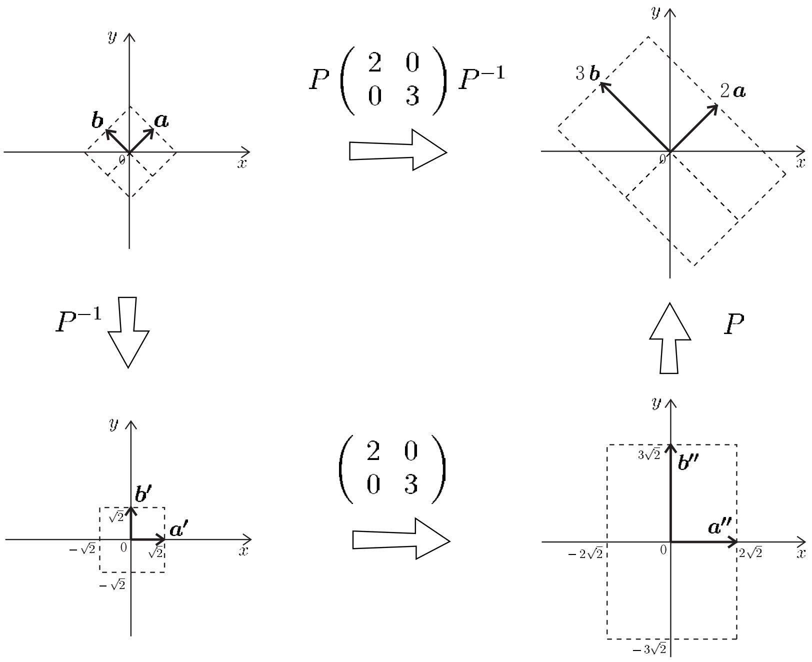
高知工科大学
Kochi University of Technology

基礎数学 ワークブック No. 7

「線形代数入門」



内容
- ◎ 行列式
- ◎ 1次従属・1次独立
- ◎ 1次変換，回転行列
- ◎ 固有値と行列の対角化

井上 昌昭　著

< 置換 >

n を自然数 (=1 以上の整数) とする。1 から n までの自然数の集合を $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ と書く。$\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ から $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ への関数 (対応) が 1 対 1 ($i \neq j$ ならば $\sigma(i) \neq \sigma(j)$) であるとき，σ を n 文字の**置換**という。σ の対応関係が

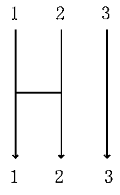
$$1 \to k_1,\ 2 \to k_2,\ \cdots,\ n \to k_n \qquad (\sigma(1) = k_1,\ \sigma(2) = k_2,\ \cdots,\ \sigma(n) = k_n)$$

であるとき

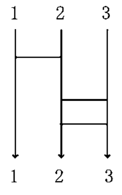
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

と表す。

例 1 $n = 3,\ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ のとき σ は図 1 のような「あみだくじ」と考えられる。このあみだくじで横棒は 1 と 2 をいれかえている。このように 2 つの数字を入れかえることを**互換**という。なお「あみだくじ」による表現は 1 通りではない。図 2 も図 1 と同じ置換である。

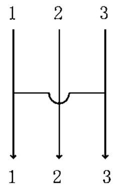


(図1)

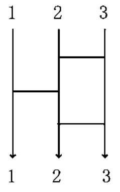


(図2)

例 2 $n = 3,\ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ のとき σ は図 3 または図 4 のような「あみだくじ」で表すことができる。

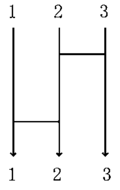


(図3)

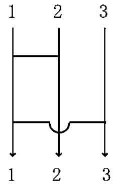


(図4)

例 3 $n = 3,\ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ のとき σ は図 5 または図 6 のような「あみだくじ」で表すことができる。

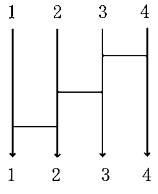


(図5)

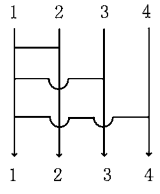


(図6)

例 4 $n = 4,\ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ のとき σ は図 7 または図 8 のような「あみだくじ」で表すことができる。



(図7)



(図8)

このような例のように，置換 σ は「あみだくじ」で表現することができる。そのとき互換の数 (=横棒の数) は偶数か奇数かのどちらかであり,「あみだくじ」の表し方によらない。互換の数が偶数である置換を**偶置換**，奇数である置換を**奇置換**という。

＜行列式の定義＞

$\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ から $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ への置換 σ の全体を S_n で表す。置換 σ は $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \square & \square & \cdots & \square \end{pmatrix}$ の形をしている。すなわち n 個の場所 □ □ $\cdots$ □ に 1 から n までの数を並べたものと考えることができる。したがって S_n は全部で $n!$ 個の置換の集合である。前のページから置換 $\sigma(\in S_n)$ は偶置換か奇置換かのどちらかである。

＜置換の符号＞　$\sigma(\in S_n)$ に対して

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & : \ \sigma \text{ が偶置換のとき} \\ -1 & : \ \sigma \text{ が奇置換のとき} \end{cases}$$

と定める。$\mathrm{sgn}(\sigma)$ を置換 σ の符号という。

＜行列式の定義＞

$$n \text{ 次正方行列 } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ に対して}$$

$$\boxed{\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}\ (\sigma) \times a_{\sigma(1)1} \times a_{\sigma(2)2} \times \cdots \times a_{\sigma(n)n}}$$

を A の**行列式** (determinant) といい

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等で表す。

例　$n = 1$ のとき $A = (a_{11})$，S_1 は $\sigma = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ だけである。互換はない (=0 個) ので $\sigma = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は偶置換 $\left(\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = +1\right)$。よってこのとき

$$\det(A) = |a_{11}| = \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} a_{\sigma(1)1} = a_{11}$$

＜ 2 次・3 次の行列式 ＞

＜ $n=2$ のとき ＞　$S_2=\left\{\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\right\}$ で $\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\left(=\begin{array}{cc}1&2\\\downarrow&\downarrow\\1&2\end{array}\right)$ は

偶置換，$\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\left(=\begin{array}{c}1\ 2\\\vdash\!\dashv\\1\ 2\end{array}\right)$ は奇置換より

$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$ とすると

$$\det A=\sum_{\sigma\in S_2}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(1)2}$$

$$=\mathrm{sgn}\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}a_{11}a_{22}+\mathrm{sgn}\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}a_{21}a_{12}$$

$$=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

＜ $n=3$ のとき ＞　S_3 は $3!=3\times2\times1=6$ 個の置換がある。このうち

偶置換は

$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\left(=\begin{array}{ccc}1&2&3\\\downarrow&\downarrow&\downarrow\\1&2&3\end{array}\right)$ ， $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\left(=\begin{array}{c}1\ 2\ 3\\\vdash\!\dashv\!\!\dashv\\1\ 2\ 3\end{array}\right)$ ， $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\left(=\begin{array}{c}1\ 2\ 3\\\vdash\!\!\vdash\!\dashv\\1\ 2\ 3\end{array}\right)$ であり，

奇置換は

$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\left(=\begin{array}{c}1\ 2\ 3\\\vdash\!\dashv\ \downarrow\\1\ 2\ 3\end{array}\right)$ ， $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\left(=\begin{array}{c}1\ 2\ 3\\\downarrow\ \vdash\!\dashv\\1\ 2\ 3\end{array}\right)$ ， $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\left(=\begin{array}{c}1\ 2\ 3\\\vdash\!\dashv\!\dashv\\1\ 2\ 3\end{array}\right)$ である。

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\text{ とする。}$$

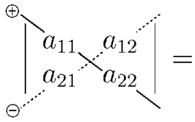
$$\det(A)=\sum_{\sigma\in S_3}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}a_{\sigma(3)3}$$

$$=\mathrm{sgn}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}a_{11}a_{22}a_{33}+\mathrm{sgn}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}a_{21}a_{32}a_{13}+\mathrm{sgn}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}a_{31}a_{12}a_{23}$$

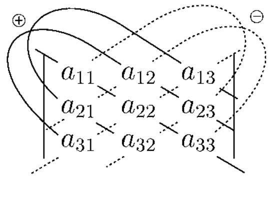
$$+\mathrm{sgn}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}a_{21}a_{12}a_{33}+\mathrm{sgn}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}a_{11}a_{32}a_{23}+\mathrm{sgn}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}a_{31}a_{22}a_{13}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}$$

以上まとめると



$= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ ，



$$= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}$$
$$-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}$$

となる。これを**サラスの公式**という。ただし，この計算方法は 4 次以上の場合には使えない。

＜行列式の性質 1＞

$\boxed{1}$ (分配法則)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1j}+a''_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a'_{2j}+a''_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a'_{nj}+a''_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a'_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a''_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a''_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a''_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(証明)

$$\text{左辺} = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1}\cdots(a'_{\sigma(j)j}+a''_{\sigma(j)j})\cdots a_{\sigma(n)n}$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1}\cdots a'_{\sigma(j)j}\cdots a_{\sigma(n)n} + \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1}\cdots a''_{\sigma(j)j}\cdots a_{\sigma(n)n} = \text{右辺}$$

(証明終)

$\boxed{2}$ (一つの列 (または行) を c 倍した行列式は，元の行列式の c 倍である)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ca_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ca_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

問　$\boxed{2}$を証明せよ。

$\boxed{3}$ (2 つの列 (または行) を入れ替えると，マイナスがつく)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \overset{(i\text{ 列})}{a_{1j}} & \cdots & \overset{(j\text{ 列})}{a_{1i}} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \overset{(i\text{ 列})}{a_{1i}} & \cdots & \overset{(j\text{ 列})}{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(証明)　$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(i) & \cdots & \sigma(j) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

に対し，i と j を入れかえた置換を

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(j) & \cdots & \sigma(i) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

とおくと，$\mathrm{sgn}(\tau) = -\mathrm{sgn}(\sigma)$　より

$$\text{左辺} = \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1}\cdots \overset{(i\text{ 番目})}{a_{\sigma(i)j}}\cdots \overset{(j\text{ 番目})}{a_{\sigma(j)i}}\cdots a_{\sigma(n)n}$$

$$= -\sum_{\tau} \mathrm{sgn}(\tau) a_{\tau(1)1}\cdots \overset{(i)}{a_{\tau(j)j}}\cdots \overset{(j)}{a_{\tau(i)i}}\cdots a_{\tau(n)n}$$

$$= -\sum_{\tau} \mathrm{sgn}(\tau) a_{\tau(1)1}\cdots \overset{(i)}{a_{\tau(i)i}}\cdots \overset{(j)}{a_{\tau(j)j}}\cdots a_{\tau(n)n} = \text{右辺}$$

(証明終)

＜行列式の性質 2 ＞

$\boxed{4}$ (2つの列 (または行) が同じならばゼロ)

$$\left|\begin{array}{ccccccc} & & (i) & & (j) & & \\ a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{1n} \end{array}\right| = 0$$

(証明)　この行列を A とする。i 列と j 列を入れかえた行列を A' とすると $A = A'$。

性質$\boxed{3}$より $|A'| = -|A|$ だから $|A| = -|A|$。よって $|A| = 0$　(証明終)

$\boxed{5}$ (一つの列 (または行) に他の列 (または行) の定数倍を加えても変わらない)

$$\left|\begin{array}{ccccccc} & & (i) & & (j) & & \\ a_{11} & \cdots & a_{1i} + ca_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} + ca_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccccccc} & & (i) & & (j) & & \\ a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right|$$

問　$\boxed{5}$を証明せよ。

$\boxed{6}$ (行と列を入れ替えても行列式の値は変わらない)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1j} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{nj} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{in} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(証明の概略)

置換 σ の逆関数を $\tau = \sigma^{-1}$ とおくと

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \quad \text{のとき} \quad \tau = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

であり，$\sigma(i) = j$　であれば　$\tau(j) = i$　であるから

$$\text{集合}\left\{a_{i\sigma(i)} : i = 1, 2, \cdots n\right\} = \text{集合}\left\{a_{\tau(j)j} : j = 1, 2, \cdots n\right\}$$

となる。よって n 個の積

$$a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(\sigma)} = a_{\tau(1)1}a_{\tau(2)2}\cdots a_{\tau(n)n}$$

は等しい。さらに $\mathrm{sgn}(\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$ より左辺＝右辺が証明される。

< 行列式の性質 3 >

$\boxed{7}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(証明) $a_{21} = a_{31} = \cdots = a_{n1} = 0$ とすると $\sigma(1) \neq 1$ のとき $a_{\sigma(1)1} = 0$ だから

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma(1)=1} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= a_{11} \sum_{\sigma(1)=1} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \end{aligned}$$

ここで $\sigma(1) = 1$ である置換 σ は $\{2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$ の置換だから

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(証明終)

問 1 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ の値を求めよ。

問 2 上三角行列の行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$ の値を求めよ。

$\boxed{8}$ n 次正方行列 $A,\ B$ に対して

$\boxed{\det(AB) \ = \ \det(A) \times \det(B)}$ $(|AB| = |A| \times |B|)$

が成り立つ。

(証明は次のページ)

＜行列式の性質 4 ＞

$\left[\text{性質}\boxed{8}\ |AB| = |A| \times |B|\ \text{の証明}\right]$

n 次正方行列 $A = (a_{ij})$，$B = (b_{ij})$ に対して $AB = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)$ より

$$|AB| = \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kn} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}b_{kn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\cdots\sum_{k_n=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{1k_1}b_{k_11} & a_{1k_2}b_{k_22} & \cdots & a_{1k_n}b_{k_nn} \\ a_{2k_1}b_{k_11} & a_{2k_2}b_{k_22} & \cdots & a_{2k_n}b_{k_nn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nk_1}b_{k_11} & a_{nk_2}b_{k_22} & \cdots & a_{nk_n}b_{k_nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\cdots\sum_{k_n=1}^{n} b_{k_11}b_{k_22}\cdots b_{k_nn} \begin{vmatrix} a_{1k_1} & a_{1k_2} & \cdots & a_{1k_n} \\ a_{2k_1} & a_{2k_2} & \cdots & a_{2k_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nk_1} & a_{nk_2} & \cdots & a_{nk_n} \end{vmatrix}$$

ここで k_1，k_2，$\cdots$，k_n，のうち同じものがあれば，2 列が同じになるので，行列式の値は 0 になる。従って k_1，k_2，$\cdots$，k_n は (1 から n の中の) 全て異なる数である。今 $k_1 = \sigma(1)$, $k_2 = \sigma(2)$, $\cdots$, $k_n = \sigma(n)$ とおくと σ は $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ から $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ への置換だから

$$|AB| = \sum_{\sigma\in S_n} b_{\sigma(1)1}b_{\sigma(2)2}\cdots b_{\sigma(n)n} \begin{vmatrix} a_{1\sigma(1)} & a_{1\sigma(2)} & \cdots & a_{1\sigma(n)} \\ a_{2\sigma(1)} & a_{2\sigma(2)} & \cdots & a_{2\sigma(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n\sigma(1)} & a_{n\sigma(2)} & \cdots & a_{n\sigma(n)} \end{vmatrix}$$

