



高知工科大学

Kochi University of Technology

基礎数学 ワークブック No. 7

「線形代数入門」

解答



## P.9 問1の解答

行列式の性質 $\boxed{6}$ と列展開より

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} \\
&= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} - d_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} \\
&= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

## 問2の解答

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} &= 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 0 - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -2 \times 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2
\end{aligned}$$

## 問3の解答

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\
&= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

## P.10 問1の解答

$$(1) \begin{vmatrix} 23 & 115 \\ 37 & 185 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 23 & 0 \\ 37 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(2) \begin{vmatrix} 47 & 53 \\ 142 & 161 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 47 & 53 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 94 - 53 = 41$$

## P.10 問2の解答

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 7 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} = 7 \quad (2) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \times \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -14$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 3(1 + 3) = 11$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 7 + 7 = 14$$

## P.11 問1の解答

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 10 & 15 \\ 3 & 16 & 24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

$$(2) \begin{vmatrix} 23 & 10 & 32 \\ 2 & 1 & 3 \\ 50 & 23 & 70 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -5$$

## 問2の解答

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - (-2) \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

## P.12 問の解答

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24 \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$(3) \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 2 \\ 9 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\ = -1 \times \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} = -(12 - 18) = 6$$

$$(4) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ = 2 \times \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times (-2) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -16$$

$$(5) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

## P.13 問の解答

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad z = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

## P.17 問の解答

$$(1) \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$(*) \ c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + c_3 \mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$$

とおくと, (\*) は次の連立方程式

$$(*) \begin{cases} c_1 + c_2 + 2c_3 = 0 \\ 2c_1 + 3c_2 + 7c_3 = 0 \\ 3c_1 + 5c_2 + 12c_3 = 0 \end{cases}$$

と同じ。これを基本変形によって解く。

$$\begin{array}{cccc} \hline 1 & 1 & 2 & \cdots \textcircled{1} \\ \hline 2 & 3 & 7 & \cdots \textcircled{2} \\ \hline 3 & 5 & 12 & \cdots \textcircled{3} \\ \hline & \downarrow & & \\ \hline 1 & 1 & 2 & \cdots \textcircled{1} \\ \hline 0 & 1 & 3 & \cdots \textcircled{2} - \textcircled{1} \times 2 = \textcircled{2}' \\ \hline 0 & 2 & 6 & \cdots \textcircled{3} - \textcircled{1} \times 3 = \textcircled{3}' \\ \hline & \downarrow & & \\ \hline 1 & 0 & -1 & \cdots \textcircled{1} - \textcircled{2}' = \textcircled{1}' \\ \hline 0 & 1 & 3 & \cdots \textcircled{2}' \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots \textcircled{3}' - \textcircled{2}' \times 2 = \textcircled{3}'' \\ \hline \end{array}$$

$$\textcircled{1}' \text{ より } c_1 - c_3 = 0$$

$$\textcircled{2}' \text{ より } c_2 + 3c_3 = 0$$

$$(*) \text{ の解は } \underline{c_1 = t, c_2 = -3t, c_3 = t}$$

( $t$  は任意の定数)

と表される。従って全ては0でない(\*)の解  $c_1, c_2, c_3$  が存在するので,  $\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3$  は1次従属である。

$$(2) \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$(*) \ c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + c_3 \mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$$

とおくと, (\*) は次の連立方程式

$$(*) \begin{cases} c_1 + 2c_2 + 4c_3 = 0 \\ 3c_1 + c_2 + 5c_3 = 0 \\ 6c_1 + 7c_2 + 15c_3 = 0 \end{cases}$$

