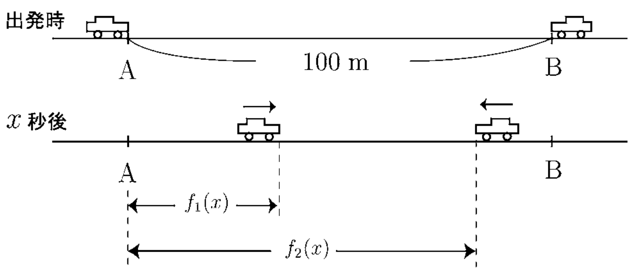


1 次関数のグラフの問題 (2)

1 長さ 15cm のロウソクに火をつけると，毎分 0.5cm の割合でロウソクが短くなっていく。火をつけてから x 分後のロウソクの長さを y cm とするとき，火をつけてからロウソクが燃えつきるまでの x と y の関係を表すグラフをかけ。

2 ある人が家から 800m 離れた駅まで分速 80m で歩いていく。
家を出発してから x 分後の駅までの残りの道のりを y m とするとき，
家を出発してから駅に着くまでの x と y の関係を表すグラフをかけ。

3 100m ある直線道路を 2 つの車が走る。A 地点から B 地点に向かって走る車は秒速 20m で走る。B 地点から A 地点に向かって走る車は秒速 10m で走る。同時に出発し，x 秒後の A 地点からの距離をそれぞれ $f_1(x)$，$f_2(x)$ とする。



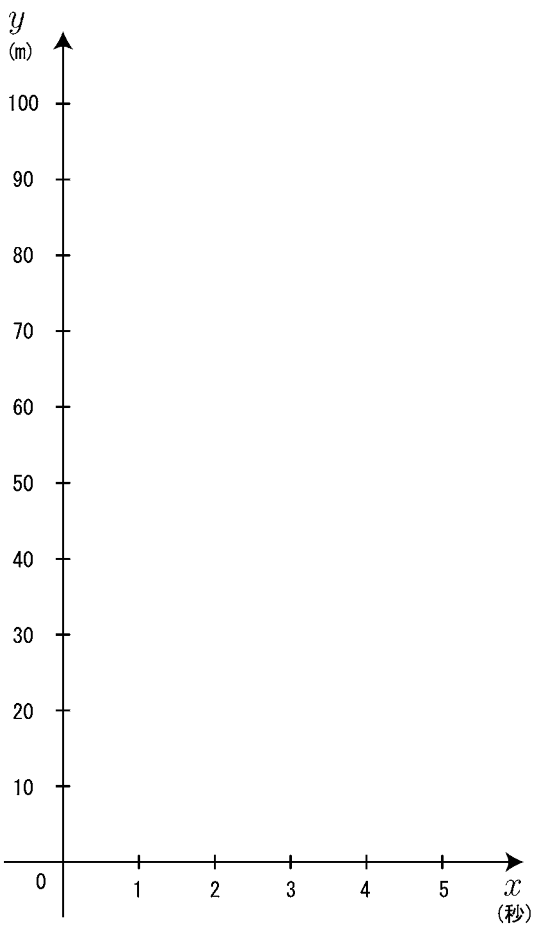
(1) $f_1(x)$ と $f_2(x)$ を x の式で表せ。

$f_1(x) =$ 　　　　　　， $f_2(x) =$

(2) $y = f_1(x)$ と $y = f_2(x)$ のグラフを右図に描け。

(3) 2 直線 ($y = f_1(x)$ と $y = f_2(x)$) の交点の座標を求めよ。

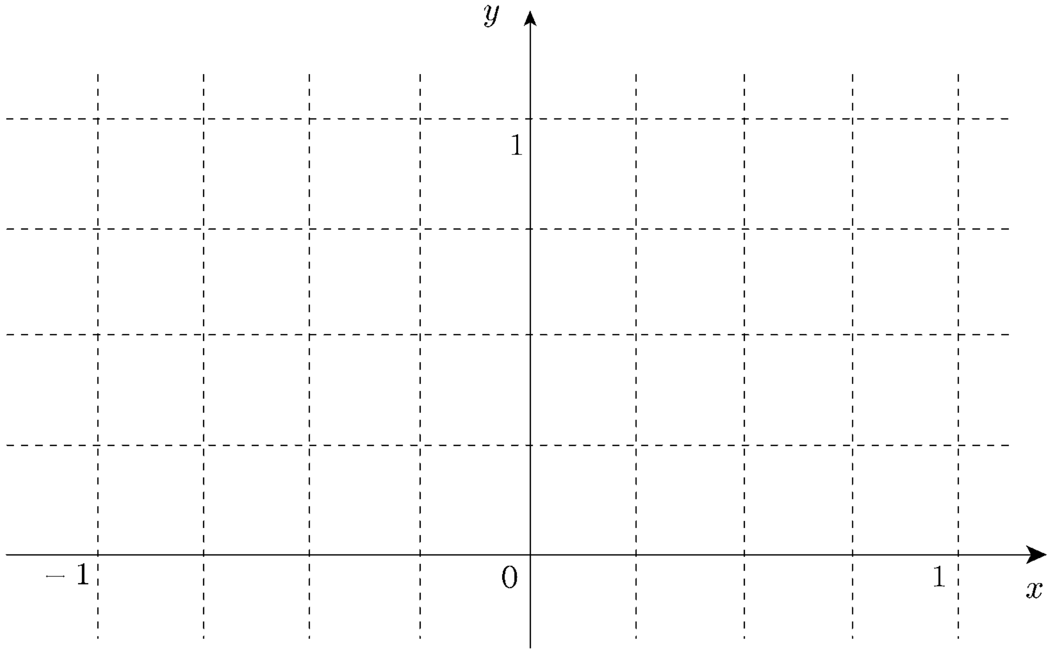
(4) 交点の座標は何を意味するか詳しく 答えよ。



$y = x^2$ のグラフ

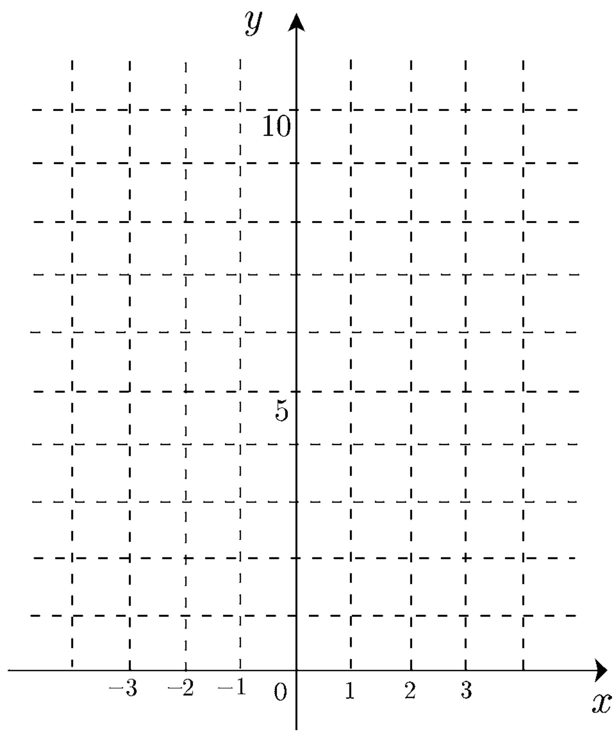
1 次の表を完成してから，$y = x^2$ のグラフをかけ。

x	$\cdots$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\cdots$
y	$\cdots$												$\cdots$



2 次の表を完成してから，$y = x^2$ のグラフをかけ。

x	y
$\vdots$	$\vdots$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
$\vdots$	$\vdots$



2 次関数のグラフ (1)