と書ける。行列式の列を偶数回入れ替えても値は変わらないが，奇数回入れ替えると −1 倍になるので

$$\begin{vmatrix} a_{1\sigma(1)} & a_{1\sigma(2)} & \cdots & a_{1\sigma(n)} \\ a_{2\sigma(1)} & a_{2\sigma(2)} & \cdots & a_{2\sigma(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n\sigma(1)} & a_{n\sigma(2)} & \cdots & a_{n\sigma(n)} \end{vmatrix} = \mathrm{sgn}(\sigma) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \mathrm{sgn}(\sigma)|A|$$

よって

$$|AB| = \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) b_{\sigma(1)1}b_{\sigma(2)2}\cdots b_{\sigma(n)n}|A| = |B| \times |A| \qquad \text{(証明終)}$$

< 行列式の展開 1 >

4次の行列式の値を求めたい。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \qquad \cdots \qquad ①$$

$$\begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = -a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \qquad \cdots \qquad ②$$

$$\begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = -a_3 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \cdots ③$$

$$\begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & b_1 & c_1 & d_1 \end{vmatrix} = -a_4 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_1 & c_1 & d_1 \end{vmatrix} = -a_4 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$\cdots \ ④$$

①，②，③，④より　4次の行列式は次のように3次の行列式で表される。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

この式を4次の行列式の**第1列展開**または**列展開**という。

問　次の行列式の値を求めよ。

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

< 行列式の展開 2 >

行列式の行と列を入れ替えても値は同じなので，前ページの結果から

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}$$

が成立する。これを 4 次の行列式の**第 1 行展開**または**行展開**という。

問 1　4 次の行列式の行展開を証明せよ。

問 2　次の行列式の値を求めよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

問 3　3 次の行列式を第 1 列で展開し，3 個の 2 次行列式で表せ。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

＜行列式の計算 1＞

2次や3次の行列式はサラスの公式を使って求めてもよいが，行列式の性質を使って簡単に計算できる方法がある。

例 1

$$\begin{array}{c}\begin{vmatrix} 11 & 31 \\ 21 & 65 \end{vmatrix} \\ \begin{array}{cc} \vdots & \vdots \\ \text{①} & \text{②} \end{array}\end{array} = \begin{array}{c}\begin{vmatrix} 11 & 31-33 \\ 21 & 65-63 \end{vmatrix} \\ \begin{array}{c} \vdots \\ \text{②}-\text{①}\times 3 \end{array}\end{array} = \begin{vmatrix} 11 & -2 \\ 21 & 2 \end{vmatrix} = 11 \times 2 - 21 \times (-2) = 64$$

この例は行列式の性質$\boxed{5}$を用いて，(2 列) – (1 列) × 3 で 2 列目を簡単にしている。

問 1　次の行列式の値を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} 23 & 115 \\ 37 & 185 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 47 & 53 \\ 142 & 161 \end{vmatrix}$

例 2

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times (-4+3) - 3 \times (-5+2) + 0 = -2 + 9 = 7$$

この例は3次の行列式の1行展開

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

を使っている。

問 2　次の行列式の値を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 7 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$

＜行列式の計算 2 ＞

例 1

$$\begin{array}{|ccc|} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 15 \\ 3 & 10 & 20 \\ \multicolumn{1}{c}{\vdots} & \vdots & \multicolumn{1}{c}{\vdots} \\ \multicolumn{1}{c}{\text{①}} & \text{②} & \multicolumn{1}{c}{\text{③}} \end{array} = \begin{array}{|ccc|} 1 & 4-1\times 4 & 6-1\times 6 \\ 2 & 7-2\times 4 & 15-2\times 6 \\ 3 & 10-3\times 4 & 20-3\times 6 \\ \multicolumn{1}{c}{} & \vdots & \multicolumn{1}{c}{\vdots} \\ \multicolumn{1}{c}{} & \text{②}-\text{①}\times 4 & \multicolumn{1}{c}{\text{③}-\text{①}\times 6} \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

この例は行列式の性質$\boxed{5}$を用いて，(2 列) − (1 列) × 4，(3 列) − (1 列) × 6 で 1 列目を簡単にし，行展開で 2 次の行列式にしている。

問 1　次の行列式の値を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 10 & 15 \\ 3 & 16 & 24 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 23 & 10 & 32 \\ 2 & 1 & 3 \\ 50 & 23 & 70 \end{vmatrix}$

例 2

$$\begin{array}{|cccc|} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 3 & 4 & 7 & 10 \\ \multicolumn{1}{c}{\vdots} & \vdots & \vdots & \multicolumn{1}{c}{\vdots} \\ \multicolumn{1}{c}{\text{①}} & \text{②} & \text{③} & \multicolumn{1}{c}{\text{④}} \end{array} = \begin{array}{|cccc|} 1 & 0 & 2-1\times 2 & 4-1\times 4 \\ 2 & 2 & 3-2\times 2 & 6-2\times 4 \\ -1 & 1 & 0-(-1)\times 2 & -5-(-1)\times 4 \\ 3 & 4 & 7-3\times 2 & 10-3\times 4 \\ \multicolumn{1}{c}{} & & \vdots & \multicolumn{1}{c}{\vdots} \\ \multicolumn{1}{c}{} & & \text{③}-\text{①}\times 2 & \multicolumn{1}{c}{\text{④}-\text{①}\times 4} \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 1\times\begin{array}{|ccc|} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ \multicolumn{1}{c}{\vdots} & \vdots & \multicolumn{1}{c}{\vdots} \\ \multicolumn{1}{c}{(1)} & (2) & \multicolumn{1}{c}{(3)} \end{array} = \begin{array}{|ccc|} 0 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & -5 \\ 6 & 1 & -4 \\ \multicolumn{1}{c}{\vdots} & & \multicolumn{1}{c}{\vdots} \\ \multicolumn{1}{c}{(1)+(2)\times 2} & & \multicolumn{1}{c}{(3)-(2)\times 2} \end{array} = -(-1)\begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = 10$$

この例はまず (3 列) − (1 列) × 2 と (4 列) − (1 列) × 4 で 1 行目を簡単にし，1 行展開で 3 次の行列式にする。さらに (1 列) + (2 列) × 2 と (3 列) − (2 列) × 2 で 1 行目を簡単にし，再び 1 行展開で 2 次の行列式になおしている。

問 2　次の行列式の値を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

< 行列式の計算 3 >

例 $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 3 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & -2 & 9 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & -19 \\ 0 & 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 6 & 1 & -19 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & -28 \\ 0 & 5 & -7 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 7 & -28 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = -182$$

この例はまず (3 行) − (1 行) × 2 で 1 列目を簡単にして，4 次の行列式にする。次に 1 行目と 3 行目を入れかえる。そして (2 行) − (1 行)，(3 行) − (1 行) × 4，(4 行) − (1 行) × 2 で 1 列目を簡単にして 3 次の行列式にする。さらに (2 行) − (1 行) × 3，(3 行) − (1 行) で 2 次の行列式にして，答えを求める。

問　次の行列式の値を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

< クラーメルの公式 >

連立一次方程式

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

を考える。$\boldsymbol{a_k}=\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ とおくと，$(*)$ は

$$(*)' \quad x_1\boldsymbol{a_1}+x_2\boldsymbol{a_2}+\cdots+x_n\boldsymbol{a_n}=\boldsymbol{b}$$

と同じである。　今行列を

$$A=(\boldsymbol{a_1}\ \boldsymbol{a_2}\ \cdots\ \boldsymbol{a_n})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$A_k=(\boldsymbol{a_1}\ \cdots\ \boldsymbol{a_{k-1}}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{a_{k+1}}\ \cdots\ \boldsymbol{a_n})=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k-1} & b_1 & a_{1k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k-1} & b_2 & a_{2k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk-1} & b_n & a_{nk+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

とおく。このとき次が成り立つ。

< クラーメルの公式 >

$$\boxed{\det(A)\neq 0 \text{ のとき } (*) \text{ の解は } x_k=\frac{\det(A_k)}{\det(A)}\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)}$$

(証明)　$\det(A_k)=\det(\boldsymbol{a_1}\ \cdots\ \boldsymbol{a_{k-1}}\ \sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{a_i}\ \ \boldsymbol{a_{k+1}}\ \cdots\ \boldsymbol{a_n})$

$$=\sum_{i\neq k}x_i\ \underbrace{\det(\boldsymbol{a_1}\ \cdots\ \boldsymbol{a_{k-1}}\ \boldsymbol{a_i}\ \boldsymbol{a_{k+1}}\ \cdots\ \boldsymbol{a_n})}_{\substack{\| \\ 0}}+x_k\det(\boldsymbol{a_1}\ \cdots\ \boldsymbol{a_{k-1}}\ \boldsymbol{a_k}\ \boldsymbol{a_{k+1}}\ \cdots\ \boldsymbol{a_n})$$

$=x_k\det(A)$　　より　　$x_k=\dfrac{\det(A_k)}{\det(A)}$　(証明終)

問　3 元連立一次方程式

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

に対し，係数行列式が $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=D\neq 0$ であるとき解 $x,\ y,\ z$ を係数を用いた行列式と D で表せ。

< 数ベクトル空間 >

$\boldsymbol{R}$ を実数の集合とする。平面のベクトルの全体は 2 次の列ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $(x_1,\ x_2$ は実数) の集合である。それを

$$\boldsymbol{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1,\ x_2\ \in \boldsymbol{R} \right\} \qquad \text{(2 次の列ベクトル空間)}$$

と書き，**2 次の列ベクトル空間**という。同様に空間のベクトルの全体は 3 次の列ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $(x_1,\ x_2,\ x_3$ は実数) の集合である。それを

$$\boldsymbol{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1,\ x_2,\ x_3\ \in \boldsymbol{R} \right\} \qquad \text{(3 次の列ベクトル空間)}$$

と書き，**3 次の列ベクトル空間**という。これらを一般化する。

自然数 $n(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ に対し，n 次の列ベクトル全体を

$$\boldsymbol{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\ \in \boldsymbol{R} \right\} \qquad (n \text{ 次の列ベクトル空間})$$

と書き，**n次の列ベクトル空間**という。また，n 次の行ベクトルの全体を

$$\boldsymbol{R}_n = \{(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) : x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\ \in \boldsymbol{R}\} \qquad (n \text{ 次の行ベクトル空間})$$

と書き，**n次の行ベクトル空間**という。$\boldsymbol{R}_n$ と $\boldsymbol{R}^n$ をまとめて**n次の数ベクトル空間**という。

$\boldsymbol{R}^n$ の 2 つのベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ，$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ と定数 $k \in \boldsymbol{R}$ に対し

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^n\ ,\ \ k\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ \vdots \\ kx_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^n$$

である。このように和 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ とスカラー倍 $k\boldsymbol{x}$ が定義されているような空間をベクトル空間という。さらに内積

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \qquad \text{(内積)}$$

が定義されているベクトル空間を**内積空間**または**計量ベクトル空間**などという。

< ベクトル空間 >

集合 $\boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w},\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \cdots\}$ が実数 $\boldsymbol{R}$ 上の**ベクトル空間**をなすとは，2 つの演算

(和) $\qquad \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} \qquad (\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V})$

(スカラー倍) $\qquad k\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V} \qquad (\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V},\ k \in \boldsymbol{R})$

が定義され，次の性質 (1)〜(8) を満たす。

< ベクトル空間の性質 > $\qquad (\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V},\quad a,\ b \in \boldsymbol{R})$

(1) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$, (2) $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$

(3) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{u}$ となる $\boldsymbol{0}$ が存在する。 , (4) $a(b\boldsymbol{u}) = (ab)\boldsymbol{u}$

(5) $(a + b)\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{u}$, (6) $a(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = a\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{v}$

(7) $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$, (8) $0\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$

(注) ベクトル空間は**線形空間**とも呼ばれる。

< 部分空間 >

ベクトル空間 $\boldsymbol{V}$ の部分集合 $\boldsymbol{W}$ が $\boldsymbol{V}$ の**部分空間**であるとは次の (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ) が満たされることである。

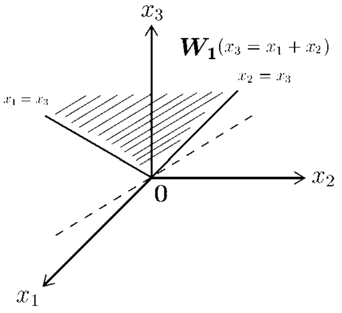
(ⅰ) $\boldsymbol{0} \in \boldsymbol{W}$

(ⅱ) $\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}$ ならば $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}$

(ⅲ) $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W},\ a \in \boldsymbol{R}$ ならば $a\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}$

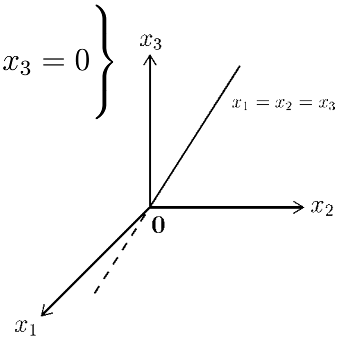
例 (1) $\boldsymbol{W_1} = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R^3} : x_1 + x_2 - x_3 = 0 \right\}$

は $\boldsymbol{R^3}$ の部分空間である。$\boldsymbol{W_1}$ は原点 $\boldsymbol{0}$ を通る平面 $x_3 = x_1 + x_2$ である。一般に原点 $\boldsymbol{0}$ を通る平面は $\boldsymbol{R^3}$ の部分空間である。



(2) $\boldsymbol{W_2} = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R^3} : x_1 - x_2 = 0,\ x_2 - x_3 = 0 \right\}$

は $\boldsymbol{R^3}$ の部分空間である。$\boldsymbol{W_2}$ は原点 $\boldsymbol{0}$ を通る直線 $x_1 = x_2 = x_3$ である。一般に原点 $\boldsymbol{0}$ を通る直線は $\boldsymbol{R^3}$ の部分空間である。



＜１次従属・１次独立１＞

n 個のベクトル$\boldsymbol{u}_1$,$\boldsymbol{u}_2$,$\cdots$,$\boldsymbol{u}_n$ に対し，スカラー倍の和

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n \qquad (1\text{次結合})$$

を$\boldsymbol{u}_1$,$\boldsymbol{u}_2$,$\cdots$,$\boldsymbol{u}_n$ の **1 次結合**という。　$(c_1, c_2, \cdots, c_n \in \boldsymbol{R})$