と同じ。これを基本変形によって解く。

$$\begin{array}{cccc} \hline 1 & 2 & 4 & \cdots \textcircled{1} \\ \hline 3 & 1 & 5 & \cdots \textcircled{2} \\ \hline 6 & 7 & 15 & \cdots \textcircled{3} \\ \hline & \downarrow & & \\ \hline 1 & 2 & 4 & \cdots \textcircled{1} \\ \hline 0 & -5 & -7 & \cdots \textcircled{2} - \textcircled{1} \times 3 = \textcircled{2}' \\ \hline 0 & -5 & -9 & \cdots \textcircled{3} - \textcircled{1} \times 6 = \textcircled{3}' \\ \hline & \downarrow & & \\ \hline 1 & 2 & 4 & \cdots \textcircled{1} \\ \hline 0 & -5 & -7 & \cdots \textcircled{2}' \\ \hline 0 & 0 & -2 & \cdots \textcircled{3}' - \textcircled{2}' = \textcircled{3}'' \\ \hline & \downarrow & & \\ \hline 1 & 2 & 0 & \cdots \textcircled{1} + \textcircled{3}'' \times 2 = \textcircled{1}' \\ \hline 0 & -5 & 0 & \cdots \textcircled{2}' - \textcircled{3}'' \times \left(\frac{7}{2}\right) = \textcircled{2}'' \\ \hline 0 & 0 & 1 & \cdots \textcircled{3}'' \times \left(\frac{1}{-2}\right) = \textcircled{3}''' \\ \hline & \downarrow & & \\ \hline 1 & 0 & 0 & \cdots \textcircled{1}' + \textcircled{2}'' \times \left(\frac{2}{5}\right) = \textcircled{1}'' \\ \hline 0 & 1 & 0 & \cdots \textcircled{2}'' \div (-5) = \textcircled{2}''' \\ \hline 0 & 0 & 1 & \cdots \textcircled{3}''' \\ \hline \end{array}$$

$$\textcircled{1}'' \text{ より } c_1 = 0, \textcircled{2}''' \text{ より } c_2 = 0$$

$$\textcircled{3}''' \text{ より } c_3 = 0 \text{ よって } (*) \text{ の解は}$$

$$\underline{c_1 = c_2 = c_3 = 0}$$

だけである。従って  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$  は1次独立である。

## P.20 問1の解答

$$S = |\mathbf{a}| \times |\mathbf{b}| \times \sin \theta$$

## 問2の解答

$$S^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \sin^2 \theta = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 (1 - \cos^2 \theta) = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$$

## 問3の解答

$$\begin{aligned} S^2 &= |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \\ &= a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_1^2 + a_3^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2 \\ &\quad - (a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2 + 2a_1 a_2 b_1 b_2 + 2a_2 a_3 b_2 b_3 + 2a_1 a_3 b_1 b_3) \\ &= (a_2^2 b_3^2 - 2a_2 b_3 a_3 b_2 + a_3^2 b_2^2) + (a_3^2 b_1^2 - 2a_3 b_1 a_1 b_3 + a_1^2 b_3^2) + (a_1^2 b_2^2 - 2a_1 b_2 a_2 b_1 + a_2^2 b_1^2) \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \end{aligned}$$

## P.21 問1の解答

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 32$$

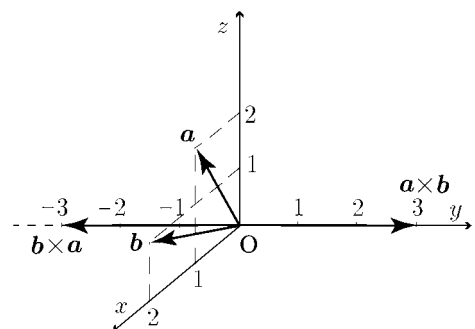
## 問2の解答

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} &= \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\ &= a_2 b_1 b_3 - a_3 b_1 b_2 + a_3 b_1 b_2 - a_1 b_2 b_3 + a_1 b_2 b_3 - a_2 b_1 b_3 = 0 \end{aligned}$$

内積が0になるので  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  と  $\mathbf{b}$  は直交している。

## P.22 問の解答

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} \times \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$



## P.25 問の解答

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  が同一平面上にある  $\iff \mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c}$  の作る平行六面体の体積 = 0  $\iff D = 0$   
より (答)  $D = 0$

## P.26 問1の解答

$\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  が一次従属であれば1つのベクトルが他の2つのベクトルの1次結合として表される。たとえば

$$\mathbf{c} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} \quad (x, y \in \mathbf{R})$$

とおく。このとき  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  は同一平面上にあることを示す。

① ( $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  が平行であるとき)

$\mathbf{b} = k\mathbf{a}$  ( $k \in \mathbf{R}$ ) と表されるので  $\mathbf{c} = (x + ky)\mathbf{a}$  より  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  は平行だから、同一平面上にある。