① 2 次関数とそのグラフ

2 次関数の中で，最も基本的な関数は

$$y = x^2$$

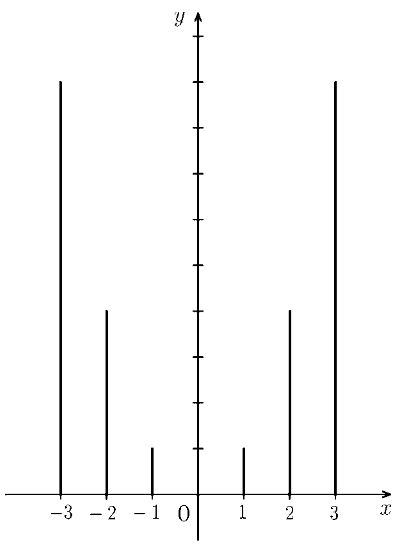
である。この関数のグラフをかいてみよう。

最初に，x の値が整数であるときの y の値を求める。

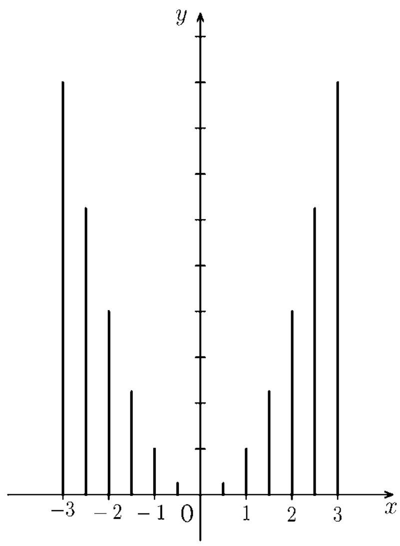
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	16	9	4	1	0	1	4	9	16

次に，x 軸上の目盛りの上に，対応する y の長さの棒を立てる。

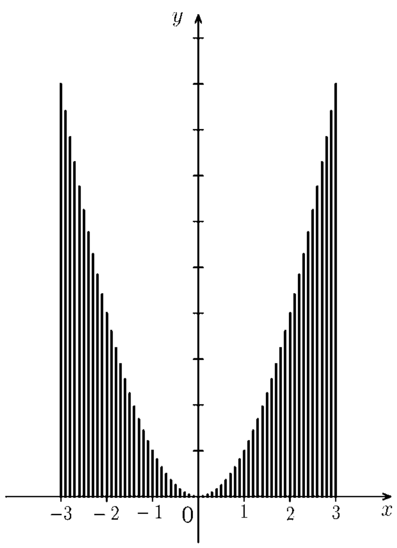
x の値の間隔を 1 ずつにすると



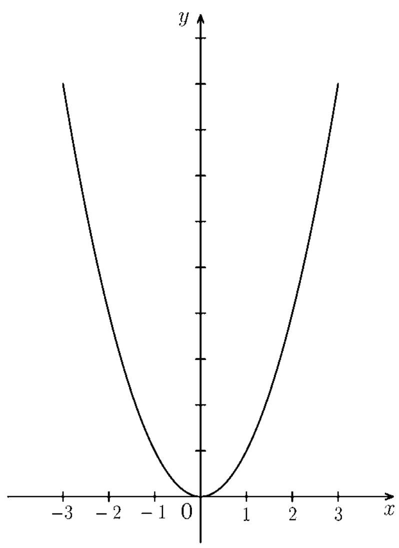
x の値の間隔を 0.5 ずつにすると



x の値の間隔を 0.1 ずつにすると



$y = x^2$ のグラフ



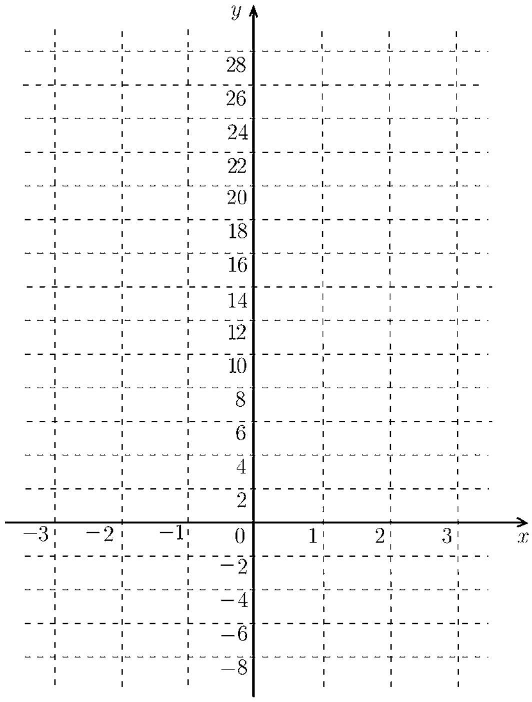
「関数のグラフとは，棒グラフのことである」を理解すること。

2 次関数のグラフ (2)

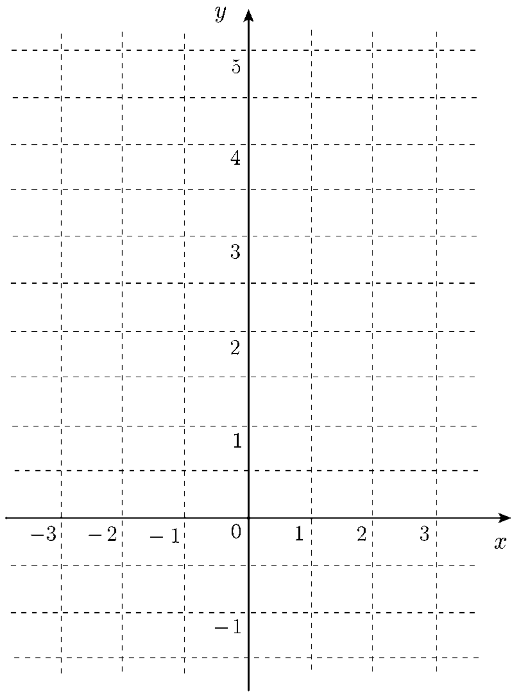
② $y = ax^2$ のグラフ

次の関数のグラフを同一座標平面上にかけ。

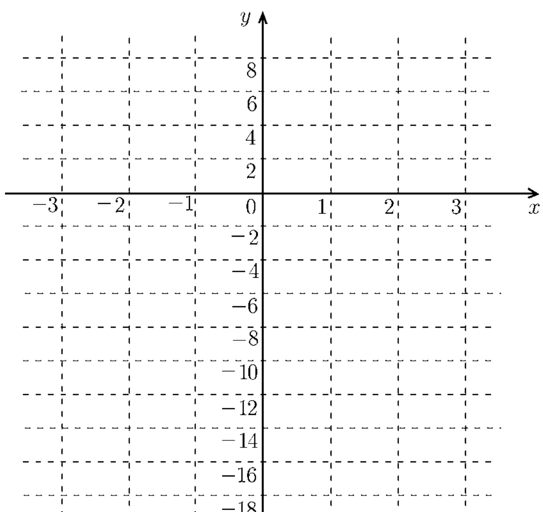
(1) $y = 2x^2$,　　$y = 3x^2$



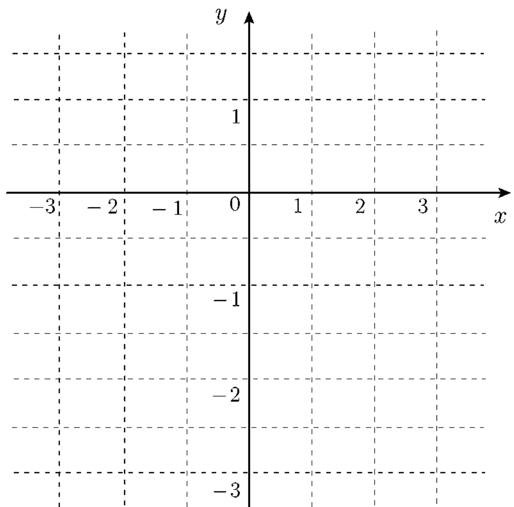
(2) $y = \frac{1}{2}x^2$,　　$y = \frac{1}{4}x^2$