定義　n 個のベクトル$\boldsymbol{u}_1$,$\boldsymbol{u}_2$,$\cdots$,$\boldsymbol{u}_n$ に対し、その中の１個のベクトルが他の $n-1$ 個のベクトルの１次結合として表されているとき，$\boldsymbol{u}_1$,$\boldsymbol{u}_2$,$\cdots$,$\boldsymbol{u}_n$ は **1 次従属**という。1 次従属でないとき，**1 次独立**という。

定理　ベクトル $\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\cdots,\boldsymbol{u}_n\}$ に対し，一次方程式

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + c_3\boldsymbol{u}_3 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{0} \quad \cdots \quad (*)$$

を考える。このとき次が成り立つ。

(1)　$\boldsymbol{u}_1$,$\boldsymbol{u}_2$,$\cdots$,$\boldsymbol{u}_n$ が 1 次従属 $\Longleftrightarrow$ 全てが 0 でない $(*)$ の解 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ が存在する。

(2)　$\boldsymbol{u}_1$,$\boldsymbol{u}_2$,$\cdots$,$\boldsymbol{u}_n$ が 1 次独立 $\Longleftrightarrow$$(*)$ の解は $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ に限る。

(証明)　(1) を示す。

$(\Rightarrow)$ $\boldsymbol{u}_1$,$\boldsymbol{u}_2$,$\cdots$,$\boldsymbol{u}_n$ が 1 次従属ならば，ある i $(1 \leqq i \leqq n)$ が存在し

$$\boldsymbol{u}_i = \sum_{k \neq i} c_k\ \boldsymbol{u}_k$$

と表される。よって

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_{i-1}\boldsymbol{u}_{i-1} - 1\boldsymbol{u}_i + c_{i+1}\boldsymbol{u}_{i+1} + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{0}$$

となる。つまり $c_1, \cdots, c_{i-1}, -1, c_{i+1}, \cdots, c_n$ は全てが 0 ではない $(*)$ の解。

$(\Leftarrow)$ 逆に全てが 0 ではない $(*)$ の解 $c_1, \cdots, c_n$ があったとする。

今 $c_n \neq 0$ とすると

$$\boldsymbol{u}_n = -\frac{c_1}{c_n}\ \boldsymbol{u}_1 - \frac{c_2}{c_n}\ \boldsymbol{u}_2\ \cdots\ - \frac{c_{n-1}}{c_n}\ \boldsymbol{u}_{n-1} \qquad \text{より}$$

$\boldsymbol{u}_n$ は$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_{n-1}$ の 1 次結合であらわされるから 1 次従属になる。$\Big($ (1) の証明終 $\Big)$

(2) は (1) から明らか。

＜１次従属・１次独立２＞

例題 $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ は１次従属かまたは１次独立か，判定せよ。

(解) $(*)$ $c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + c_3\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{0}$ とおく。これは連立方程式

$$(*)' \begin{cases} c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 0 \\ 2c_1 + 3c_2 + 4c_3 = 0 \\ 3c_1 + 4c_2 + 5c_3 = 0 \end{cases}$$

と同じである。この連立方程式を基本変形によって解く。

1	2	3	0	⋯ ①
2	3	4	0	⋯ ②
3	4	5	0	⋯ ③

⇓

1	2	3	0	⋯ ①
0	−1	−2	0	⋯ ② − ① × 2 = ④
0	−2	−4	0	⋯ ③ − ① × 3 = ⑤

⇓

1	0	−1	0	⋯ ① + ④ × 2 = ⑥
0	1	2	0	⋯ ④ × (−1) = ⑦
0	0	0	0	⋯ ⑤ + ④ × (−2)

⑥より $c_1 - c_3 = 0$，⑦より $c_2 + 2c_3 = 0$。よって $c_1 = t$ とおくと $(*)'$ の一般解は $\underline{c_1 = t,\ c_2 = -2t,\ c_3 = t \ \ (t \text{ は任意の実数})}$ である。従って全ては0ではない $(*)$ の解 c_1，c_2，c_3 が存在するので $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ は１次従属である。

問 次のベクトル$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ は１次従属かまたは１次独立か，判定せよ。

(1) $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}$ (2) $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix}$

＜平面のベクトルと行列式＞

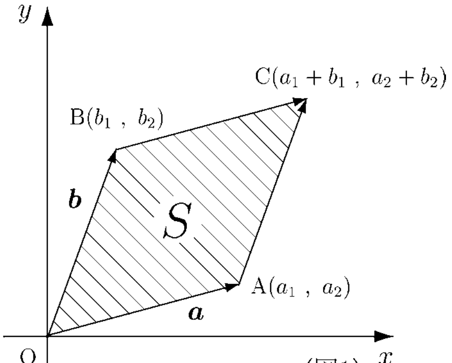
原点を始点とする 2 つのベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

に対して，原点 O(0，0) と 3 点

A(a_1，a_2)，B(b_1，b_2)，C($a_1 + b_1$，$a_2 + b_2$)

をとると，四角形 OACB は平行四辺形となる。



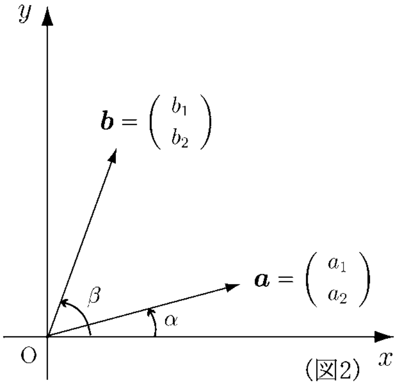
(図1)

この平行四辺形の面積を S とする。$\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{b}$の位置関係が

図 1 のような場合

$$S = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

となる。



(図2)

(証明)　図 2 のように x 軸からの角度を α，β とすると

$$a_1 = |a|\cos\alpha,\ a_2 = |a|\sin\alpha,$$

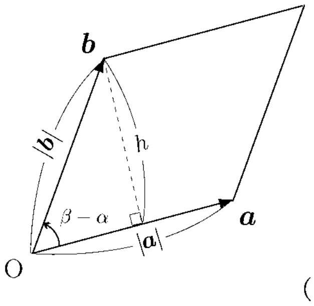
$$b_1 = |b|\cos\beta,\ b_2 = |b|\sin\beta$$

となる。図 3 のように平行四辺形の

高さを h とおくと

$$h = |\boldsymbol{b}|\sin(\beta - \alpha)$$

だから



(図3)

$$S = |\boldsymbol{a}| \times h = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin(\beta - \alpha)$$

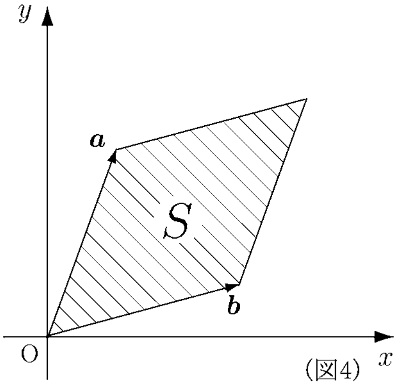
$$= |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|(\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha) = |\boldsymbol{a}|\cos\alpha|\boldsymbol{b}|\sin\beta - |\boldsymbol{a}|\cos\beta|\boldsymbol{b}|\sin\alpha$$

$$= a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$ (証明終)

(注)　$\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{b}$の位置関係が図 4 のような場合は

$$S = \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

となる。



(図4)

＜2個のベクトルの1次従属性＞

零ベクトルでない2つのベクトル $\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{b}$ が平行 ($\boldsymbol{a} \mathbin{/\mkern-6mu/} \boldsymbol{b}$) であるということは互いに他の定数倍 ($\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{b}$ または $\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$ となる実数 $k(\neq 0)$ が存在する) ということである。零ベクトルでない2つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が1次従属ならば

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{0}$$

となる0でない定数 c_1 と c_2 が存在する。このとき $\boldsymbol{a} = -\dfrac{c_2}{c_1}\,\boldsymbol{b}$ (または $\boldsymbol{b} = -\dfrac{c_1}{c_2}\,\boldsymbol{a}$) より $\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{b}$ は平行である。逆に $\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{b}$ が平行であれば $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は1次従属である。

＜平面ベクトルの場合＞$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ が共に零ベクトルでないとする。このとき

$$\boxed{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \text{ が1次従属} \iff \boldsymbol{a} \mathbin{/\mkern-6mu/} \boldsymbol{b} \iff \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0}$$

が成り立つ。

[証明]　(⇒) $\boldsymbol{a} \mathbin{/\mkern-6mu/} \boldsymbol{b}$ とすると $\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{b}$ となる実数 $k(\neq 0)$ が存在する。このとき

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = k\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} kb_1 \\ kb_2 \end{pmatrix} \text{ だから } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} kb_1 & b_1 \\ kb_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

(⇐) $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ より a_1 と a_2 のどちらかは0ではない。$a_1 \neq 0$ とし，$\frac{b_1}{a_1} = k$ とおく。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \text{ より } a_1b_2 = a_2b_1 \quad \Rightarrow \quad b_2 = \tfrac{a_2b_1}{a_1} = ka_2$$

$$\text{よって } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix} = k\boldsymbol{a} \text{ より } \boldsymbol{a} \mathbin{/\mkern-6mu/} \boldsymbol{b} \quad \text{(証明終)}$$

＜空間ベクトルの場合＞$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ が共に零ベクトルでないとする。このとき

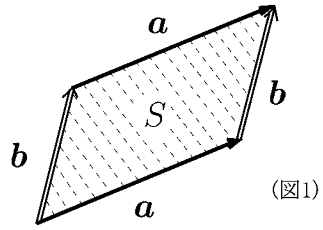
$$\boxed{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \text{が1次従属} \iff \boldsymbol{a} \mathbin{/\mkern-6mu/} \boldsymbol{b} \iff \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0}$$

が成り立つ。

[証明]　(⇒) 平面の場合と同様

(⇐) $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ より $a_1 \neq 0$ とする。，$\frac{b_1}{a_1} = k$ とおく。$a_1b_2 = a_2b_1$ より $b_2 = ka_2$。
また $a_1b_3 = a_3b_1$ より $b_3 = ka_3$。 よって $\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$ より $\boldsymbol{a} \mathbin{/\mkern-6mu/} \boldsymbol{b}$ (証明終)

＜空間のベクトルと平行四辺形の面積＞



(図1)

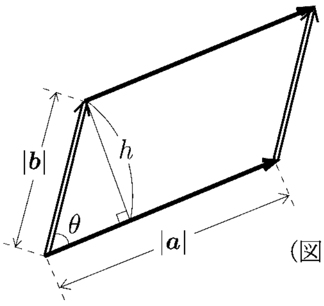
空間のベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ に対して

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積 S は

$$S = \sqrt{\left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\right)^2 + \left(\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\right)^2 + \left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right)^2}$$

で求められる。このことを以下の順で示せ。

問 1 図 2 より $S = |\boldsymbol{a}|h$ である。$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とする。S を $|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$ と θ で表せ。



(図2)

問 2 $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ と $|\boldsymbol{a}| \times |\boldsymbol{b}|\cos\theta = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積) であることを利用して，

S^2 を $|\boldsymbol{a}|^2 \times |\boldsymbol{b}|^2$ と $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$ を用いて表せ。

$S^2 =$

問 3 $|\boldsymbol{a}|^2 = {a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2$，$|\boldsymbol{b}|^2 = {b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ であることを利用して，次式を示せ。

$$S^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2$$

＜外積１＞

空間ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ に対して

$$\boxed{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{a}\text{と}\boldsymbol{b}\text{の外積})}$$

を$\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{b}$の**外積**という。外積の大きさ $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\,|$ は$\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{b}$のつくる平行四辺形の面積に等しい。

(注) 今後２つのベクトル$\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{b}$の間に積の記号 × があるときは必ず外積を意味し，

内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ と区別する。

問１ $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ に対し，外積と内積を求めよ。

定理　$\boxed{\boldsymbol{a}\text{と}\boldsymbol{b}\text{の外積 }\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\text{ は }\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\text{ と直交するベクトルである。}}$

＜ $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と$\boldsymbol{a}$が直交することの証明＞

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)a_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)a_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)a_3$$

$$= a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 - a_2a_3b_1 = 0$$

内積が 0 になるので $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と$\boldsymbol{a}$は直交している。　(証明終)

問２ $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と$\boldsymbol{b}$が直交していることを証明せよ。

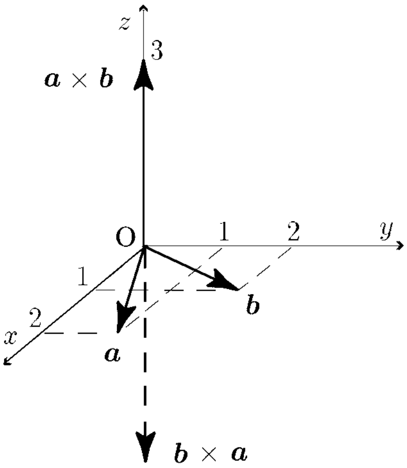
< 外積 2 >

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$(および $\boldsymbol{b}$) と直交していて、その大きさは $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のつくる平行四辺形の面積に等しい。

例 1　$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ のとき,

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1&2\\0&0\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}0&0\\2&1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2&1\\0&0\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}0&0\\1&2\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}$$

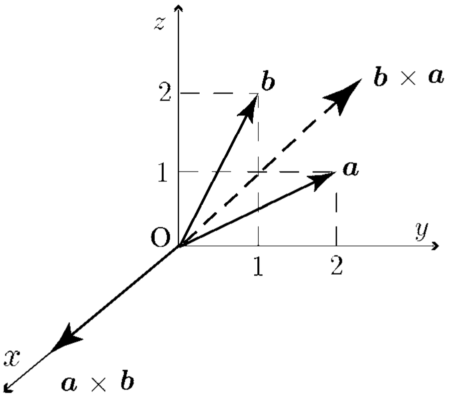
より $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\ (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$ となる。



例 2　$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ のとき,

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&2\\0&0\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}0&0\\2&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}2&1\\0&0\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}0&0\\1&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix}$$

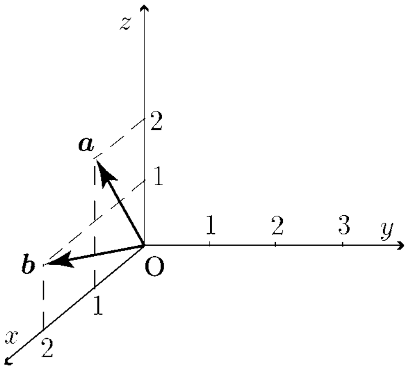
より $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\ (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ となる。