② ( $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  が平行でないとき)  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$  であり、

$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (x\mathbf{a} + y\mathbf{b}) = x(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} + y(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$  によって  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  と  $\mathbf{c}$  は直交している。 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  は  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  のつくる平面と直交しているので  $\mathbf{c}$  は  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  のつくる平面上にあることがわかる。

## 問2の解答

$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$  とおく。問1と前のページ間の結果より、

$\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  が1次従属  $\iff \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  は同一平面上にある  $\iff D = 0$   
すなわち 1次従属になる必要十分条件は  $D = 0$ 。

## 問3の解答

$\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$ ,  $\mathbf{a}_3$  が1次独立であれば  $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$  である。

(\*)  $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$  とおくと、クラメールの公式より

$$c_1 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad c_2 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad c_3 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} \quad \text{となる。}$$

これは  $\mathbf{b} = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3$  と表されることを意味する。

## 問4の解答

①  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$ ,  $\mathbf{a}_3$  が1次独立のとき  $\mathbf{a}_4$  は  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$ ,  $\mathbf{a}_3$  の1次結合で表される。

②  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$ ,  $\mathbf{a}_3$  が1次従属のとき  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$ ,  $\mathbf{a}_3$ ,  $\mathbf{a}_4$  は1次従属である。

## P.27 問1の解答

連立方程式

(1)  $x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_4 \mathbf{a}_4 = \mathbf{0}$  (ゼロベクトル)

の解  $x_1, x_2, x_4$  は

(2)  $x_1 \mathbf{b}_1 + x_2 \mathbf{b}_2 + x_4 \mathbf{b}_4 = \mathbf{0}$  (ゼロベクトル)

の解でもある。逆に(2)の解  $x_1, x_2, x_4$  は(1)の解でもある。今  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_4$  が1次独立だから  $x_1 = x_2 = x_4 = 0$  である。これは(1)式の解が自明な解 ( $x_1 = x_2 = x_4 = 0$ ) しかないことを意味する。すなわち  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4$  は1次独立である。

## 問2の解答

(\*)  $x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_3 \mathbf{a}_3 + x_4 \mathbf{a}_4 = \mathbf{0}$

とおき、右のように基本変形によって

(\*)'  $x_1 \mathbf{b}_1 + x_2 \mathbf{b}_2 + x_3 \mathbf{b}_3 + x_4 \mathbf{b}_4 = \mathbf{0}$

の形にすると

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と書けるので、(\*)'の解として

(\*\*)  $x_1 = -3, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0$

が存在する。(\*\*)は(\*)の解でもあるので

 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$  は1次従属であり、

$$-3\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$$

より  $\mathbf{a}_3 = 3\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$  と表される。一方  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_4$  は1次独立であるから、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4$  も1次独立である。すなわち1次独立なベクトルの 最大個数は3 である。 $\mathbf{a}_3$  は  $3\mathbf{a}_1 + (-1)\mathbf{a}_2$  と表される。

$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$		
2	1	5	1	...	①
1	0	3	1	...	②
4	2	10	1	...	③
3	1	8	2	...	④
0	1	-1	-1	...	① - ② × 2 = ①'
1	0	3	1	...	② = ②'
0	2	-2	-3	...	③ - ② × 4 = ③'
0	1	-1	-1	...	④ - ② × 3 = ④'
1	0	3	1	...	①' ↔ ②' ⇒ ①''
0	1	-1	-1	...	②' ↔ ①' ⇒ ②''
0	0	0	-1	...	③' - ①' × 2 = ③''
0	0	0	0	...	④' - ①' = ④''
1	0	3	0	...	①'' + ③''
0	1	-1	0	...	②'' - ③''
0	0	0	1	...	③'' × (-1)
0	0	0	0	...	④''
$\mathbf{b}_1$	$\mathbf{b}_2$	$\mathbf{b}_3$	$\mathbf{b}_4$		

## P.28 問の解答

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n (\in \mathbf{R}^n)$  が 1 次独立ならば  $\text{rank}(A) = n$  であり,  $A$  を簡約した行列を  $B = (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \dots \ \mathbf{b}_n)$  とおくと  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$  は 1 次独立である。従って