(3) $y = -2x^2$,　　$y = -3x^2$



(4) $y = -\frac{1}{2}x^2$,　　$y = -\frac{1}{4}x^2$

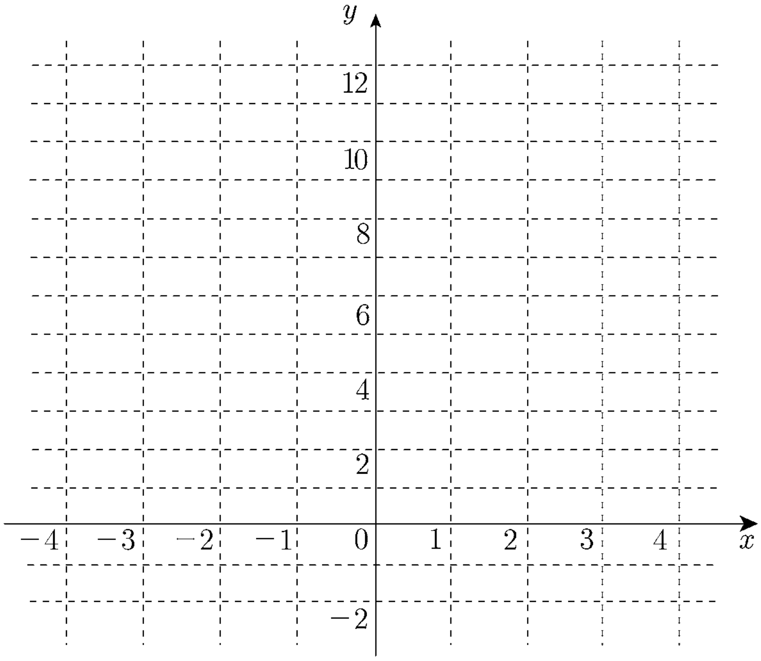


2 次関数のグラフ (3)

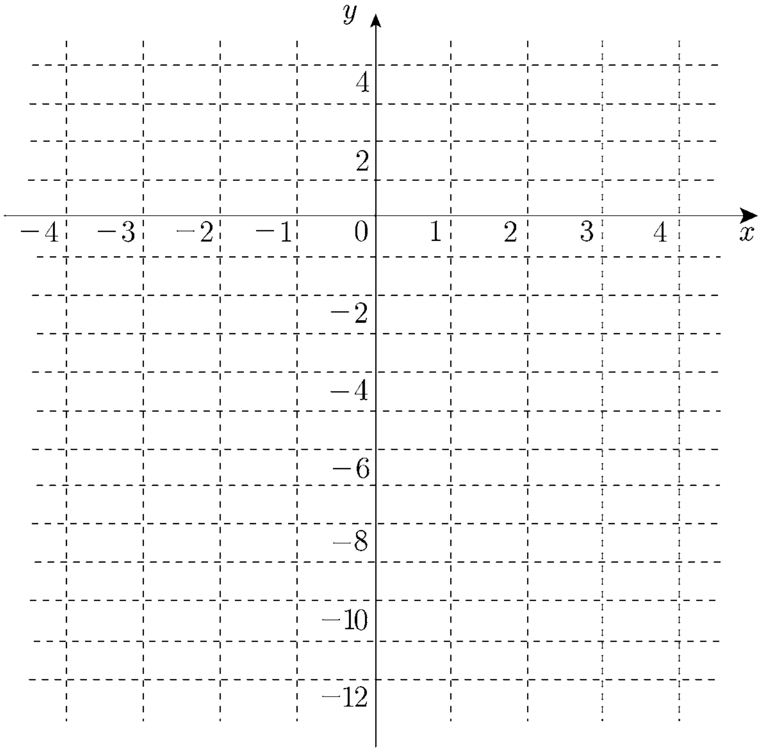
③ $y = x^2 + q$ のグラフ

次の関数のグラフを同一座標平面上にかけ。

(1) $y = x^2 + 1$, $y = x^2 + 3$, $y = x^2 - 1$



(2) $y = -x^2 + 1$, $y = -x^2 + 3$, $y = -x^2 - 3$

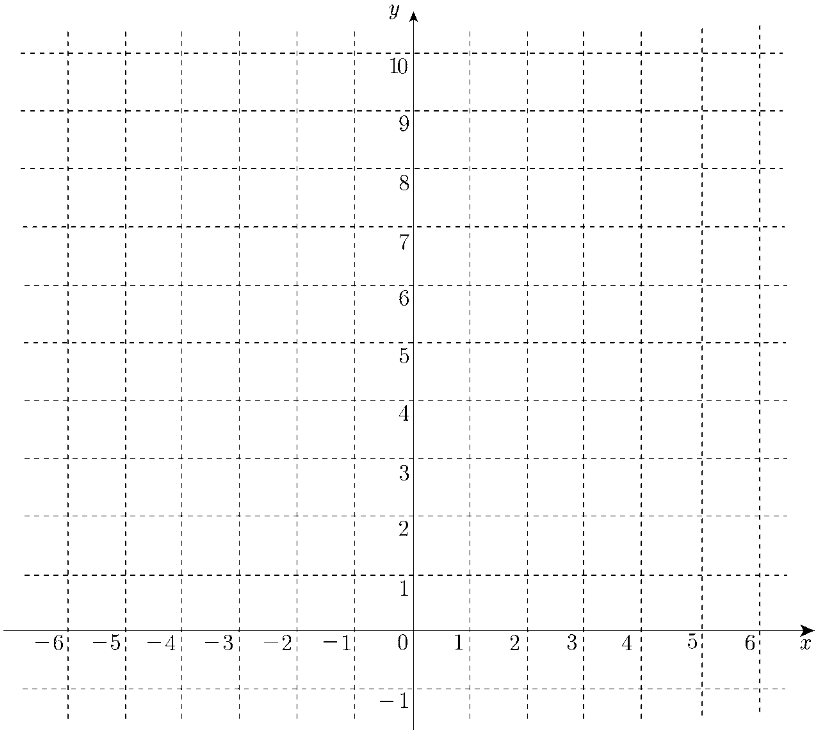


2 次関数のグラフ (4)