問　$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ のとき,

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ の成分を求め,

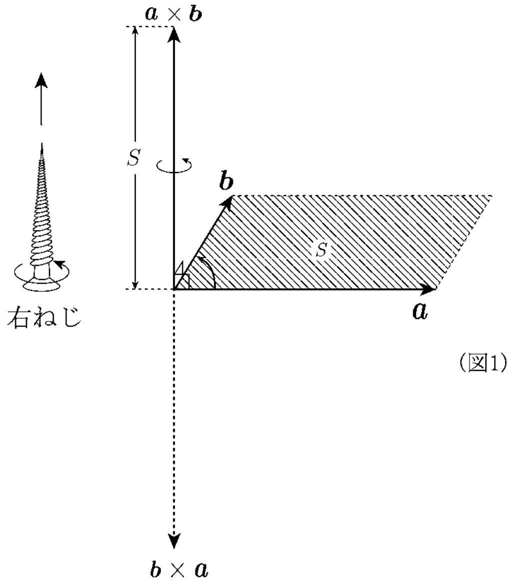
右に $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ を作図せよ。



$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=$

$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=$

< 平行六面体の体積 >

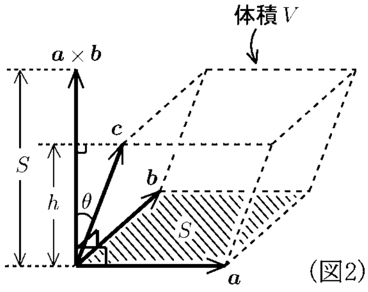


(図1)

２つのベクトル$\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{b}$の外積$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$は，$\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{b}$に垂直なベクトルであり，大きさは$\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{b}$のつくる平行四辺形の面積$S$に等しい。又$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$の向きは$\boldsymbol{a}$から$\boldsymbol{b}$に，向かって回転するときに，右ねじの進む方向である。従って$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$はその反対向きであり

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} \;=\; -(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$

が成り立つ。(図 1)



(図2)

3 つのベクトル$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$が図 2 のような位置関係にあるとき，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$のつくる平行六面体の体積Vは

$$\boxed{V=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}}$$

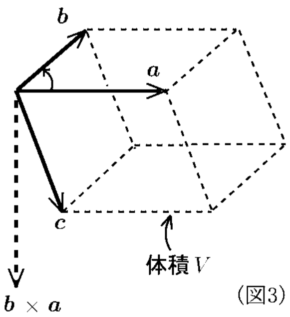
で求められる。

(証明)　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$と$\boldsymbol{c}$とのなす角を$\theta$とすると，平行六面体の高さ$h$は

$h=|\boldsymbol{c}|\cos\theta$であるから

$V=Sh=|\,\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\,|\,|\,\boldsymbol{c}\,|\cos\theta=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$　　($\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$と$\boldsymbol{c}$との内積)

(証明終)



(図3)

(注)　3 つのベクトル$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$が図 3 のような位置関係にあるとき，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$のつくる平行六面体の体積Vは

$$\boxed{V=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c}}$$

となる。

＜スカラー三重積＞

3つの空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ との内積 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の**スカラー三重積**という。 $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ に対し

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix} a_2b_3-a_3b_2 \\ a_3b_1-a_1b_3 \\ a_1b_2-a_2b_1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}=(a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3$$

$$=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

であるから

$$\boxed{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\left\{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right\}\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

(スカラー三重積)

が得られる。行列式の性質より

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$$

が成り立つ。

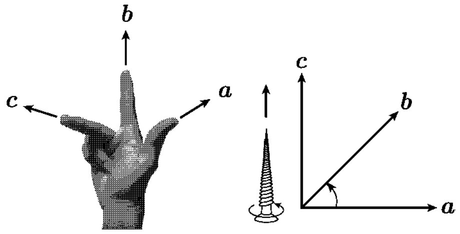
＜右手系と左手系＞

3つのベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ が図1のような位置関係にあるとき

$\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ は**右手系**

という。

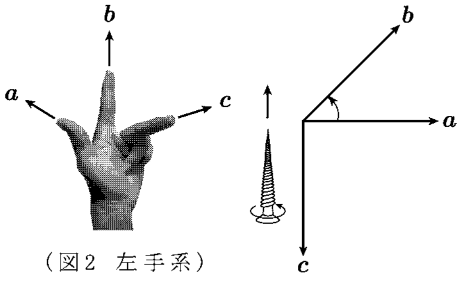
（図1　右手系）



また $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ が図2のような位置関係にあるとき

$\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ は**左手系**

という。



（図2　左手系）

(注) $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ が右手系であれば

$\{\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a}\}$ も右手系であり、

$\{\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\}$ も右手系である。

$\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ が右手系であれば前ページ図2のような位置関係だから $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}>0$。

$\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ が左手系であれば前ページ図3のような位置関係だから $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}<0$。

よって

$\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ が右手系 $\Leftrightarrow (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}>0$

$\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ が左手系 $\Leftrightarrow (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}<0$

が成り立つ。

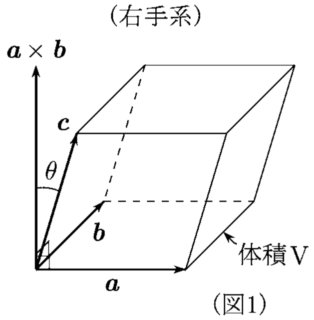
< 空間ベクトルと行列式 >

零ベクトルでない 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ に対し，

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ とのなす角を θ, スカラー三重積 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ の値を D とすると

$$\boxed{D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\,|\,|\boldsymbol{c}\,|\cos\theta}$$

となる。この D の値によって 3 つのベクトルの位置関係がわかる。

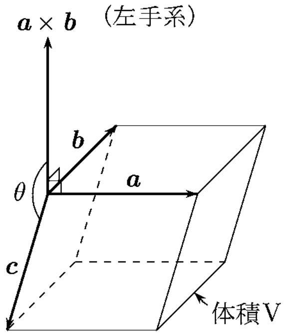


(図1)

[**1**] $\boxed{D>0\text{のとき}}$ $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|>0,\ |\boldsymbol{c}|>0,\ \cos\theta>0$ より $0^\circ<\theta<90^\circ$

このとき $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ は右手系 (図 1) であり，$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ の作る平行六面体の体積を V とすると

$$V=D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$



(図2)

[**2**] $\boxed{D<0\text{のとき}}$ $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|>0,\ |\boldsymbol{c}|>0,\ \cos\theta<0$ より $90^\circ<\theta<180^\circ$

このとき $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ は左手系 (図 2) であり，$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ の作る平行六面体の体積を V とすると

$$V=-D=-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

[**3**] $\boxed{D=0\text{のとき}}$ $|\boldsymbol{c}|>0$ より $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=0$ かまたは $\cos\theta=0$

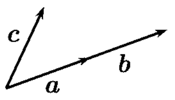
(1) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=0$ のとき $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ (ゼロベクトル) である。

$\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{b}$の作る平行四辺形の面積は 0(ゼロ) だから

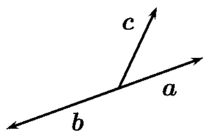
$\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{b}$は平行になる (図 3 または図 4)。すなわち

$$\boxed{\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}}$$

を満たす定数 k が存在する。



(図3)



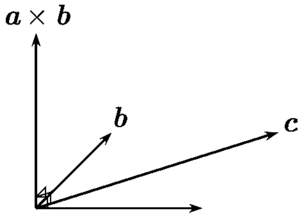
(図4)

(2) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\neq 0$ のとき $\cos\theta=0$ より $\theta=90^\circ$ であるから

$\boldsymbol{c}$は$\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{b}$ の張る平面上のベクトルであり

$$\boxed{\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}}$$

を満たす定数 $x,\ y$ が存在する。



(図5)

問 始点が同じ 3 つのベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ が同一平面上にある必要十分条件を行列式の値 D の符号で表せ。

＜空間ベクトルの１次従属・１次独立＞

問１　零ベクトルでない 3 つのベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R^3}$ に対し, $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ が 1 次従属であれば $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は始点を同じ点にすると同一平面上にあることを示せ。

問２　零ベクトルでない 3 つのベクトルに対し, $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

が一次独立になる必要十分条件を成分に関する式で表せ。

問３　ベクトル $\boldsymbol{a_1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \boldsymbol{a_2} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \boldsymbol{a_3} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R^3}$ が 1 次独立であるとき, $\boldsymbol{R^3}$ の任意のベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}$ の 1 次結合として表せることを示せ。

問４　4 個の空間ベクトル $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{a_4}$ $(\in\boldsymbol{R^3})$ は 1 次従属であることを示せ。

＜１次独立な最大個数１＞

例　4 個のベクトル $\boldsymbol{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a_4} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ のうち, 1 次独立なベクトルの最大個数を求めたい。

行列 $A = (\boldsymbol{a_1}\ \boldsymbol{a_2}\ \boldsymbol{a_3}\ \boldsymbol{a_4})$

を簡約化した行列を

$B = (\boldsymbol{b_1}\ \boldsymbol{b_2}\ \boldsymbol{b_3}\ \boldsymbol{b_4})$

とする。今

$x_1\boldsymbol{a_1} + x_2\boldsymbol{a_2} + x_3\boldsymbol{a_3} + x_4\boldsymbol{a_4} = \boldsymbol{0} \cdots\ (*)$

とおくと, B は A を基本変形したものだから $(*)$ の解 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ は

$x_1\boldsymbol{b_1} + x_2\boldsymbol{b_2} + x_3\boldsymbol{b_3} + x_4\boldsymbol{b_4} = \boldsymbol{0} \cdots\ (*)'$

をみたす。ここで

$\boldsymbol{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{a_1}$	$\boldsymbol{a_2}$	$\boldsymbol{a_3}$	$\boldsymbol{a_4}$		
1	1	1	− 2	⋯	①
1	2	3	− 4	⋯	②
3	0	− 3	1	⋯	③
0	−1	− 2	−1	⋯	④
1	1	1	− 2	⋯	①
0	1	2	− 2	⋯	② − ① = ⑤
0	− 3	− 6	7	⋯	③ − ① × 3 = ⑥
0	−1	− 2	−1	⋯	④
1	0	−1	0	⋯	① − ⑤ = ⑦
0	1	2	− 2	⋯	⑤
0	0	0	1	⋯	⑥ + ⑤ × 3 = ⑧
0	0	0	− 3	⋯	④ + ⑤ = ⑨
1	0	−1	0	⋯	⑦
0	1	2	0	⋯	⑤ + ⑧ × 2
0	0	0	1	⋯	⑧
0	0	0	0	⋯	⑨ + ⑧ × 3
$\boldsymbol{b_1}$	$\boldsymbol{b_2}$	$\boldsymbol{b_3}$	$\boldsymbol{b_4}$		

と書けるので $(*)'$ の解として

$x_1 = 1,\ x_2 = -2,\ x_3 = 1,\ x_4 = 0 \cdots (**)$

が存在する。すなわち $\boldsymbol{b_1},\ \boldsymbol{b_2},\ \boldsymbol{b_3},\ \boldsymbol{b_4}$ は 1 次従属である。$(**)$ は $(*)$ の解でもあるので $\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_2},\ \boldsymbol{a_3},\ \boldsymbol{a_4}$ も 1 次従属である。

問１　$\boldsymbol{b_1},\ \boldsymbol{b_2},\ \boldsymbol{b_4}$ が 1 次独立であることを利用して $\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_2},\ \boldsymbol{a_4}$ が 1 次独立であることを示せ。

この例の場合は $\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_2},\ \boldsymbol{a_3},\ \boldsymbol{a_4}$ は 1 次従属であり, $\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_2},\ \boldsymbol{a_4}$ は 1 次独立である。

$(\boldsymbol{a_3} = -\boldsymbol{a_1} + 2\boldsymbol{a_2})$　この場合 1 次独立なベクトルの最大個数は 3 つである。

問２　4 個のベクトル $\boldsymbol{a_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a_3} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に対し, 1 次独立な最大個数を求め, 1 次独立なベクトルを前から順に求め, 他のベクトルを 1 次独立なベクトルの 1 次結合として表せ。

＜ 1 次独立な最大個数 2 ＞

n 個の m 次列ベクトル $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_n} \in \boldsymbol{R^m}$ に対して，

行列 $A = (\boldsymbol{a_1}\ \boldsymbol{a_2}\ \cdots\ \boldsymbol{a_n})$ を簡約化した行列を $B = (\boldsymbol{b_1}\ \boldsymbol{b_2}\ \cdots\ \boldsymbol{b_n})$ とする。

今 方程式

$$x_1\boldsymbol{a_1} + x_2\boldsymbol{a_2} + \cdots + x_n\boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{0} \cdots (*)$$

と

$$x_1\boldsymbol{b_1} + x_2\boldsymbol{b_2} + \cdots + x_n\boldsymbol{b_n} = \boldsymbol{0} \cdots (*)'$$

は同じ方程式 (解が同じ) であるから，$\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \cdots, \boldsymbol{a_n}$ の 1 次従属性 (1 次独立性) と $\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}, \cdots, \boldsymbol{b_n}$ の 1 次従属性 (1 次独立性) は同じである。

$rank$ の定義から

$$\begin{aligned} rank(A) &= B \text{ の零ベクトルでない行ベクトルの個数} \\ &= B \text{ の行の主成分を含む列ベクトルの個数} \end{aligned}$$

であった。ここで B の行の主成分を含む列ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ の形をしている。従って B の主成分を含む列ベクトルの全体は 1 次独立であり他の列ベクトルは 1 次独立なベクトルの一次結合で表される。従って

$$\begin{aligned} rank(A) &= B \text{ の行の主成分を含む列ベクトルの個数} \\ &= B \text{ の 1 次独立な列ベクトルの最大個数} \\ &= A \text{ の 1 次独立な列ベクトルの最大個数} \end{aligned}$$

である。

問 m=n のとき，n 個の n 次列ベクトル $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_n}(\in\boldsymbol{R^n})$ が 1 次独立であるとする。行列 $A = (\boldsymbol{a_1}\ \boldsymbol{a_2}\ \cdots\ \boldsymbol{a_n})$ を簡約化した行列を B とする。このとき B の行列式 $\det(B)$ の値を求めよ。

＜数ベクトルの１次独立性＞

n 次の正方行列 A を簡約化した行列を B とする。B は A を基本変形したものであるから，ある定数 $K(\neq 0)$ が存在して

$$\det(A) = K\det(B)$$

が成り立つ。このことを利用して，次の問１を答えよ。

問１ n 個の n 次列ベクトル $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{a}_n$ $(\in \boldsymbol{R}^n)$ が１次独立であるとする。このとき正方行列 $A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n)$ の行列式は０でないことを示せ。

問２ n 個の n 次列ベクトル $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{a}_n$ $(\in \boldsymbol{R}^n)$ に対し，$\det(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n) \neq 0$ であれば $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_n$ は１次独立であることを示せ。
(ヒント:クラーメルの公式)