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{b}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となり,  $B$  は単位行列となるので,  $\det(B) = 1$  である。

## P.29 問 1 の解答

$A$  を簡約した行列を  $B$  とすると, P28 問の結果より  $\det(B) = 1$

よって  $\det(A) = K \det(B) = K \times 1 = K \neq 0$

### 問 2 の解答

(\*)  $x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$  (ゼロベクトル)

とおくと, クラームルの公式より

$$x_k = \frac{\det(\mathbf{a}_1 \ \dots \ \overset{(k)}{\mathbf{0}} \ \dots \ \mathbf{a}_n)}{\det(\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_k \ \dots \ \mathbf{a}_n)} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

より (\*) は自明な解 ( $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ ) しか持たないので,  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  は 1 次独立である。

### 問 3 の解答

$\mathbf{b}_k$  の転置行列を  ${}^t \mathbf{b}_k = \begin{pmatrix} b_{k1} \\ b_{k2} \\ \vdots \\ b_{kn} \end{pmatrix} (\in \mathbf{R}^n)$  とおくと

$$c_1 \mathbf{b}_1 + c_2 \mathbf{b}_2 + \dots + c_n \mathbf{b}_n = \mathbf{0} (\in \mathbf{R}_n) \Leftrightarrow c_1 {}^t \mathbf{b}_1 + c_2 {}^t \mathbf{b}_2 + \dots + c_n {}^t \mathbf{b}_n = \mathbf{0} (\in \mathbf{R}^n)$$

より列ベクトルの 1 次独立性の必要十分条件から

$$\det({}^t \mathbf{b}_1 \ {}^t \mathbf{b}_2 \ \dots \ {}^t \mathbf{b}_n) = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

**P.32 問の解答**

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**P.33 問の解答**

$$(1) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

**P.34 問1の解答**

$$x' = r(\cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta) = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$y' = r(\sin \alpha \cos \theta - \cos \alpha \sin \theta) = y \cos \theta - x \sin \theta$$

**問2の解答**

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{よ} \text{り} \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

**問3の解答**

$$A^{-1} = \frac{1}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \begin{pmatrix} \cos \theta & -(-\sin \theta) \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

**問4の解答**

$$\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

**問5の解答**

$$(1) \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

**P.35 問1の解答**

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c & \gamma b + \delta d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

**問2の解答**

$$AB = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c & \gamma b + \delta d \end{pmatrix}$$

**P.36 問1の解答**

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha & -\cos \beta \sin \alpha - \sin \beta \cos \alpha \\ \sin \beta \cos \alpha + \cos \beta \sin \alpha & -\sin \beta \sin \alpha + \cos \beta \cos \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**問2の解答**

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix}$$

**P.37 問の解答**

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \\ A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d(ax + by) - b(cx + dy) \\ -c(ax + by) + a(cx + dy) \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} (da - bc)x \\ (-bc + ad)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**P.38 問の解答**

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ 17 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 27 \\ 33 \end{pmatrix}$$

より、原点  $(0, 0, 0)$  は原点に、点  $(1, 0, 0)$  は点  $(1, 3, 5)$ 、点  $(0, 1, 0)$  は点  $(7, 9, 11)$  に、点  $(0, 0, 1)$  は点  $(13, 15, 17)$  に、点  $(1, 1, 1)$  は点  $(21, 27, 33)$  に移る。

**P.39 問の解答**

$$(1) \quad \begin{aligned} x' &= x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' &= x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

**P.40. 問1の解答**

$$a' = a \cos \theta - b \sin \theta$$

$$b' = a \sin \theta + b \cos \theta$$

**問2の解答**

$$y' = y \cos \theta - z \sin \theta$$

$$z' = y \sin \theta + z \cos \theta$$

**問3の解答**

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

**P.41 問1の解答**

$$z' = z \cos \theta - x \sin \theta$$

$$x' = z \sin \theta + x \cos \theta$$

**問2の解答**

$$x' = x \cos \theta + z \sin \theta$$

$$y' = y$$

$$z' = -x \sin \theta + z \cos \theta$$

**問3の解答**

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

**P.42 問1の解答**

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

**問2の解答**

$$BA = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -\sin \varphi & \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \theta & \cos \varphi & \sin \varphi \sin \theta \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