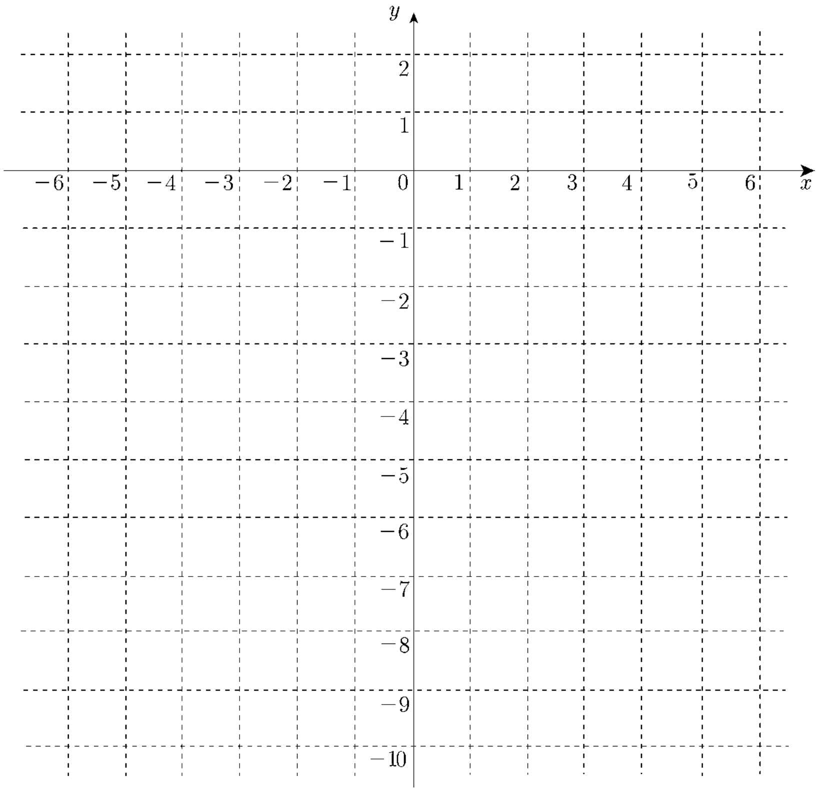
④ $y = (x - p)^2$ のグラフ

次の関数のグラフを同一座標平面上にかけ。

(1) $y = (x-1)^2$, 　　$y = (x+1)^2$



(2) $y = -(x-1)^2$, 　　$y = -(x+1)^2$



2 次式の変形

定数　a , b , c $(a \neq 0)$　に対して，2 次式を

$$ax^2 + bx + c = a(x + \square)^2 + \bigcirc$$

の形に変形する。

例

$$\begin{aligned} 2x^2 + 12x &= 2(x^2 + 6x) && \to \quad x^2 \text{ の係数 } 2 \text{ でくくる} \\ &= 2(x^2 + 2 \times 3x + 3^2 - 3^2) && \to \quad (x \text{ の係数の半分})^2 \text{ をたしてひく} \\ &= 2\left\{(x+3)^2 - 3^2\right\} && \to \quad \text{平方の形にする} \\ &= 2(x+3)^2 - 18 && \to \quad \{\ \ \} \text{ を除く} \end{aligned}$$

問　次の□と○に適する数をかけ。

(1) $x^2 + 8x = \left(x + \square\right)^2 - \bigcirc$

(2) $x^2 - 2x + 3 = \left(x - \square\right)^2 + \bigcirc$

(3) $x^2 + x + 1 = \left(x + \square\right)^2 + \bigcirc$

(4) $x^2 - 3x - 1 = \left(x - \square\right)^2 - \bigcirc$

(5) $2x^2 - 8x + 3 = 2\left(x - \square\right)^2 - \bigcirc$

(6) $-2x^2 + 4x - 1 = -2\left(x - \square\right)^2 + \bigcirc$

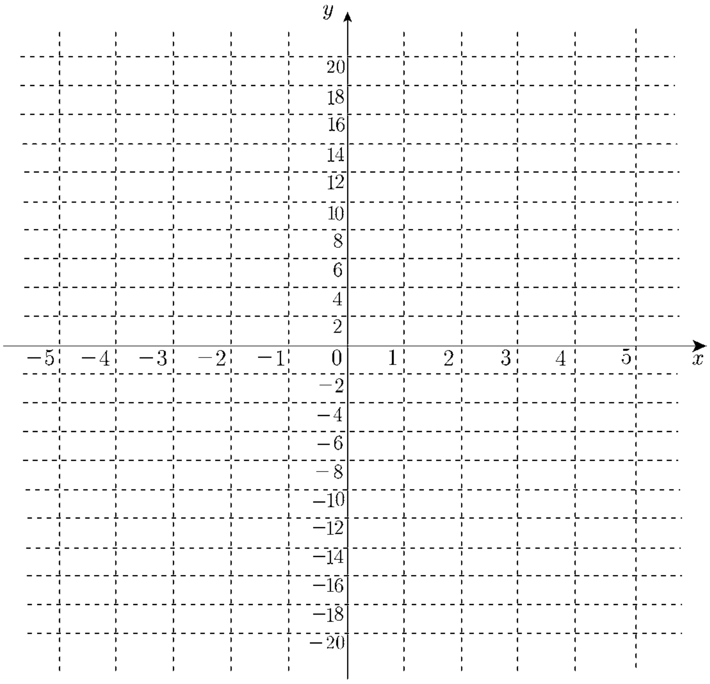
(7) $2x^2 + 5x + 2 = 2\left(x + \square\right)^2 - \bigcirc$

2 次関数のグラフ (5)

⑤ $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフ

次の関数のグラフを同一座標平面上にかけ。

(1) $y = (x-1)^2 + 2$,　　$y = -(x-1)^2 - 2$

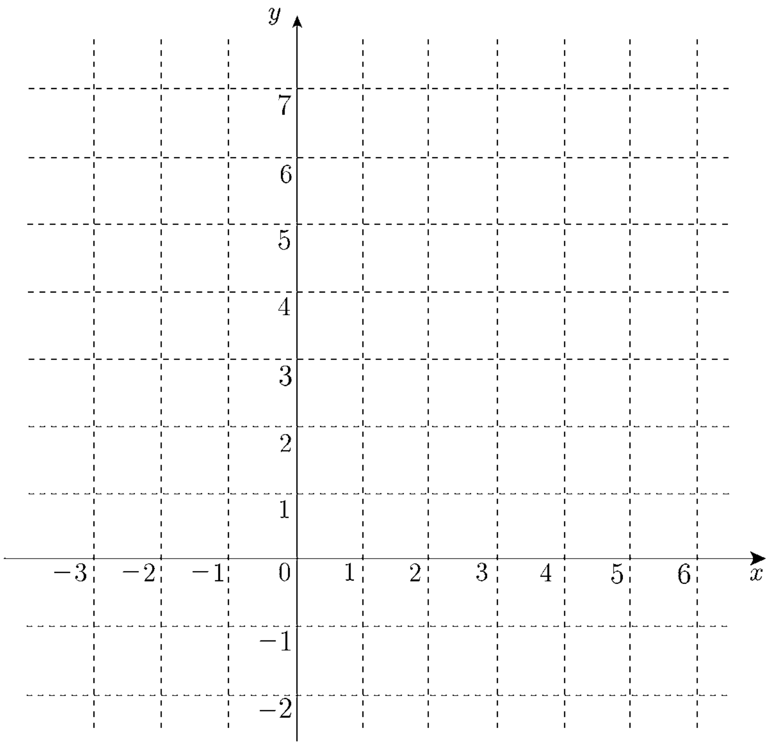


問　次の関数のグラフをかけ。

(1)　$y = x^2 - 6x + 13$

(2)　$y = 2x^2 - 8x + 8$

(3)　$y = -x^2 + 6x$



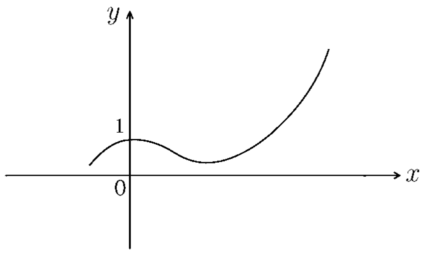
まとめると，2 次関数のグラフは，頂点の位置と x^2 の係数だけで決まる。

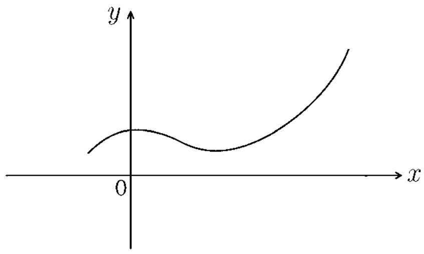
x^2 の係数は，2 次関数のグラフの形を決める。頂点は，グラフの移動に関係する。

練習問題

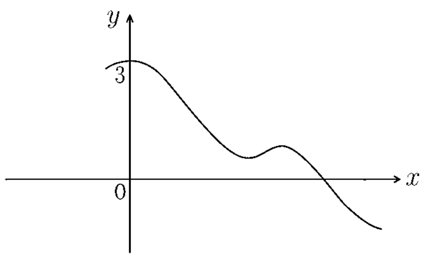
1　$y = f(x)$ のグラフが次のようなグラフであるとき，次の関数のグラフをかけ。

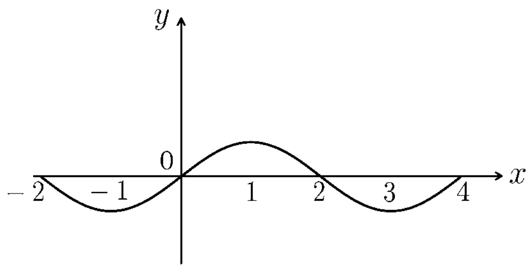
(1) $y = f(x) + 1$　　(2) $y = \dfrac{1}{2}f(x)$