問３ n 個の n 次行ベクトル $\boldsymbol{b}_k = (b_{k1}b_{k2}\ \cdots\ b_{kn})\ (\in \boldsymbol{R}_n)\quad (k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ に対し，$\{\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_n\}$ が１次独立になる必要十分条件を成分に関する式で表せ。

< 連立一次方程式と行列式 >

n 元連立一次方程式で右辺が 0 の場合

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

を**同次方程式**という。列ベクトルを $\boldsymbol{a}_k=\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$ $(k=1,2,\cdots,n)$ とおくと,

方程式 $(*)$ は

$$(*)' \quad x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{0}$$

と同じである。「$(*)$ が全ては 0 でない解 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ をもつ」ということは,「n 個の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_n$ が 1 次従属である」ということである。

$$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_n \text{ が 1 次従属} \quad \Leftrightarrow \quad \det\,(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n)=0$$

より

$$\boxed{(*) \text{ が全ては 0 でない解 } x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n \text{ を持つ} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0}$$

が成り立つ。これが同次方程式 $(*)$ が非自明な解 (=全ては 0 でない解) を持つ必要十分条件である。

(注) 一般の連立一次方程式

$$(**)\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

を考える。$(**)$ が一意的な解 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ を持つための

必要十分条件は $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$ である。

< 1次変換 >

n 次の列ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^n$ から m 次の列ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^m$ への関数を T とする。T が次の条件

(i) $T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v}) \qquad (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^n)$

(ii) $T(c\boldsymbol{u}) = cT(\boldsymbol{u}) \qquad (c \in \boldsymbol{R},\ \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{R}^n)$

を満たすとき，T を $\boldsymbol{R}^n$ から $\boldsymbol{R}^m$ への **1 次変換**または**線形写像**という。

$\boldsymbol{R}^n$ の基本ベクトルを

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots,\ \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\in \boldsymbol{R}^n)$$

とおく。1 次変換 T に対し

$$T(\boldsymbol{e}_k) = \boldsymbol{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} \qquad (\in \boldsymbol{R}^m) \qquad (k = 1,\ 2, \cdots,\ n)$$

とおくと，$\boldsymbol{R}^n$ の任意の元 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ に対して

$$T(\boldsymbol{x}) = T\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{e}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k T(\boldsymbol{e}_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{a}_k$$

$$= \textstyle\sum_{k=1}^{n} x_k \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

と表される。この (m 行 n 列の) 行列 (a_{ij}) を T の表現行列という。

このように m 行 n 列の行列は $\boldsymbol{R}^n$ から $\boldsymbol{R}^m$ への 1 次変換を表す。

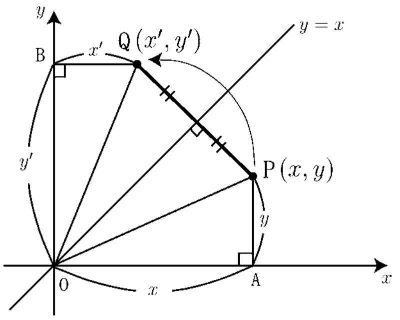
＜平面の１次変換１＞

平面から平面への１次変換で点 (x, y) が点 (x', y') に移るとする。このときある２行２列の行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が存在し，

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表される。この１次変換を $(*)$ 式または行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表す。

例１　直線 $y = x$ に関して対称に移動する変換を考える。この変換によって点 $\mathrm{P}(x, y)$ が点 $\mathrm{Q}(x', y')$ に移動したとすれば、右図より $\triangle\mathrm{OAP}$ と $\triangle\mathrm{OBQ}$ は合同だから



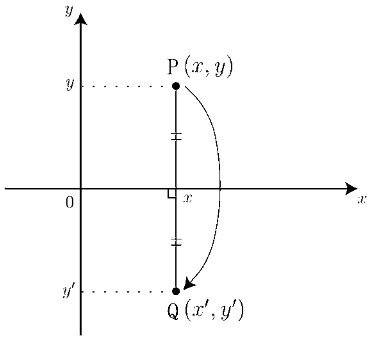
$$x' = y \ , \quad y' = x$$

となる。よって

$$\begin{cases} x' = 0 \times x + 1 \times y \\ y' = 1 \times x + 0 \times y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と書けるから、この変換は１次変換であり、変換行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ である。

例２　x 軸に関して対称に移動する変換を考える。この変換によって点 $\mathrm{P}(x, y)$ が点 $\mathrm{Q}(x', y')$ に移動したとすると右図より



$$x = x \ , \quad y' = -y$$

であるから

$$\begin{cases} x' = 1 \times x + 0 \times y \\ y' = 0 \times x + (-1) \times y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

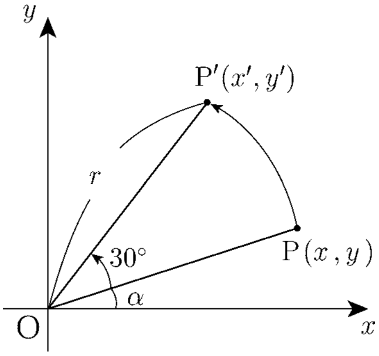
と書けるから、この変換は１次変換であり、変換行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ である。

問　平面上の点を原点に関して対称に移動する１次変換を A とする。A を表す行列を求めよ。

< 平面の１次変換２ >

例 座標平面上の点を原点 O を中心として反時計まわりに角度 30° だけ回転移動する変換を考える。この変換によって点 $\mathrm{P}(x,y)$ が点 $\mathrm{P}'(x',y')$ に移動したとする。(x',y') を (x,y) で表したい。

右図のように原点からの距離を $\mathrm{OP}=\mathrm{OP}'=r$ とし、線分 OP と x 軸との角度を α とする。このとき



$$x=r\cos\alpha \quad , \quad y=r\sin\alpha \quad , \quad x'=r\cos(\alpha+30^\circ) \quad , \quad y'=r\sin(\alpha+30^\circ)$$

である。加法定理から

$$\begin{aligned} x' &= r\cos(\alpha+30^\circ)=r\{\cos\alpha\cos30^\circ-\sin\alpha\sin30^\circ\} \\ &= (r\cos\alpha)\cos30^\circ-(r\sin\alpha)\sin30^\circ = x\cos30^\circ-y\sin30^\circ \\ y' &= r\sin(\alpha+30^\circ)=r\{\sin\alpha\cos30^\circ+\cos\alpha\sin30^\circ\} \\ &= (r\sin\alpha)\cos30^\circ+(r\cos\alpha)\sin30^\circ = y\cos30^\circ+x\sin30^\circ \end{aligned}$$

であるから、この変換は

$$\begin{cases} x'=x\cos30^\circ-y\sin30^\circ \\ y'=x\sin30^\circ+y\cos30^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos30^\circ & -\sin30^\circ \\ \sin30^\circ & \cos30^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となり１次変換である。この１次変換を表す行列は

$$\begin{pmatrix} \cos30^\circ & -\sin30^\circ \\ \sin30^\circ & \cos30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

問 次の１次変換を表す行列を求めよ。(回転は全て反時計回りとする)

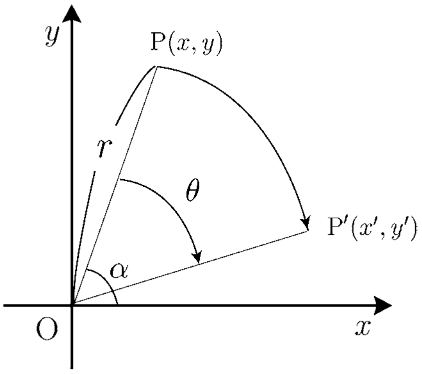
(1) 原点中心, 45° 回転

(2) 原点中心, 90° 回転

(3) 原点中心, 120° 回転

(4) 原点中心, θ 回転

< 平面の１次変換３ >



例 座標平面上の点を原点 O を中心として時計まわりに角度 θ だけ回転移動する変換を考える。この変換によって点 $\mathrm{P}(x,y)$ が点 $\mathrm{P}'(x',y')$ に移動したとする。(x',y') を (x,y) で表したい。

右図のように原点からの距離を $\mathrm{OP} = \mathrm{OP}' = r$ とし，線分 OP と x 軸との角度を α とすると

$$x = r\cos\alpha \quad , \quad y = r\sin\alpha \quad , \quad x' = r\cos(\alpha-\theta) \quad , \quad y' = r\sin(\alpha-\theta)$$

と表される。

問１ 加法定理を用いて $\cos(\alpha-\theta)$, $\sin(\alpha-\theta)$ を展開し，整理して，x'，y' を x，y と $\cos\theta$，$\sin\theta$ で表せ。

$x' =$

$y' =$

問２ この変換を表す行列を $\cos\theta$，$\sin\theta$ で表せ。

問３ $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とする。A の逆行列を求めよ。

$A^{-1} =$

問４ 三角関数の性質を用いて次の行列を $\cos\theta$ と $\sin\theta$ だけで表せ。

$$\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} =$$

問５ 次の１次変換を表す行列を求めよ。

(1) 原点中心，時計まわりに 30° 回転移動

(2) 原点中心，時計まわりに 45° 回転移動

(3) 原点中心，時計まわりに 90° 回転移動

(4) 原点中心，時計まわりに 120° 回転移動

＜平面の１次変換４＞

２つの１次変換 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ に対し，A にひき続き B を行う１次変換を求めたい。

今，点 $(x\,,\,y)$ が A によって $(x'\,,\,y')$ に移り，さらに B によって $(x'\,,\,y')$ が $(x'',\,y'')$ に移ったとする。

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\quad ,\qquad \boldsymbol{x'}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\quad ,\qquad \boldsymbol{x''}=\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\boldsymbol{x'}=A\boldsymbol{x}\quad ,\qquad \boldsymbol{x''}=B\boldsymbol{x'}$$

より

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\quad ,\qquad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

であるから

$$(1)\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases}\qquad ,\ (2)\begin{cases} x''=\alpha x'+\beta y' \\ y''=\gamma x'+\delta y' \end{cases}$$

と表される。

問１　(1)，(2) 式より x''，y'' を x，y で表すことによって，A にひき続き B を行う１次変換を行列で表せ。

問２　上の A，B に対し，次の行列の積を求めよ。

$AB=$

$BA=$

＜平面の１次変換５＞

2 つの 1 次変換 A, B がある。今点 (x, y) が A によって点 (x', y') に移り，さらに B によって (x', y') が (x'', y'') に移ったとする，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{x}'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} \qquad , \qquad \boldsymbol{x}'' = B\boldsymbol{x}'$$

より

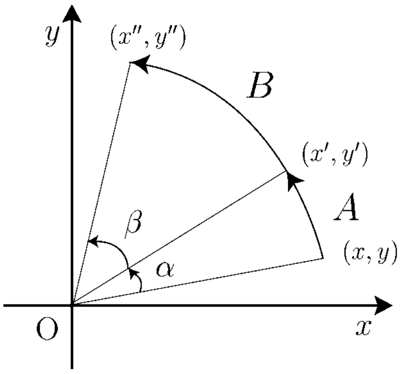
$$\boldsymbol{x}'' \;=\; B\boldsymbol{x}' \;=\; B(A\boldsymbol{x}) \;=\; (BA)\boldsymbol{x}$$

であるから , A にひき続き B を行う 1 次変換は行列 B と A の積 BA で表される。

例　原点を中心として反時計回りに角度 α だけ回転移動する 1 次変換を A, 同じく角度 β だけ回転移動する 1 次変換を B とすると , A と B は行列

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \;,\quad B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

で表される。



問１　A にひき続き B を行う 1 次変換を $\cos\alpha$，$\sin\alpha$，$\cos\beta$，$\sin\beta$ を用いた行列で表せ。

問２　例の場合に A にひき続き B を行う 1 次変換は角度 $\alpha+\beta$ の回転移動になる。この変換行列を求めよ。

< 平面の１次変換６ >

例１ １次変換 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ に対し，A の逆行列 A^{-1} が表す１次変換を考える。

A の逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{1 \times 4 - 2 \times 3} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

である。A によって点 $(5,\ 6)$ は点 $(17,\ 39)$ に移る。

$$A \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

A^{-1} によって点 $(17,\ 39)$ は点 $(5,\ 6)$ にもどる。

一般に正則行列 A が表す１次変換によって点 $(x,\ y)$ が点 $(x',\ y')$ に移るとき，A^{-1} によって点 $(x',\ y')$ は点 $(x,\ y)$ にもどる。すなわち

$$(*) \quad \boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{ならば} \qquad A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

である。このとき A^{-1} が表す１次変換を１次変換 A の **逆変換** という。

例２ 例の場合に $(*)$ を証明する。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{pmatrix} \text{ より } \begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$$

$$A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x' + y' \\ \frac{3x'}{2} - \frac{y'}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2(x + 2y) + (3x + 4y) \\ \frac{3}{2}(x + 2y) - \frac{1}{2}(3x + 4y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2x - 4y + 3x + 4y \\ \frac{3}{2}x + 3y - \frac{3}{2}x - 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

問 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(ad - bc \neq 0)$ の場合に $(*)$ を証明せよ。

< 空間の１次変換１ >

空間から空間への１次変換で点 $(x,\ y,\ z)$ が点 $(x',\ y',\ z')$ に移るとする。このとき，ある３行３列の行列 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ が存在し，

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

と表される。この１次変換を $(*)$ 式または行列 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ で表す。

例 １次変換

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

によって点 $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1)$ が移される先を求める。

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

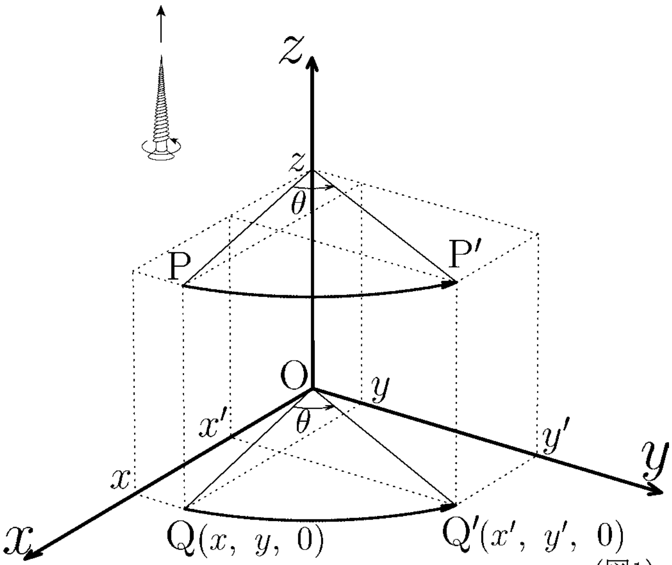
$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4+7 \\ 2+5+8 \\ 3+6+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 18 \end{pmatrix}$$

より，原点 $(0,0,0)$ は原点に，点 $(1,0,0)$ は点 $(1,2,3)$ に，点 $(0,1,0)$ は点 $(4,5,6)$ に，点 $(0,0,1)$ は点 $(7,8,9)$ に，点 $(1,1,1)$ は点 $(12,15,18)$ に移る。