## P.43 問1の解答

$$(1) \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad (2) \quad {}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad {}^t\mathbf{p} = (p_1 \ p_2 \ p_3) \qquad (4) \quad {}^t\mathbf{r} = (3 \ 4)$$

## 問2の解答

$$(1) \quad A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x + b_1y + c_1z \\ a_2x + b_2y + c_2z \\ a_3x + b_3y + c_3z \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad {}^t\mathbf{x} {}^tA = (xa_1 + yb_1 + zc_1 \quad xa_2 + yb_2 + zc_2 \quad xa_3 + yb_3 + zc_3) = {}^t(A\mathbf{x})$$

## 問3の解答

$$|A\mathbf{x}|^2 = {}^t(A\mathbf{x})(A\mathbf{x}) = {}^t\mathbf{x} {}^tAA\mathbf{x}$$

## P.44 問1の解答

$$(1) \quad \textcircled{1} |\mathbf{p}_1|^2 = 1 \qquad \textcircled{2} |\mathbf{p}_2|^2 = 1 \qquad \textcircled{3} \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = 0$$

$$(2) \quad P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

## 問2の解答

$${}^tPP = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{より } P \text{ は直交行列で, } P^{-1} = {}^tP = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

## P.45 問の解答

$$(1) \quad \textcircled{1} |\mathbf{p}_1|^2 = 1 \qquad \textcircled{2} |\mathbf{p}_2|^2 = 1 \qquad \textcircled{3} |\mathbf{p}_3|^2 = 1$$

$$\textcircled{4} \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = 0 \qquad \textcircled{5} \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_3 = 0 \qquad \textcircled{6} \mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{p}_1 = 0$$

$$(2) \quad {}^tPP = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{p}_1 \\ {}^t\mathbf{p}_2 \\ {}^t\mathbf{p}_3 \end{pmatrix} (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \mathbf{p}_3) = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{p}_1\mathbf{p}_1 & {}^t\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 & {}^t\mathbf{p}_1\mathbf{p}_3 \\ {}^t\mathbf{p}_2\mathbf{p}_1 & {}^t\mathbf{p}_2\mathbf{p}_2 & {}^t\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3 \\ {}^t\mathbf{p}_3\mathbf{p}_1 & {}^t\mathbf{p}_3\mathbf{p}_2 & {}^t\mathbf{p}_3\mathbf{p}_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |\mathbf{p}_1|^2 & \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 \\ \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_1 & |\mathbf{p}_2|^2 & \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_3 \\ \mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{p}_2 & |\mathbf{p}_3|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## P.45 問の解答

$$(3) \quad P^{-1} = {}^tP = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}} & -\frac{2}{\sqrt{14}} \\ -\frac{3}{\sqrt{70}} & \frac{5}{\sqrt{70}} & \frac{6}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}$$

## P.46 問の解答

$$(1) \quad {}^tPP = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{p}_1 \\ {}^t\mathbf{p}_2 \\ {}^t\mathbf{p}_3 \end{pmatrix} (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \mathbf{p}_3) = \begin{pmatrix} |\mathbf{p}_1|^2 & \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 \\ \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_1 & |\mathbf{p}_2|^2 & \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_3 \\ \mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{p}_2 & |\mathbf{p}_3|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad P^{-1} = {}^tP = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad P {}^tP = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 & x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 & x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3 \\ y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 & y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 & y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3 \\ z_1x_1 + z_2x_2 + z_3x_3 & z_1y_1 + z_2y_2 + z_3y_3 & z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 \end{pmatrix}$$

$$(4) \quad \textcircled{1} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \quad \textcircled{2} y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1 \quad \textcircled{3} z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1$$

$$\textcircled{4} x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0 \quad \textcircled{5} y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3 = 0 \quad \textcircled{6} x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3 = 0$$

$$(5) \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \quad \text{とおくと (4) より } \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \text{ は}$$