(3) $y = f(x) - 3$　　(4) $y = f(x-1)$





2　次のグラフについて考える。

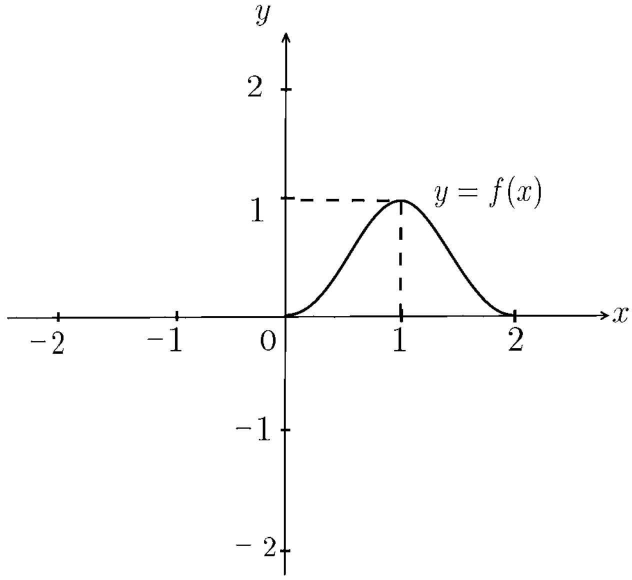
$y = f(x)$　　$(0 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq 1)$

そのときに，(1)〜(6) のグラフをかけ。

(1) $y = f(x) + 1$　　(2) $y = f(x) - 2$

(3) $y = 2f(x)$　　(4) $y = -f(x)$

(5) $y = f(x+2)$　　(6) $y = f(x-1)$



2 次不等式

不等式

$$x^2 - 1 > 0, \qquad x^2 - 2x - 1 < 0$$

のように、左辺が x の 2 次式となるように整理できる不等式を 2 次不等式という。

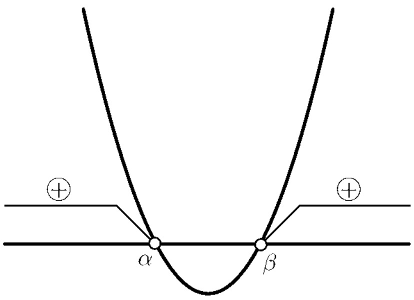
$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a > 0)$ の 2 つの解を α、$\beta \quad (\alpha < \beta)$ とすると、

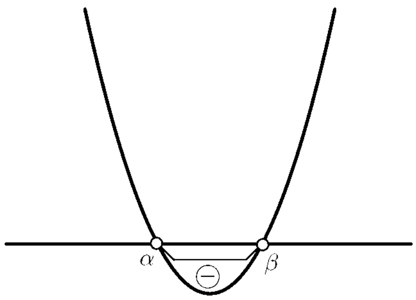
$ax^2 + bx + c > 0$ の解は

$$x < \alpha, \quad \beta < x$$

$ax^2 + bx + c < 0$ の解は

$$\alpha < x < \beta$$





問　次の 2 次不等式を解け。

(1) $(x-2)(x-3) > 0$

(2) $x(x+7) < 0$

(3) $x^2 + 2x - 3 > 0$

(4) $x^2 - 4 < 0$

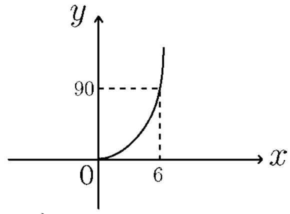
(5) $-x^2 - x + 12 \geqq 0$

(6) $-3x^2 + 2x + 4 \leqq 1$

2 次関数の問題

1 自動車が O 地点を出発してから、x 秒間に進む距離を y m とする。$0 \leqq x \leqq 6$ の範囲で、y は x の 2 乗に比例した。下のグラフはそのときの様子を表したものである。

(1) y を x の式であらわせ。



(2) 自動車が O 地点を出発すると同時に、秒速 12 m で走っているバイクが O 地点を通過した。自動車がバイクに追いつくのは、O 地点を出発してから何秒後か求めよ。(ヒント：バイクのグラフをかく)

2 傾きが一定の坂の頂上からボールを転がしたところ、ボールが転がり始めてから x 秒間に転がった距離を y m とすると、x と y には $y = \dfrac{1}{2}x^2$ という関係があるという。(ヒント：問題の内容を図にかく)

(1) ボールが転がると同時に、A 君は頂上からこの坂を秒速 $1m$ の速さで歩き始めた。A 君は、ボールが転がり始めてから何秒後にボールに追いつかれるか。

(2) B 君は、ボールが転がり始めてからしばらくして、頂上から一定の速さで走り始めた。B 君は、ボールが転がり始めてから 3 秒後にボールに追いつき、7 秒後にボールに追い抜かれた。B 君は毎秒何 m で走ったか。

3 時速 x km で走っている自動車にブレーキをかけて、ブレーキがきき始めてから停止するまで進む距離を y m とする。x と y の間には $y = ax^2$ の関係がある。時速 60 km で走っている自動車にブレーキをかけると、効き始めてから $18m$ 走って止まる。

(1) y を x の式であらわせ。

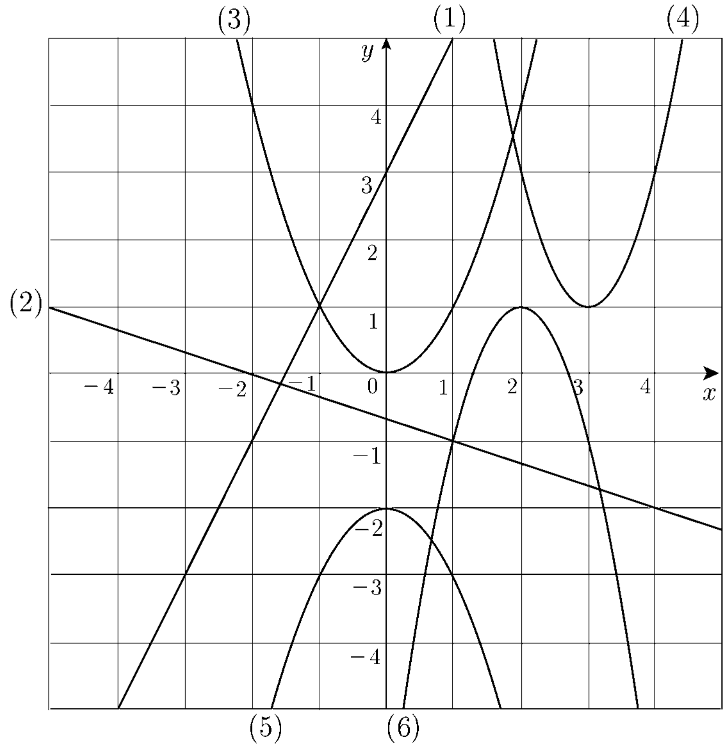
(2) 時速 80km で走っている自動車にブレーキをかけると、効き始めてから何m 走って止まるか。

(3) ブレーキが効き始めてから 50m 走って止まるときの速さを求めよ。

練習問題 1

問 1

右のグラフ (1)〜(6) に
相当する 1 次関数または
2 次関数の方程式をかけ。



(1)

(2)

(3)