問 １次変換 $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 13 \\ 3 & 9 & 15 \\ 5 & 11 & 17 \end{pmatrix}$ によって点 $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$, $(1,1,1)$ の移される先を求めよ。

< 空間の 1 次変換 2 >

座標空間内の任意の点を z 軸を中心軸として回転移動する変換を考える。回転の方向は右図のようである。すなわち z 軸と同じ方向に右ねじを置き, 右ねじが回転しながら進むときの回転する方向にまわす。



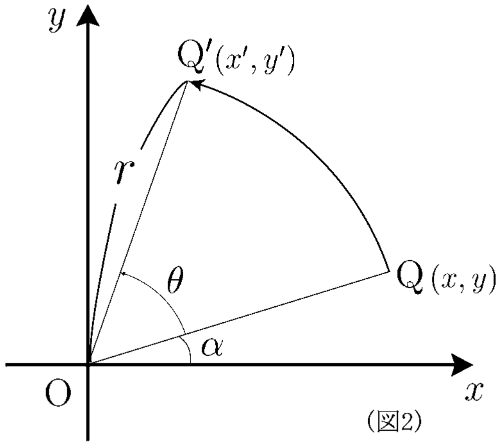
（図1）

今空間の任意の点を z 軸を中心軸として (上記の方向に) 角度 θ だけ回転移動する場合を考える。点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ がこの回転移動によって点 $\mathrm{P}'(x', y', z')$ に移ったとする。x', y', z' を x, y, z と θ で表したい。

z 軸のまわりに回転するので z 座標は変わらない。すなわち

$$z' = z \quad \cdots \quad ①$$

である。点 P , P′ を xy 平面上に射影した点を Q , Q′ とする (図 1)。 Q , Q′ は図 2 のような位置関係にある。



（図2）

問 (1) 33 ページを参考にして, 図 2 の (x', y') を (x, y) と θ で表せ。

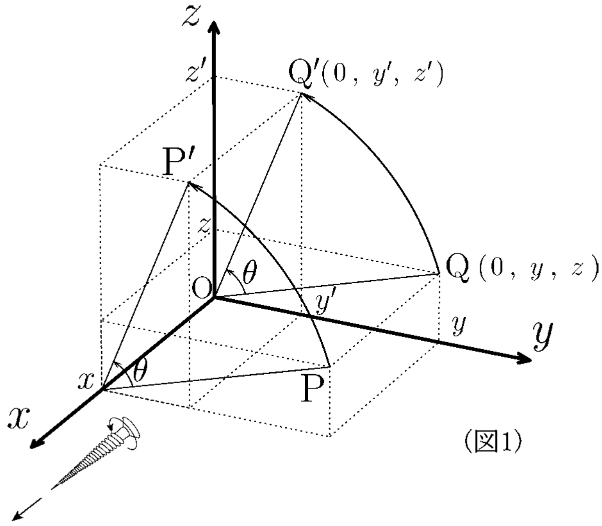
$x' =$

$y' =$

(2) この回転移動を行列で表せ。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

＜空間の１次変換３＞

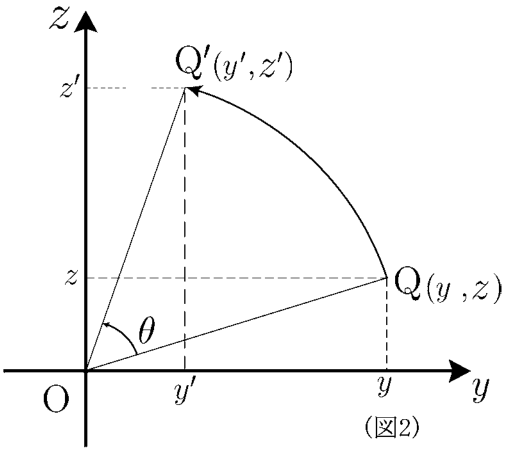


(図1)

座標空間内の任意の点を x 軸を中心軸として回転移動する変換を考える。回転の方向は右図のようである。すなわち x 軸と同じ方向に右ねじを置き, 右ねじが回転しながら進むときの回転する方向にまわす。

今空間の任意の点を x 軸を中心軸として (上記の方向に) 角度 θ だけ回転移動する場合を考える。点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ が, この回転によって点 $\mathrm{P}'(x', y', z')$ に移ったとする (図 1)。

x', y', z' を x, y, z と θ で表したい。



(図2)

問１ 図 3 のように xy 平面上の点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ を原点を中心にして角度 θ だけ回転した点を $\mathrm{A}'(a',\ b')$ と置く。33 ページを参考にして, a', b' を a, b と θ で表せ。

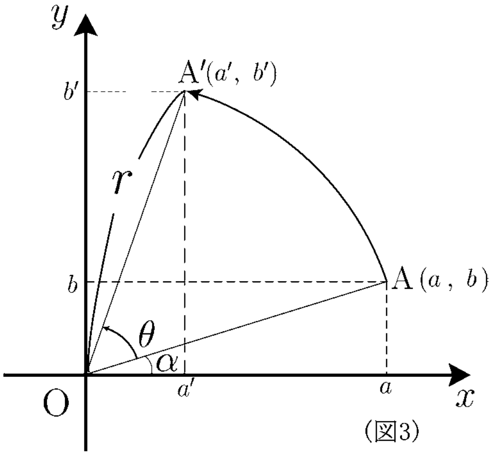
$a' =$

$b' =$

問２ 図 2 のように yz 平面上の点 $\mathrm{Q}(y,\ z)$ を原点を中心として角度 θ だけ回転した点を $\mathrm{Q}'(y',\ z')$ と置く。y', z' を y, z と θ で表せ。

$y' =$

$z' =$



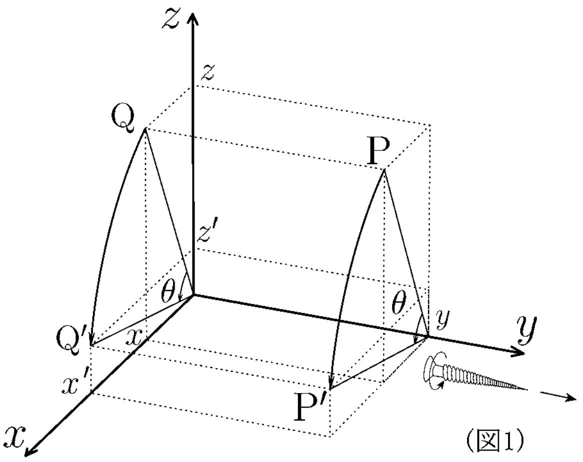
(図3)

問３ 図 1 の回転移動を行列で表せ。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

＜空間の１次変換４＞

座標空間内の任意の点を y 軸を中心軸として回転移動する変換を考える。回転の方向は右図のようである。すなわち y 軸と同じ方向に右ねじを置き, 右ねじが回転しながら進むときの回転する方向にまわす。



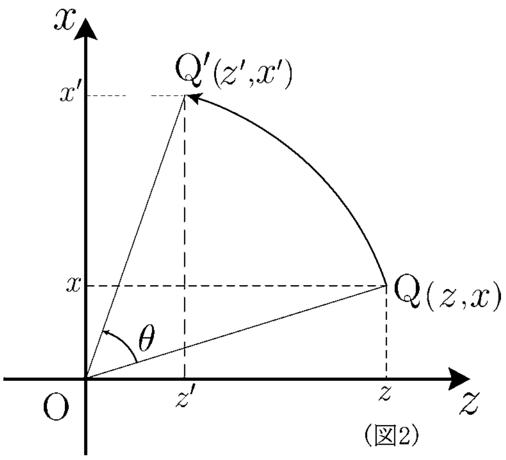
(図1)

今空間の任意の点を y 軸を中心軸として (上記の方向に) 角度 θ だけ回転移動する場合を考える。点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ がこの回転移動によって点 $\mathrm{P}'(x',y',z')$ に移ったとする (図 1)。x', y', z' を x, y, z と θ で表したい。

問１ 図 2 のように zx 平面上の点 $\mathrm{Q}(z,\ x)$ を原点を中心にして角度 θ だけ回転した点を $\mathrm{Q}'(z',\ x')$ と置く。z', x' を z, x と θ で表せ。

$z' =$

$x' =$



(図2)

問２ 図 1 の回転によって点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ が $\mathrm{P}'(x',\ y',\ z')$ に移った。x', y', z' を x, y, z と θ で表せ。

$x' =$

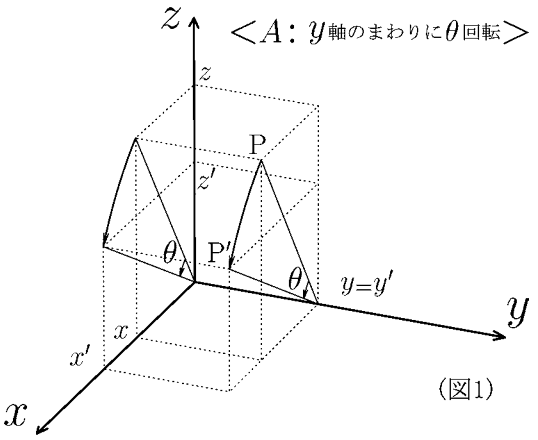
$y' =$

$z' =$

問３ 図 1 の回転移動を行列で表せ。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

< 空間の１次変換５ >



（図1）

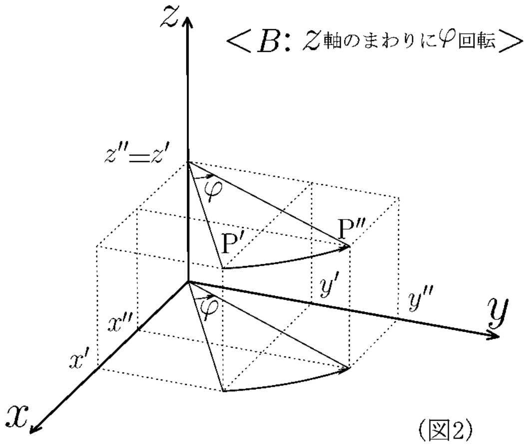
座標空間内の点 P$(x,\ y,\ z)$ を y 軸を中心軸として角度 θ だけ回転移動した点を P′$(x',\ y',\ z')$ とする (図 1)。前ページの結果より

$$(1)\ \begin{cases} x' = x\cos\theta + z\sin\theta \\ y' = y \\ z' = -x\sin\theta + z\cos\theta \end{cases}$$

となる。この点 P′$(x',\ y',\ z')$ をさらに z 軸を中心軸として角度 φ だけ回転移動した点を P″$(x'',\ y'',\ z'')$ とする (図 2)。39 ページの結果より

$$(2)\ \begin{cases} x'' = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y'' = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \\ z'' = z' \end{cases}$$

となる。



（図2）

問１　(1) 式を (2) 式に代入して整理し, x'', y'', z'' を x, y, z と θ, φ だけで表し, 行列で表現せよ。

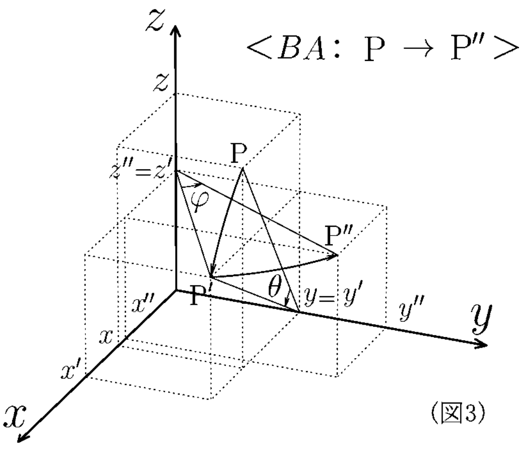
$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

問２　行列

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

に対し, 積 BA を求めよ。



（図3）

$BA =$

< 転置行列 >

行列 A の行と列を入れかえた行列を**転置行列** (*tansposed matrix*) といい，${}^tA$ で表す。

例 1 $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ のとき ${}^tA = \begin{pmatrix} a & b \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ のとき ${}^t\boldsymbol{x} = (x_1 \quad x_2)$

$B = (b_1 \quad b_2 \quad b_3)$ のとき ${}^tB = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

問 1 次の行列の転置行列を求めよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, ${}^tA =$

(2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, ${}^tB =$

(3) $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$, ${}^t\boldsymbol{p} =$

(4) $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, ${}^t\boldsymbol{r} =$

例 2 空間ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ に対し，${}^t\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ との行列の積

$${}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \qquad (= \boldsymbol{x} \text{ と } \boldsymbol{y} \text{ との内積})$$

はベクトルの内積 $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ である。特に ${}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = |\boldsymbol{x}|^2$ である。

問 2 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対し，次の行列の積を求めよ。

(1) $A\boldsymbol{x}$

(2) ${}^t\boldsymbol{x}\,{}^tA$

例 3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対し

$$|A\boldsymbol{x}|^2 = \left|\begin{pmatrix} x+3y \\ 2x+4y \end{pmatrix}\right|^2 = (x+3y)^2 + (2x+4y)^2 = (x+3y \quad 2x+4y)\begin{pmatrix} x+3y \\ 2x+4y \end{pmatrix}$$

$$= (x \quad y)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = {}^t\boldsymbol{x}\,{}^tAA\boldsymbol{x}$$

問 3 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対し次式の値を $\boldsymbol{x}$，${}^t\boldsymbol{x}$，A，${}^tA$ で表せ。

$|A\boldsymbol{x}|^2 =$

＜ 2次の直交行列 ＞

平面のベクトル $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ が単位ベクトル (= 大きさ 1)

$$\boxed{|\boldsymbol{p}_1|^2 = x_1^2 + y_1^2 = 1 \quad , \quad |\boldsymbol{p}_2|^2 = x_2^2 + y_2^2 = 1 \quad (\text{単位ベクトル})} \ (*)_1$$

であり, $\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$ が直交している (⇔ 内積が 0)

$$\boxed{\boldsymbol{p}_1 \perp \boldsymbol{p}_2 \ \Leftrightarrow \ \boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \ (\text{直交})} \ (*)_2$$

であるとき $\{\boldsymbol{p}_1\ ,\ \boldsymbol{p}_2\}$ は**正規直交系**であるという。

$\{\boldsymbol{p}_1\ ,\ \boldsymbol{p}_2\}$ が正規直交系であるとき, 2 つのベクトルを並べた行列

$$\boxed{P = (\,\boldsymbol{p}_1 \ \ \boldsymbol{p}_2\,) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} : \text{直交行列} \ \Leftrightarrow \ \{\boldsymbol{p}_1\ ,\ \boldsymbol{p}_2\} \text{ が正規直交系}}$$