正規直交系である。従って  ${}^tP = (\mathbf{x} \ \mathbf{y} \ \mathbf{z})$  は直交行列である。

## P.47 問の解答

$$(1) \quad \textcircled{1} |\mathbf{b}_1|^2 = 1 \quad \textcircled{2} |\mathbf{b}_2|^2 = 1 \quad \textcircled{3} |\mathbf{b}_3|^2 = 1$$

$$\textcircled{4} \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 = 0 \quad \textcircled{5} \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_3 = 0 \quad \textcircled{6} \mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{b}_1 = 0$$

$$\textcircled{7} |\mathbf{c}_1|^2 = 1 \quad \textcircled{8} |\mathbf{c}_2|^2 = 1 \quad \textcircled{9} |\mathbf{c}_3|^2 = 1$$

$$\textcircled{10} \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2 = 0 \quad \textcircled{11} \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{c}_3 = 0 \quad \textcircled{12} \mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{c}_1 = 0$$

## P.47 問の解答

$$(2) \quad B^{-1} = {}^t B = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = {}^t C = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta & \sin \varphi \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi \sin \theta & \sin \varphi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

## P.48 問の解答

$\det({}^t A) = \det(A)$  および  $\det(E) = 1$  ( $E$  は単位行列) より

$$\{\det(A)\}^2 = \det({}^t A) \times \det(A) = \det({}^t A A) = \det(A^{-1} A) = \det(E) = 1$$

よって  $\det(A) = \pm 1$  (証明終)

## P.49 問1の解答

$$\begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 p_1 + a_2 p_2 \\ b_1 p_1 + b_2 p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p} \cdot \mathbf{a} \\ \mathbf{p} \cdot \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

## 問2の解答

$$x' = \mathbf{p} \cdot \mathbf{a} = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$y' = \mathbf{p} \cdot \mathbf{b} = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

## P.50 問1の解答

$$\begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 \\ b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 \\ c_1 p_1 + c_2 p_2 + c_3 p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p} \cdot \mathbf{a} \\ \mathbf{p} \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{p} \cdot \mathbf{c} \end{pmatrix}$$

## 問2の解答

$$x' = \mathbf{p} \cdot \mathbf{a} = x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi + z \cos \theta$$

$$y' = \mathbf{p} \cdot \mathbf{b} = x \cos \theta \cos \varphi + y \cos \theta \sin \varphi - z \sin \theta$$

$$z' = \mathbf{p} \cdot \mathbf{c} = -x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

## P.52 問1の解答

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{より} \quad \underline{\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0}$$

## 問2の解答

$$(1) A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \quad \underline{\text{(答)} \quad \lambda = 2, 5}$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \quad \underline{\text{(答)} \quad \lambda = 1, 4}$$

$$(3) A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \quad \underline{\text{(答)} \quad \lambda = 2}$$

$$(4) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \quad \underline{\text{(答)} \quad \lambda = 1 \pm i}$$

## P.53 問の解答

$$(1) A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0 \quad \underline{\text{(答)} \quad \lambda = 2, 6}$$

$$(2) |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 5 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \underline{\text{(答)} \quad \lambda = 1, 4, 6}$$

$$(3) |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 7 \\ 1 & 1-\lambda & 9 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) + (3-\lambda) \\ = (3-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 6) = 0$$

$$\underline{\text{(答)} \quad \lambda = 3, 3 \pm \sqrt{3}}$$

$$(4) |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 4 \\ 7 & -\lambda & 5 \\ 2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda)(-1-\lambda) - (-8\lambda) = \lambda(9-\lambda^2) = 0$$

$$\underline{\text{(答)} \quad \lambda = 0, \pm 3}$$

## P.54 問の解答

$$(1) A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \underline{\text{固有値 } \lambda = 2 \text{ に対する固有ベクトルは } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \\ \underline{\text{固有値 } \lambda = 5 \text{ に対する固有ベクトルは } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \end{array}$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \underline{\text{固有値 } \lambda = 2 \text{ に対する固有ベクトルは } \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}} \\ \underline{\text{固有値 } \lambda = 6 \text{ に対する固有ベクトルは } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \end{array}$$

$$(3) A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \underline{\text{固有値 } \lambda = 1 \text{ に対する固有ベクトルは } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \\ \underline{\text{固有値 } \lambda = 4 \text{ に対する固有ベクトルは } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \end{array}$$