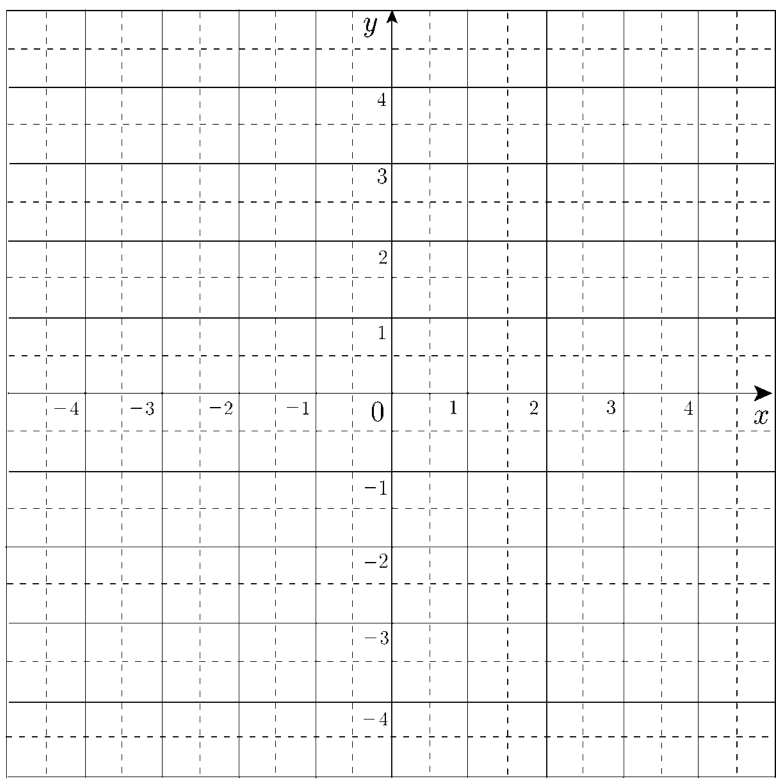
(4)

(5)

(6)

問 2

次の 1 次関数または
2 次関数のグラフをかけ。



(1) $y = 2x - 1$

(2) $x = -2$

(3) $y = 3$

(4) $y = x^2 + 1$

(5) $y = (x-2)^2$

(6) $y = -x^2 - 2x$

練習問題 2

1　次の連立方程式を解け。

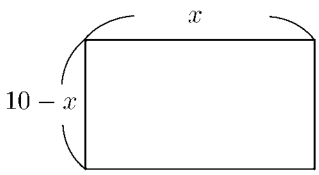
(1) $\begin{cases} 3x-4y=11 \\ 2x+3y=-4 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} a-2b+3c=-14 \\ 2a-3b+c=-11 \\ 3a+b-2c=5 \end{cases}$

2　次の 2 次関数のグラフの軸と頂点を求めよ。。

(1) $y=(x-1)^2$　　(2) $y=-3(x+2)^2$

(3) $y=(x-2)^2+5$　　(4) $y=-\dfrac{1}{2}(x+3)^2+4$

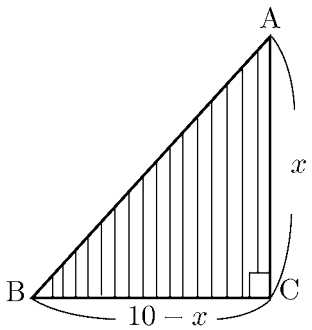
3　長さ 20cm の針金を折り曲げて長方形を作る。



(1)1 辺の長さを x とするとき，x の値の範囲を求めよ。

(2) 長方形の面積が 16cm^2 以上となる x の値の範囲を求めよ。

4



直角三角形 ABC があり直角をはさむ 2 辺 AC，BC の長さ の和は 10cm である。辺 AC の長さを x とおくとき，次の問に答えよ。

(1) x のとり得る範囲はいくらか。

(2) 直角三角形 ABC の面積を y とするとき y を x で表せ。

(3) y の最大値およびそのときの x の値を求めよ。

(4) 辺 AB の長さの平方を z とするとき，z を x で表せ。

(5) z の最小値およびそのときの x の値を求めよ。

指数関数

指数の拡張

a を n 個掛け合わせたものを a の n 乗といい、a^n で表す。

このとき、n を a^n の**指数**という。

m, n が自然数のとき、次の指数法則が成り立つ。

$$a^m \times a^n = a^{m+n}, \qquad (a^m)^n = a^{mn}, \qquad (ab)^n = a^n b^n$$

問 1　次の計算をせよ。

(1) $x^3 \times x^4$　　(2) $x^2 \times x$　　(3) $(x^3)^4$

(4) $(x^2)^4$　　(5) $(ab)^3$　　(6) $(a^2b^3)^4$

指数が 0 や負の整数のとき a^n をどのように定めるかを考えてみる。

0 や負の整数について，次のように定める。

$a \neq 0$ とき、　$a^0 = 1$,　$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

問 2　次の値を求めよ。

(1) 3^0　　(2) 5^{-1}

(3) 5^{-2}　　(4) 0.1^{-1}

(5) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$　　(6) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-1}$

問 3　次の計算を行い，結果を負の整数を用いないで表せ。

(1) $3x \div 5x^2$　　(2) $(-3x^2)^3$

(3) $x^3y \div xy^3$　　(4) $\left(\dfrac{1}{3}xy^2\right)^2 \times 27x^2y$

(5) $12x^2y^3 \div \left(-2xy^2\right)^2$　　(6) $(-3ab^2)^2 \div (-a^2b)$

分数の指数

分数の指数

3 乗すると a となる正の数を $\sqrt[3]{a}$ と表す。

このとき、

$$(a^{\frac{1}{3}})^3 = a^{\frac{1}{3}\times 3} = a^1 = a$$

となるから、

$$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$$

となることがわかる。また、

$$a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}\times 2} = (a^{\frac{1}{3}})^2 = (\sqrt[3]{a})^2$$

$$a^{\frac{2}{3}} = a^{2\times\frac{1}{3}} = (a^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$$

したがって、

$$a^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{a})^2 = \sqrt[3]{a^2}$$

まとめると、

$a > 0, m$ が整数、n が整数のとき

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \qquad a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

また、指数がどのような整数や分数（有理数）であっても、次の指数法則が成り立つ。

$a > 0, b > 0$ で、p, q が有理数のとき、

$$a^p \times a^q = a^{p+q}, \qquad (a^p)^q = a^{pq}, \qquad (ab)^p = a^p b^p$$

問 1　次の計算をせよ。(ただし、$a > 0, b > 0$ とする)

(1) $\sqrt{a} \times \sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[6]{a^5}$　　(2) $a\sqrt{a} \div \sqrt[3]{a}$

(3) $\sqrt{ab^3} \div \sqrt[3]{a^2 b}$　　(4) $\sqrt[6]{a^3 b} \times \sqrt[3]{ab} \div \sqrt[3]{ab^2}$

問 2　次の値を求めなさい。

(1) $4^{\frac{1}{2}}$　　(2) $27^{\frac{2}{3}}$　　(3) $8^{\frac{2}{3}}$

(4) $\left(\dfrac{1}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$　　(5) $(-4)^3$　　(6) $(-27)^{\frac{1}{3}}$