を 2 次の**直交行列**という。

今 $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ が直交行列であるとき, $(*)_1$ と $(*)_2$ 式より

$$ {}^tPP = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {x_1}^2 + {y_1}^2 & x_1x_2 + y_1y_2 \\ x_1x_2 + y_1y_2 & {x_2}^2 + {y_2}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

より ${}^tP$ は P の逆行列になる。すなわち

$$\boxed{P : \text{直交行列} \quad \Leftrightarrow \quad {}^tP = P^{-1} \ \ (\text{転置行列} = \text{逆行列})}$$

がわかる。

問 1 $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ とおく。

(1) 次の値を求めよ。($\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2$ は $\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$ の内積である)

① $|\boldsymbol{p}_1|^2 =$ ② $|\boldsymbol{p}_2|^2 =$ ③ $\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2 =$

(2) $P = (\boldsymbol{p}_1 \quad \boldsymbol{p}_2)$ とおく。P の逆行列 P^{-1} を求めよ。 $P^{-1} =$

問 2 $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ が直交行列かどうかを調べ, その逆行列 P^{-1} を求めよ。

＜3次の直交行列 1＞

空間のベクトル $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ が単位ベクトル (= 大きさ 1)

$$\boxed{|\boldsymbol{p}_1|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1,\ |\boldsymbol{p}_2|^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 1,\ |\boldsymbol{p}_3|^2 = x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 = 1 \text{ (単位ベクトル)}} \ (*)_1$$

であり, 直交系 (互いに直交している $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{p}_1 \perp \boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_2 \perp \boldsymbol{p}_3$, $\boldsymbol{p}_3 \perp \boldsymbol{p}_1$)

$$\boxed{\left.\begin{aligned} \boldsymbol{p}_1 \perp \boldsymbol{p}_2 &\Leftrightarrow \boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0 \\ \boldsymbol{p}_2 \perp \boldsymbol{p}_3 &\Leftrightarrow \boldsymbol{p}_2 \cdot \boldsymbol{p}_3 = x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3 = 0 \\ \boldsymbol{p}_3 \perp \boldsymbol{p}_1 &\Leftrightarrow \boldsymbol{p}_3 \cdot \boldsymbol{p}_1 = x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3 = 0 \end{aligned}\right\} \text{(直交系)}} \ (*)_2$$

であるとき $\{\boldsymbol{p}_1 , \boldsymbol{p}_2 , \boldsymbol{p}_3\}$ は**正規直交系**であるという。正規直交系
$\{\boldsymbol{p}_1 , \boldsymbol{p}_2 , \boldsymbol{p}_3\}$ を並べた行列

$$\boxed{P = (\boldsymbol{p}_1\ \ \boldsymbol{p}_2\ \ \boldsymbol{p}_3) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \text{ が直交行列 } \Leftrightarrow \{\boldsymbol{p}_1 , \boldsymbol{p}_2 , \boldsymbol{p}_3\} \text{ が正規直交系}}$$

を 3 次の**直交行列**という。

問 $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \\ -\frac{2}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{70}} \\ \frac{5}{\sqrt{70}} \\ \frac{6}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}$ に対し, 次の問に答えよ。

(1) 次の値を求めよ。

① $|\boldsymbol{p}_1|^2 =$　　② $|\boldsymbol{p}_2|^2 =$　　③ $|\boldsymbol{p}_3|^2 =$

④ $\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2 =$　　⑤ $\boldsymbol{p}_2 \cdot \boldsymbol{p}_3 =$　　⑥ $\boldsymbol{p}_3 \cdot \boldsymbol{p}_1 =$

(2) 行列 $P = (\boldsymbol{p}_1\ \ \boldsymbol{p}_2\ \ \boldsymbol{p}_3)$ に対し, 転置行列 ${}^tP$ との積 ${}^tPP$ を求めよ。

${}^tPP =$

(3) P の逆行列 P^{-1} を求めよ。

＜ 3 次の直交行列 2 ＞

3 次の正方行列 $P = (\,\boldsymbol{p}_1\ \ \boldsymbol{p}_2\ \ \boldsymbol{p}_3\,) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$ が直交行列

とは $\{\boldsymbol{p}_1\,,\ \boldsymbol{p}_2\,,\ \boldsymbol{p}_3\}$ が正規直交系になることである。すなわち

$$\boxed{|\boldsymbol{p}_1|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1,\ |\boldsymbol{p}_2|^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 1,\ |\boldsymbol{p}_3|^2 = x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 = 1} \cdots (*)_1$$

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2 &= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0 \\ \boldsymbol{p}_2 \cdot \boldsymbol{p}_3 &= x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3 = 0 \\ \boldsymbol{p}_3 \cdot \boldsymbol{p}_1 &= x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3 = 0 \end{aligned}} \cdots (*)_2$$

問　上の場合に以下の問に答えよ。

(1) P と転置行列 ${}^tP$ との積 ${}^tPP$ を求め，$(*)_1$ と $(*)_2$ 式を用いて簡単にせよ。

${}^tPP =$

(2) P の逆行列 P^{-1} を求めよ。　$P^{-1} =$

(3) $P\,{}^tP$ を x_1，y_1，z_1，x_2，y_2，z_2，x_3，y_3，z_3 を用いて表せ。

$P\,{}^tP =$

(4) $PP^{-1} = E$ (単位行列) であることから, 次の値を求めよ。

① ${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 =$　② ${y_1}^2 + {y_2}^2 + {y_3}^2 =$　③ ${z_1}^2 + {z_2}^2 + {z_3}^2 =$

④ $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 =$　⑤ $y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3 =$　⑥ $x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3 =$

(5) ${}^tP$ が直交行列であることを示せ。

＜ 3次の直交行列 3 ＞

例 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$ は「y 軸まわりの θ 回転」を意味する (P.41)。

$$A = (\boldsymbol{a}_1 \ \ \boldsymbol{a}_2 \ \ \boldsymbol{a}_3) \quad , \quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

とおくと $|\boldsymbol{a}_1|^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, $|\boldsymbol{a}_2|^2 = 1$, $|\boldsymbol{a}_3|^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$,
$\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 = 0$, $\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_3 = 0$, $\boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{a}_1 = \cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta = 0$
より A は直交行列であるから

$$A^{-1} = {}^t\!A = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(注) この例のように回転を表す行列は全て直交行列である。

問 $B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{b}_1 \ \ \boldsymbol{b}_2 \ \ \boldsymbol{b}_3)$

$$C = BA = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi & \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi & \sin\varphi\sin\theta \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} = (\boldsymbol{c}_1 \ \ \boldsymbol{c}_2 \ \ \boldsymbol{c}_3)$$

とおく。

(1) 次の値を求めよ。

① $|\boldsymbol{b}_1|^2 =$ ② $|\boldsymbol{b}_2|^2 =$ ③ $|\boldsymbol{b}_3|^2 =$

④ $\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2 =$ ⑤ $\boldsymbol{b}_2 \cdot \boldsymbol{b}_3 =$ ⑥ $\boldsymbol{b}_3 \cdot \boldsymbol{b}_1 =$

⑦ $|\boldsymbol{c}_1|^2 =$

⑧ $|\boldsymbol{c}_2|^2 =$

⑨ $|\boldsymbol{c}_3|^2 =$

⑩ $\boldsymbol{c}_1 \cdot \boldsymbol{c}_2 =$

⑪ $\boldsymbol{c}_2 \cdot \boldsymbol{c}_3 =$

⑫ $\boldsymbol{c}_3 \cdot \boldsymbol{c}_1 =$

(2) $B\,, C$ の逆行列を求めよ。

$B^{-1} =$, $C^{-1} =$

＜3次の直交行列 4＞

[定理] 3次の正方行列 $P = (\ \boldsymbol{p}_1\quad \boldsymbol{p}_2\quad \boldsymbol{p}_3\ )$ $(\ \boldsymbol{p}_1\ ,\ \boldsymbol{p}_2\ ,\ \boldsymbol{p}_3$ は3次の縦ベクトル)
に対し , 次の [I] , [Ⅱ] , [Ⅲ] , [Ⅳ] は同値である。

[I] P は直交行列である $(\ = \{\ \boldsymbol{p}_1\ ,\ \boldsymbol{p}_2\ ,\ \boldsymbol{p}_3\ \}$ は正規直交系)

[Ⅱ] ${}^tP = P^{-1}$ (転置行列 = 逆行列)

[Ⅲ] 任意の空間ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し , $|P\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x}|$ (ベクトルの大きさを変えない)

[Ⅳ] 任意の空間ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ に対し , $(P\boldsymbol{x})\cdot(P\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ (内積を変えない)

＜証明＞ [I] ⇒ [Ⅱ] は46ページよりわかる。

[Ⅱ] ⇒ [Ⅲ] 43ページより

$$|P\boldsymbol{x}|^2 = {}^t(P\boldsymbol{x})(P\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}\,{}^tPP\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{x}|^2 \quad \text{より}\ |P\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x}|$$

[Ⅲ] ⇒ [Ⅳ]

$$|P(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})|^2 = |P\boldsymbol{x}+P\boldsymbol{y}|^2 = (P\boldsymbol{x}+P\boldsymbol{y})\cdot(P\boldsymbol{x}+P\boldsymbol{y}) = |P\boldsymbol{x}|^2 + 2(P\boldsymbol{x})\cdot(P\boldsymbol{y}) + |P\boldsymbol{y}|^2$$

$$|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2 = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}|^2 + 2(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) + |\boldsymbol{y}|^2$$

ここで [Ⅲ] より $|P(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})|^2 = |\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2$, $|P\boldsymbol{x}|^2 = |\boldsymbol{x}|^2$, $|P\boldsymbol{y}|^2 = |\boldsymbol{y}|^2$ より

$$2(P\boldsymbol{x})\cdot(P\boldsymbol{y}) = 2(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) \Rightarrow (P\boldsymbol{x})\cdot(P\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$$

[Ⅳ] ⇒ [I] $\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P = (\ \boldsymbol{p}_1\quad \boldsymbol{p}_2\quad \boldsymbol{p}_3\ )$ とおくと

$P\boldsymbol{i} = \boldsymbol{p}_1$, $P\boldsymbol{j} = \boldsymbol{p}_2$, $P\boldsymbol{k} = \boldsymbol{p}_3$ となるから $|\boldsymbol{p}_1|^2 = |P\boldsymbol{i}|^2 = (P\boldsymbol{i})\cdot(P\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = |\boldsymbol{i}|^2 = 1$

同様にして, $|\boldsymbol{p}_2|^2 = |P\boldsymbol{j}|^2 = |\boldsymbol{j}|^2 = 1$, $|\boldsymbol{p}_3|^2 = |P\boldsymbol{k}|^2 = |\boldsymbol{k}|^2 = 1$

$\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2 = (P\boldsymbol{i})\cdot(P\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = 0$, $\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{p}_3 = (P\boldsymbol{j})\cdot(P\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = 0$,

$\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_3 = (P\boldsymbol{i})\cdot(P\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k} = 0$ より $\{\ \boldsymbol{p}_1\ ,\ \boldsymbol{p}_2\ ,\ \boldsymbol{p}_3\ \}$ は正規直交系

(証明終)

(注) この定理によって, [I], [Ⅱ], [Ⅲ], [Ⅳ] のどれかが成立すれば直交行列であることがわかる。

例 「P が直交行列ならば $P^{-1} = {}^tP$ も直交行列である。」

(証明) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $P^{-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$ とおくと $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}'$ である。P が直交行列より $|P\boldsymbol{x}'| = |\boldsymbol{x}'|$ であるから $|P^{-1}\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x}'| = |P\boldsymbol{x}'| = |\boldsymbol{x}|$ より [Ⅲ] が成立する。

(証明終)

問 $\det({}^tAA) = \det({}^tA)\det(A)$ を利用して直交行列 A の行列式の値は $\det(A) = \pm 1$ であることを示せ。

(注) 3次の直交行列 $P = (\boldsymbol{p_1}\ \boldsymbol{p_2}\ \boldsymbol{p_3})$ に対し, $\{\boldsymbol{p_1},\ \boldsymbol{p_2},\ \boldsymbol{p_3}\}$ が右手系であれば $\det(P) = 1$ である。$\det(P) = 1$ である直交行列 P を**回転行列**という。

< 正規直交基底 1 >

2 つの平面ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に対し, 任意の平面ベクトル $\boldsymbol{p}$ が $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の 1 次結合として表されるとき, $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ は平面ベクトルの**基底**という。

[定理]

> 2 つの平面ベクトル $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ が正規直交系であれば,
> 任意の平面ベクトル $\boldsymbol{p}$ は
>
> $$\boldsymbol{p} = p_1'\boldsymbol{a} + p_2'\boldsymbol{b} \qquad (p_1' = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}\ ,\ \ p_2' = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{b})$$
>
> と表される。ただし $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{a}$ の内積である。

(注) この定理は正規直交系 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ が平面ベクトルの基底であることを意味する。
このとき $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ を**正規直交基底**という。この定理の p_1', p_2' を正規直交基底 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ に関する $\boldsymbol{p}$ の**成分**という。(図 1)

[証明]　$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とおき,

$$p_1'\boldsymbol{a} + p_2'\boldsymbol{b} = \boldsymbol{p} \qquad \cdots\cdots\cdots(1)$$

をみたす定数 p_1' と p_2' を求めたい。(1) 式を成分で表すと

$$p_1'\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + p_2'\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1p_1' + b_1p_2' \\ a_2p_1' + b_2p_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \cdots(2)$$

となる。ここで $\boldsymbol{p}' = \begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \end{pmatrix}$, $A = (\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ とおくと A は直交行列であるから (2) 式は

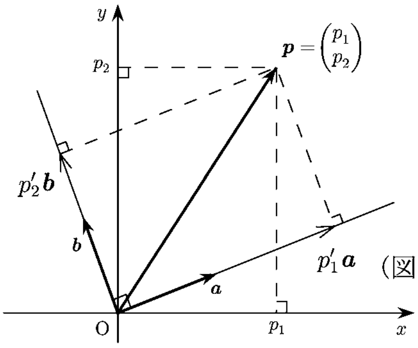
$$A\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{p}' = A^{-1}\boldsymbol{p} = {}^tA\boldsymbol{p}$$

となる。よって成分で表すと

$$\begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \qquad\qquad \\ \qquad\qquad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{b} \end{pmatrix}$$

となる。

(証明終)



(図1)

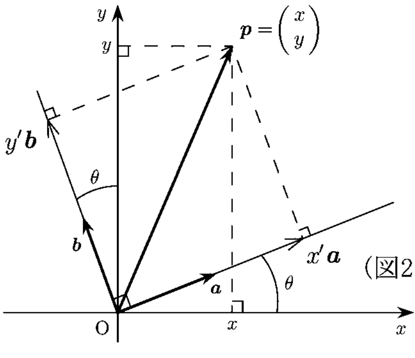
問 1　上の証明の (　) の中に行列の成分を記入して証明を完成させよ。

問 2　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ は正規直交系である (図 2)。任意のベクトル $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対し

$$\boldsymbol{p} = x'\boldsymbol{a} + y'\boldsymbol{b}$$

をみたす x', y' を x, y と $\cos\theta$, $\sin\theta$ で表せ。

$$\begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$$



(図2)