## P.55 問1の解答

$$(\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\lambda_1 & x_2\lambda_2 \\ y_1\lambda_1 & y_2\lambda_2 \end{pmatrix} = (\lambda_1\mathbf{x}_1 \ \lambda_2\mathbf{x}_2)$$

## 問2の解答

$$A(\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 & ax_2 + by_2 \\ cx_1 + dy_1 & cx_2 + dy_2 \end{pmatrix}$$

$$(A\mathbf{x}_1 \ A\mathbf{x}_2) = \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 & ax_2 + by_2 \\ cx_1 + dy_1 & cx_2 + dy_2 \end{pmatrix}$$

## P.56 問1の解答

$$A(\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2) = (A\mathbf{x}_1 \ A\mathbf{x}_2) = (\lambda_1\mathbf{x}_1 \ \lambda_2\mathbf{x}_2) = (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

## 問2の解答

$$(1) AP = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(2) P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2 \times 1 - (-1) \times 1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$(3) P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{3} & 0 \\ 0 & \frac{15}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

## P.57 問の解答

$$(1) A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{P54問の結果より固有値 } 2, 5 \text{ に対応する固有ベクトルは}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1}AP = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

## P.57 問の解答

$$(2) A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{固有値 } 2, 6 \text{ に対応する固有ベクトルは } \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ だから}$$

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1}AP = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(3) A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \rightarrow \lambda = 2, 3$$

$$\lambda = 2 \text{ のとき } (A - 2E) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 3 \text{ のとき } (A - 3E) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ とおくと } P^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

## P.58 問の解答

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 9\lambda + 14 = (\lambda - 2)(\lambda - 7) = 0 \Rightarrow \lambda = 2, 7$$

$$(A - 2E)\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} : \lambda_1 = 2 \text{ の対する固有ベクトル}$$

$$(A - 7E)\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} : \lambda_2 = 7 \text{ の対する固有ベクトル}$$

$$\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \times 1 + (-1) \times 2 = 0 \text{ より } \mathbf{x}_1 \text{ と } \mathbf{x}_2 \text{ は直交している。}$$

## P.59 問の解答

$$(1) A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 5\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0, 5$$

固有値は  $\lambda_1 = 0$  と  $\lambda_2 = 5$

$$(2) \text{ 固有値 } \lambda_1 = 0 \text{ に対する (大きさの) 固有ベクトルは } \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$\text{固有値 } \lambda_2 = 5 \text{ に対する (大きさの) 固有ベクトルは } \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$(3) \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{2}{\sqrt{5}} + \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \times \frac{1}{\sqrt{5}} = 0 \text{ より } \mathbf{x}_1 \text{ と } \mathbf{x}_2 \text{ は直交している。}$$

$$(4) P = (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, P^{-1} = {}^t P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, (5) P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

**P.60 問の解答**

ベクトル  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  方向に 2 倍引き伸ばし,

ベクトル  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  方向に 4 倍引き伸ばす変換である。

**P.61 問の解答**

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0$$

固有値  $\lambda = 2$  に対応する固有ベクトルは  $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

固有値  $\lambda = 4$  に対応する固有ベクトルは  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

より  $A$  は

ベクトル  $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  方向に 2 倍引き伸ばし,

ベクトル  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  方向に 4 倍引き伸ばす変換である。

$$(2) A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{P57 問 (3) の結果より固有値は } \lambda = 2, 3 \text{ で,} \\ \text{固有値 2 に対する固有ベクトルは } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ であり,} \\ \text{固有値 3 に対する固有ベクトルは } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ であるから,} \end{array}$$

$A$  は

ベクトル  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  方向に 2 倍引き伸ばし,

ベクトル  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  方向に 3 倍引き伸ばす変換である。

**P.62 問の解答**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(1-\lambda) - (-1)(1-\lambda) \\ = (1-\lambda)(\lambda^2+1) = 0$$

固有値は  $\lambda = 1, \pm i$  ( $= e^{\pm \frac{\pi}{2}i}$ )

$\lambda = 1$  に対する固有ベクトルを  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  とおくと

$$(A - 1E) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-y \\ x-y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{cases} -x-y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow x=y=0$$

(答) 直線  $x = y = 0$  ( $= z$  軸) を中心軸として, 角度  $\frac{\pi}{2}$  ( $= 90^\circ$ ) 回転させる変換である。