(7) $9^{\frac{3}{2}}$　　(8) $16^{\frac{3}{4}}$

指数関数のグラフ

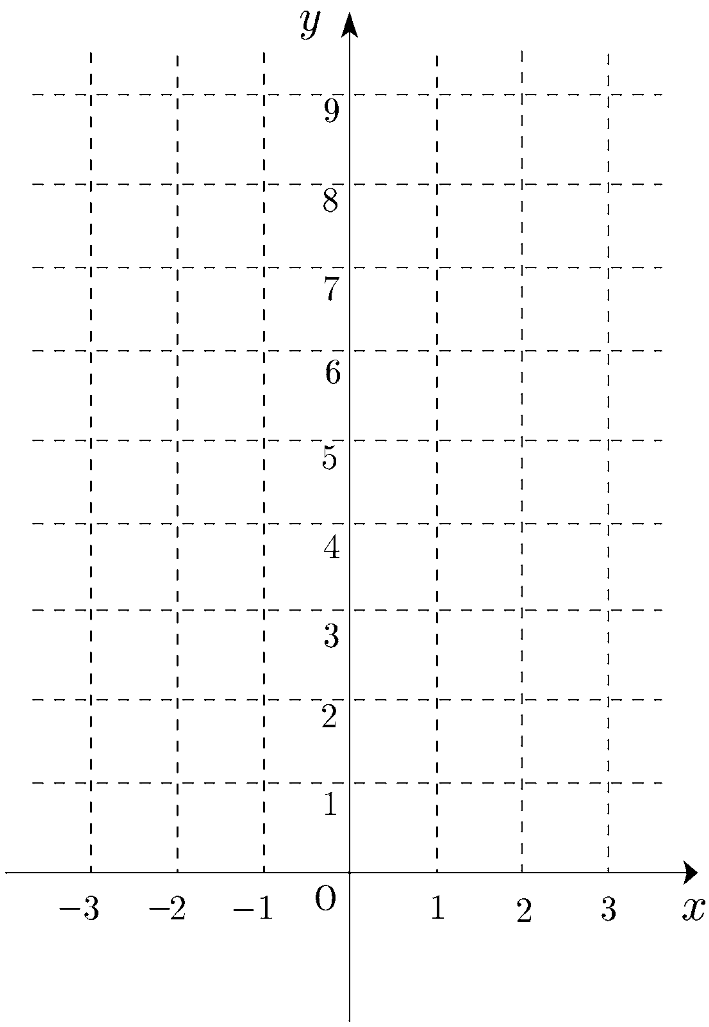
問　(1) $y = 2^x$ と, (2) $y = (\frac{1}{2})^x$ のグラフを表を完成してからかきなさい。

(1) $y = 2^x$

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
y	$\cdots$								$\cdots$

(2) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

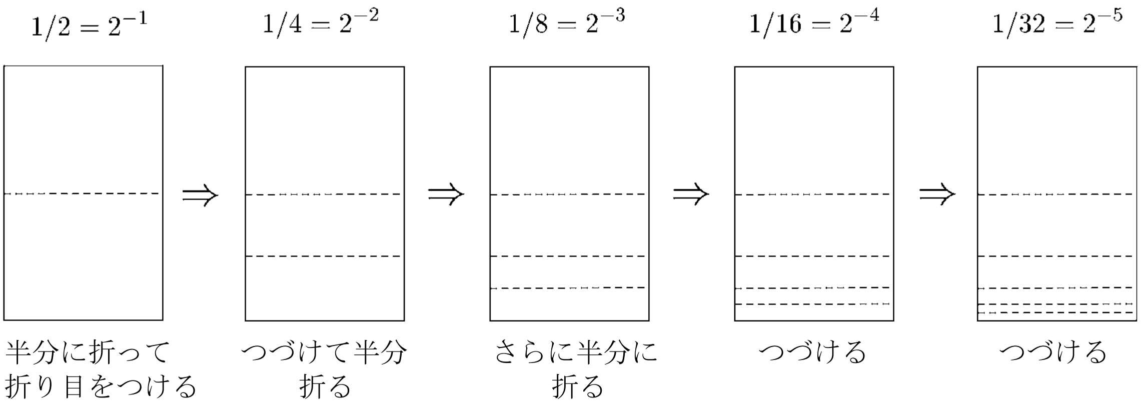
x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
y	$\cdots$								$\cdots$



$y = 2^x$ のグラフをかく

$y = 2^x$ のグラフを A4 を使って描いてみよう

① **A4**

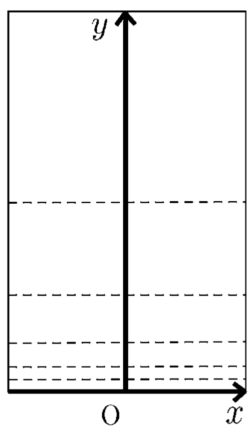


② 次に **A4** の用紙に

x 軸（用紙の下に描く）

y 軸（用紙の中心に描く）

それから、最適な目盛りをつける。



③ 気がついたことを自由に書いてみよう。

対数 (1)

常用対数

「$100 = 10^r$ となる r の値はいくらか」という問題の答えは 2 である。

このことを

$\log_{10} 100 = 2$　　(log はログと読む。)

と表す。

$\log_{10} 100$ ということは、「100 は 10 の何乗になるか」という意味である。

このことを、一般化すると、正の数 R に対して

$$R = 10^r$$

となるような数 r を、

$$\log_{10} R$$

と表す。$\log_{10} R$ を R の**常用対数**という。また 10 を**底**という。

100 は 10^2 である。これを $\log_{10} 100 = 2$ と表し、100 の常用対数は 2 であることを意味する。

つまり、対数という意味は「与えられた数に対する指数のこと」と考えるとよい。

問 1　次の式を $\log_{10}$ の記号を用いて表せ。

(1)　$1000 = 10^3$　　(2)　$1 = 10^0$

(3)　$0.01 = 10^{-2}$　　(4)　$\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}}$

問 2　次の値を求めよ。

(1)　$\log_5 125$　　(2)　$\log_{16} 4$

(3)　$\log_3 \sqrt{3}$　　(4)　$\log_{\frac{1}{2}} 16$

対数 (2)

一般の対数

$8 = 2^3$ である。このことを

$$\log_2 8 = 3$$

と表して、これを

「2 を底とする 8 の対数は 3 である。」という。

一般に、$R = a^r$ のとき　(a は 1 でない正の数とする)

$$\log_a R = r$$

と表し、

「a を底とする R の対数は r である」という。

つぎに、$\log_a M, \log_a N$ の値が与えられているとき、

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

の式が成り立つことを証明する。

$$\log_a M = m, \quad \log_a N = n$$

とおくと、

$$M = a^m, \quad N = a^n$$

となる。

$$MN = M \times N = a^m \times a^n = a^{m+n}$$

であるから

$$\log_a MN = m + n = \log_a M + \log_a N$$

となる。

問 1　指数法則

$$a^m \div a^n = a^{m-n}, (a^m)^n = a^{mn}$$

を利用して、次の性質を導け。

2.　$\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

3.　$\log_a M^n = n \log_a M$

問 2　次の式を簡単にせよ。

(1)　$\log_3 27$　　(2)　$\log_{10} \dfrac{1}{10000}$

(3)　$\log_4 2 + \log_4 32$　　(4)　$\log_3 \sqrt{54} - \log_3 \sqrt{6}$

(5)　$\log_2 \dfrac{8}{3} + \log_2 6$　　(6)　$\log_5 75 - \log_5 3$

対数 (3)

底の変換の公式

$a^0 = 1,\quad a^1 = a$ であるから、

$$\log_a 1 = 0, \qquad \log_a a = 1$$

が成り立つことがわかる。

次に、a を底とする対数 $\log_a b$ を、c を底とする対数で表してみよう。

$$\log_a b = p$$

とおくと

$$a^p = b$$

両辺に c を底とする対数をとると

$$\log_c a^p = \log_c b \qquad p \log_c a = \log_c b$$

$a \neq 1$ であるから、$\log_c a \neq 0$

したがって

$$p = \frac{\log_c b}{\log_c a} \qquad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

(底の変換の公式)

とくに

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

問　次の式を計算せよ。

(1)　$\log_{10} 60 + 2\log_{10}\sqrt{5} - \log_{10} 3$

(2)　$\log_2 4 - \log_2 3 + \log_2 6$

(3)　$\log_8 5 \cdot \log_{49} 16 \cdot \log_5 7$

(4)　$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a$

(5)　$\left(\log_3 \sqrt{2} + \log_9 \sqrt[3]{4}\right) \log_2 3$

(6)　$\log_2 8\sqrt{6} + \log_2 2\sqrt{2} - \log_2 \sqrt{3}$

対数関数のグラフ

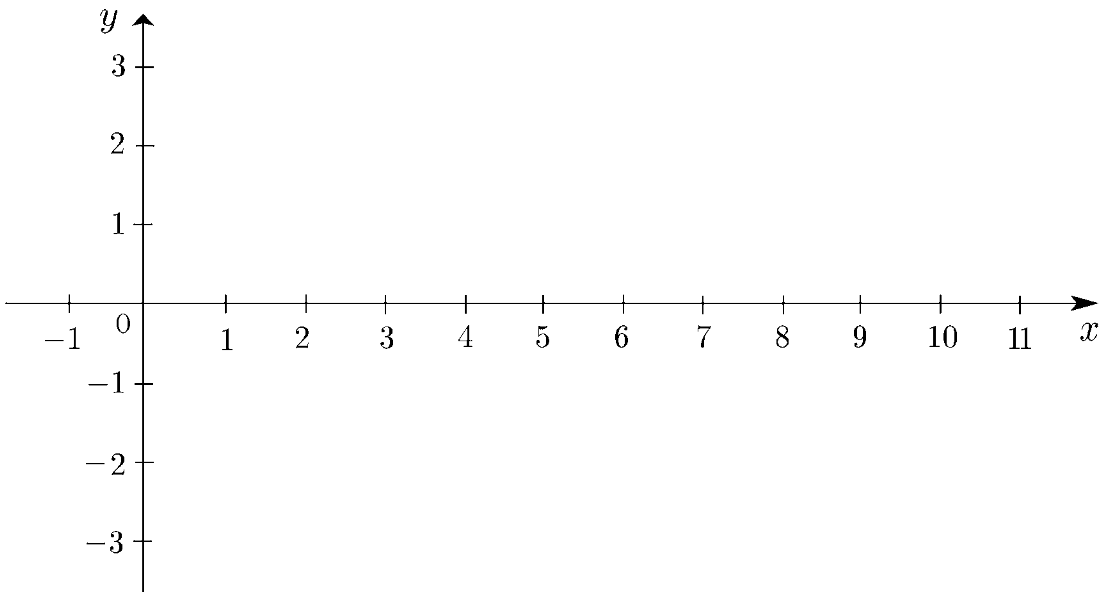
問 (1) $y = \log_2 x$ と, (2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフを表を完成してからかきなさい。

(1) $y = \log_2 x$

x	$\cdots$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	$\cdots$
y										

(2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

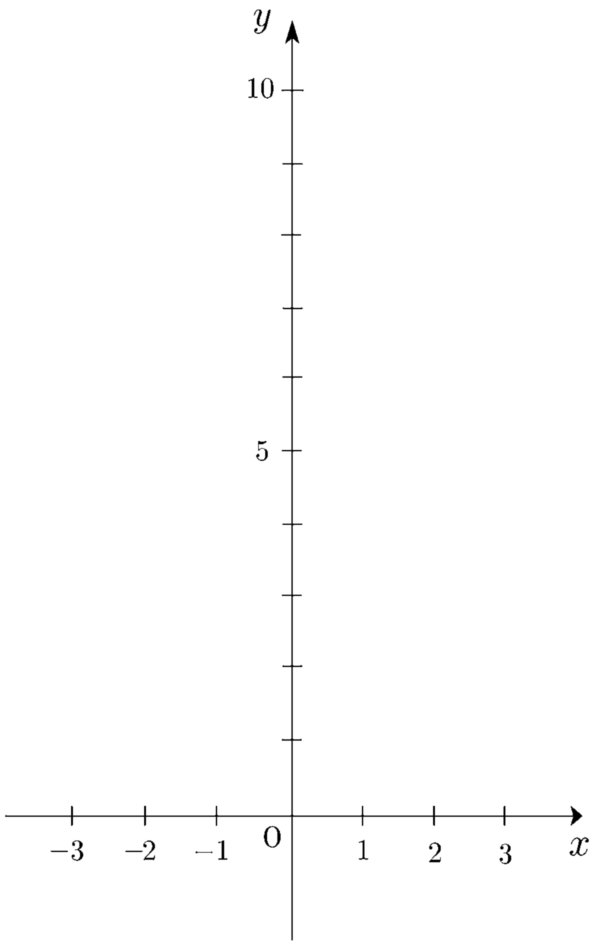
x	$\cdots$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	$\cdots$
y										



関数のグラフ

問 1　次の関数のグラフを同じ座標平面上にかけ。

1. $y = x^2$
2. $y = x$
3. $y = 2^x$
4. $y = 2^{-x}$



問 2　1. $y = x$ と $y = x^2$ の交点の座標を求めよ。

2. $x \geqq 0$ のとき、$y = x^2$ と $y = 2^x$ の交点の座標を求めよ。

3. $x \leqq 0$ のとき、$y = x^2$ と $y = 2^{-x}$ の交点の座標を求めよ。

指数関数と対数関数の比較

指数関数 $y = 2^x$　　　**対数関数 $y = \log_2 x$**

1. 定義

真数 $M > 0$

$$a^p = M \iff p = \log_a M$$

底 $a > 0$, $a \neq 1$

$$a^0 = 1, \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\log_a 1 = 0, \qquad \log_a a = 1$$

2. 指数法則

① $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ⟷ $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

② $a^m \div a^n = a^{m-n}$ ⟷ $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

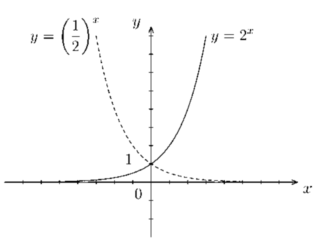
③ $(a^m)^n = a^{mn}$ ⟷ $\log_a M^k = k \log_a M$

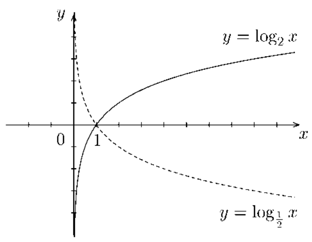
④ $(ab)^n = a^n b^n$ ⟷ $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$　(底の変換の公式)

(条件 $a > 0, b > 0, m, n$ は有理数)

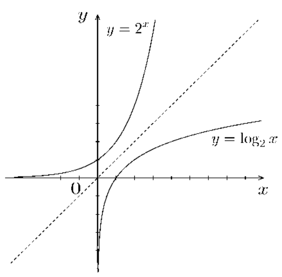
(条件 $a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0, k$ は実数)
$b > 0, b \neq 1,$
$c > 0, c \neq 1$

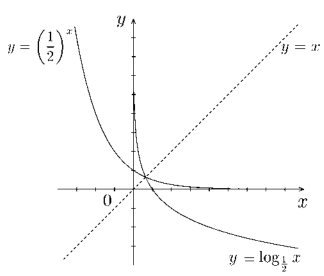
3. グラフ





4. グラフ





5.　わかったことをかきなさい。

指数・対数の問題

1 次の計算をせよ。

(1) $a^5 \times a^{-3}$　(2) $(a^{-3})^2$　(3) $(a^2b^{-1})^2$

(4) $(ab^{-2})^{-2}$　(5) $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a^2}$　(6) $a^2 \div a^{-3}$

(7) $a^{-\frac{1}{2}} \times a^{\frac{5}{6}} \div a^{\frac{1}{3}}$

2 次の値を求めよ。

(1) $\sqrt[3]{125}$　(2) $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9}$　(3) $\sqrt[4]{16}$

(4) $\sqrt[3]{-8}$　(5) $(0.1)^{-1}$　(6) $27^{\frac{2}{3}}$

(7) $3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{3}{2}}$　(8) $\sqrt[4]{25} \times \sqrt[6]{125}$

3 次の関数のグラフを書け。

(1) $y = 3^x$　(2) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

4 次の値を計算せよ。

(1) $\log_{10} 1$　(2) $\log_{10} 10$　(3) $\log_{10} 100$

(4) $\log_{10} 0.1$　(5) $\log_{10} \dfrac{1}{100}$　(6) $\log_2 4$

(7) $\log_6 4 + \log_6 9$　(8) $\log_3 15 - \log_3 5$　(9) $\dfrac{1}{2} \log_7 49$

(10) $(\log_2 3) \times (\log_3 2)$

5 次の関数のグラフを書け。

(1) $y = \log_3 x$　(2) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

6 次の方程式を解け。

(1) $2^{x+2} = 16$　(2) $\log_5 x - \log_5 2 = 2$