＜ 正規直交基底 2 ＞

3 つの空間ベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ に対し，任意の空間ベクトル $\boldsymbol{p}$ が $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ の 1 次結合として表されるとき，$\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ は空間ベクトルの**基底**という。

[定理] 3 つの空間ベクトル $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ が正規直交系であれば
任意の空間ベクトル $\boldsymbol{p}$ は

$$\boldsymbol{p} = p'_1\boldsymbol{a} + p'_2\boldsymbol{b} + p'_3\boldsymbol{c} \qquad \left(p'_1 = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}\ ,\ \ p'_2 = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{b}\ ,\ \ p'_3 = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{c}\right)$$

と表される。ここで $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{a}$ の内積である。

(注) この定理は正規直交系 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ が空間ベクトルの基底であることを意味する。
このとき $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ を**正規直交基底**という。
この定理の p'_1 , p'_2 , p'_3 を正規直交基底 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ に関する $\boldsymbol{p}$ の**成分**という。

[証明] $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ とおき,

$$p'_1\boldsymbol{a} + p'_2\boldsymbol{b} + p'_3\boldsymbol{c} = \boldsymbol{p} \quad \cdots\cdots(1)$$

を満たす定数 $p'_1,\ p'_2,\ p'_3$ を求めたい。(1) 式を成分で表すと

$$p'_1\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + p'_2\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + p'_3\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \cdots(2)$$

となる。ここで $\boldsymbol{p}' = \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{pmatrix}$, $A = (\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ とおくと A は直交行列であるから (2) 式は

$$A\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{p}' = A^{-1}\boldsymbol{p} = {}^tA\boldsymbol{p}$$

となる。よって成分で表すと

$$\begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \qquad\qquad \\ \\ \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{c} \end{pmatrix}$$

となる。(証明終)

問 1 上の証明の (　) の中に行列の成分を記入して証明を完成させよ。

問 2 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ は正規直交系である。

$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対し $\boldsymbol{p} = x'\boldsymbol{a} + y'\boldsymbol{b} + z'\boldsymbol{c}$ をみたす $x',\ y',\ z'$ を $x,\ y,\ z$ と $\theta,\ \varphi$ で表せ。

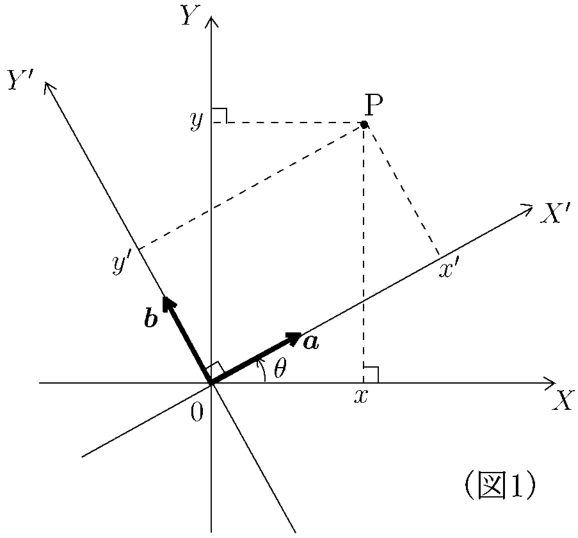
$x' =$

$y' =$

$z' =$

＜座標変換＞

直交行列による座標軸の変換を示す。



(図1)

[1] ＜平面の場合＞

直交行列 $A = (\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b})$ による座標軸の変換を示す。$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ は正規直交系であり，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ の方向の座標軸 X'，Y' を考える (図 1)。

平面上の任意の点 $\mathrm{P}(x, y)$ の位置ベクトル

$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して，図 1 の x'，y' は

$$\boldsymbol{p} = x'\boldsymbol{a} + y'\boldsymbol{b}$$

をみたす。$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x' \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + y' \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x' & + & b_1y' \\ a_2x' & + & b_2y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

となる。A は直交行列であるから $A^{-1} = {}^tA$ より

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

今 A が θ 回転のときは $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ より

$$(*) \begin{cases} x = (\cos\theta)x' - (\sin\theta)y' \\ y = (\sin\theta)x' + (\cos\theta)y' \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x' = (\cos\theta)x + (\sin\theta)y \\ y' = -(\sin\theta)x + (\cos\theta)y \end{cases}$$

この式 $(*)$ が平面の場合の座標軸の回転の公式である。

[2] ＜空間の場合＞

空間の直交行列 $A = (\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{c})$ による座標軸の変換を考える。

平面と同様に空間の任意のベクトル $\boldsymbol{p}$ に対し，$\boldsymbol{p} = x'\boldsymbol{a} + y'\boldsymbol{b} + z'\boldsymbol{c}$ とおく。

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \text{ とおくと}$$

$$\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{c})\boldsymbol{p'} = A\boldsymbol{p'} \Leftrightarrow \boldsymbol{p'} = {}^tA\boldsymbol{p}$$

より，成分で表すと

$$(**) \begin{cases} x = a_1x' + b_1y' + c_1z' \\ y = a_2x' + b_2y' + c_2z' \\ z = a_3x' + b_3y' + c_3z' \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x' = a_1x + a_2y + a_3z \\ y' = b_1x + b_2y + b_3z \\ z' = c_1x + c_2y + c_3z \end{cases}$$

となる。この式 $(**)$ が直交行列 A による座標軸の変換公式である。

< 固有値 1 >

2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と 2 次の縦ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対し

$$(*) \quad A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \qquad \left(\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

をみたす $\mathbf{0}$ 以外のベクトル $\boldsymbol{x}$ と定数 λ が存在するとき，λ を A の**固有値**，$\boldsymbol{x}$ を λ に対する**固有ベクトル** という。

例 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値を求めたい。$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3x+2y \\ x+4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(1)$$

であるから連立方程式

$$\begin{cases} 3x+2y &= \lambda x \\ x+4y &= \lambda y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (3-\lambda)x + 2y = 0 \\ x + (4-\lambda)y = 0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots(2)$$

が導かれる。P30 より，この同次方程式が $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 以外の解 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ をもつためには係数行列式が 0 でなければならない。従って (2) の係数行列式 $= 0$ より

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (3-\lambda)(4-\lambda) - 2 = 0 \qquad \cdots\cdots(3)$$

とおいて，λ について整理すると，

$$(3-\lambda)(4-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = (\lambda-2)(\lambda-5) = 0 \qquad \cdots\cdots(4)$$

より $\underline{\lambda = 2}$ と $\underline{\lambda = 5}$ が求まる。これが A の固有値である。

(注) 固有値は 2 個であるとは限らない。1 個の場合もあるし，共役な複素数の場合もある。

問 1 一般の 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有値 λ を求めたい。
例の (4) 式のような λ に関する 2 次方程式を導け。(因数分解はしなくてよい)

問 2 行列 A が以下の場合に，A の固有値を求めよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

< 固有値 2 >

一般の正方行列 A に対し

$$\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{x}$$

をみたす零ベクトルでない縦ベクトル $\boldsymbol{x}$ と定数 λ が存在するとき，
λ を (A の) **固有値**，$\boldsymbol{x}$ を (λ に対する) **固有ベクトル**という。
2 次の場合には，固有値 λ を求めるために，前ページの (3) 式をみたす λ を求めれば良い。一般の場合にも同様なことが成り立つ。

> 正方行列 A の固有値 λ は，$\det(A - \lambda E) = 0$ の解である。

ここで E は単位行列である。λ に関する方程式 $\det(A - \lambda E) = 0$ を
固有方程式という。

例 3 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を求めたい。

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

より

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) - 2(1-\lambda)$$

$$= (1-\lambda)\{(1-\lambda)(2-\lambda) - 2\} = -(\lambda-1)\lambda(\lambda-3)$$

であるから

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Longleftrightarrow -(\lambda-1)\lambda(\lambda-3) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 1, 0, 3$$

よって A の固有値は $\underline{\lambda = 0,\ \lambda = 1,\ \lambda = 3}$ である。

問 行列 A が以下の場合に A の固有値を求めよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 7 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

< 固有ベクトル >

行列 A の固有値 λ と固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ の関係は

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \quad \Longleftrightarrow \quad (A-\lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

である。

例 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ の場合, 52 ページの例より固有値は $\lambda = 2$ と $\lambda = 5$ であった。

この固有値に対応する固有ベクトルを求めたい。固有ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (3-\lambda)x + \quad 2y = 0 \\ \quad x + (4-\lambda)y = 0 \end{cases} \cdots (*)$$

をみたす。

[1] **$<$ $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{2}$ のとき $>$** 連立方程式 $(*)$ は

$$(*) \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

より 2 式が一致する。従って x と y は $x + 2y = 0$ であれば何でもよい。この 1 つの解として $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ をとれば, それが固有値 $\lambda = 2$ に対応する固有ベクトルである。実際 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ とすると

$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{x}$$

となる。

[2] **$<$ $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{5}$ のとき $>$** 連立方程式 $(*)$ は

$$(*) \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ \quad x - \ \ y = 0 \end{cases}$$

より $x - y = 0$ であれば何でもよい。この 1 つの解として $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとれば

それが固有値 $\lambda = 5$ に対応する固有ベクトルである。実際 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると

$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5\boldsymbol{x}$$

となる。以上をまとめると

固有値 $\lambda = 2$ に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

固有値 $\lambda = 5$ に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

問 行列が A の場合に, 各固有値に対応する固有ベクトルを求めよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ (3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

< 行列の対角化 1 >

2 次の縦ベクトル $\boldsymbol{x_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ を並べた行列 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ を

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} \end{pmatrix}$$

と略記する。

補題 1 任意の定数 λ_1, λ_2 と 2 次の縦ベクトル $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}$ に対し

$$\boxed{\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \boldsymbol{x_1} & \lambda_2 \boldsymbol{x_2} \end{pmatrix}}$$

が成り立つ。

証明 $\boldsymbol{x_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とすると

$$\text{左辺} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \qquad & \qquad \\ \qquad & \qquad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \boldsymbol{x_1} & \lambda_2 \boldsymbol{x_2} \end{pmatrix} = \text{右辺} \quad \text{(証明終)}$$

問 1 行列 (　　　) の成分を書くことによって上の証明を完成せよ。

補題 2 2 次の正方行列 A と 2 次の縦ベクトル $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}$ に対し

$$\boxed{A \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\boldsymbol{x_1} & A\boldsymbol{x_2} \end{pmatrix}}$$

が成り立つ。

証明 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \boldsymbol{x_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とすると

$$\text{左辺} = A \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \qquad\qquad & \qquad\qquad \\ \qquad\qquad & \qquad\qquad \end{pmatrix}$$

$$\text{右辺} = \begin{pmatrix} A\boldsymbol{x_1} & A\boldsymbol{x_2} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \qquad\qquad & \qquad\qquad \\ \qquad\qquad & \qquad\qquad \end{pmatrix}$$

左辺 = 右辺より補題 2 が成り立つ。

問 2 行列 (　　) の成分を書くことにより補題 2 の証明を完成せよ。

< 行列の対角化 2 >

定理 2 次正方行列 A の固有値を $\lambda_1,\ \lambda_2$ として, λ_1 と λ_2 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2$ とする。すなわち

$$A\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1\boldsymbol{x}_1 \quad , \qquad\qquad A\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2\boldsymbol{x}_2$$

とする。このとき

$$\boxed{A(\boldsymbol{x}_1 \ \ \boldsymbol{x}_2) \ = \ (\boldsymbol{x}_1 \ \ \boldsymbol{x}_2)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}}$$

が成り立つ。

問 1 前ページの補題 1, 2 を用いて定理を証明せよ。

問 2 54 ページの例より

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$ の固有値は $\lambda_1 = 2,\ \ \lambda_2 = 5$ であり

対応する固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。

ここで

$$P = (\boldsymbol{x}_1 \ \ \boldsymbol{x}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく。

(1) 次の行列の積を求めよ。

$AP =$

$P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} =$

(2) P の逆行列 P^{-1} を求めよ。 $P^{-1} =$

(3) 次の行列の積を計算せよ。

$P^{-1}AP =$

< 行列の対角化 3 >

正方行列 A に対し，ある正則行列 P を見つけて $P^{-1}AP$ が対角行列になるようにすることを「行列 A を**対角化**する」という。2 次の正方行列 A に対し，前のページより次の方法で対角化する。

[Step 1]　A の固有値 λ_1 と λ_2 を求める。 $\Leftrightarrow$ $\det(A-\lambda E)=0$ の解 λ_1，λ_2 を求める。

[Step 2]　λ_1 と λ_2 に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x_1}$ と $\boldsymbol{x_2}$ を求める。
$\Leftrightarrow$ $(A-\lambda_1 E)\boldsymbol{x_1}=\boldsymbol{0}$, $(A-\lambda_2 E)\boldsymbol{x_2}=\boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{x_1}$，$\boldsymbol{x_2}$ を求める。

[Step 3]　$P=(\boldsymbol{x_1}\ \ \boldsymbol{x_2})$ とすると，前ページの定理より

$$AP = P\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix} \quad \cdots \quad (*)$$

[Step 4]　P の逆行列 P^{-1} を求め，$(*)$ 式の両辺に左側から P^{-1} をかけると

$$\boxed{P^{-1}AP = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}} \qquad (\text{行列 } A \text{ の対角化})$$

対角化できる。

注)　この対角化は一意的ではない。たとえば $P=(\boldsymbol{x_2}\ \ \boldsymbol{x_1})$ とおくと

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}\lambda_2 & 0\\ 0 & \lambda_1\end{pmatrix}$$

となる。

問　次の行列を対角化したい。固有ベクトルを並べた行列 P を作り，P^{-1} を求め，$P^{-1}AP$ が対角行列になるようにせよ。

(1) $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$　　(2) $A=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix}$　　(3) $A=\begin{pmatrix}\frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2}\end{pmatrix}$

$P=$　　$P=$　　$P=$

$P^{-1}=$　　$P^{-1}=$　　$P^{-1}=$

$P^{-1}AP$　　$P^{-1}AP$　　$P^{-1}AP$

$=$　　$=$　　$=$

< 対称行列の固有ベクトル >

正方行列 A がその転置行列 ${}^tA$ と等しいとき，A を**対称行列**という。A が 2 次の正方行列の場合，2 次の対称行列は

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \qquad \text{(2 次の対称行列)}$$

の形をしている。

定理 1 2 次の対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ に対して

$$(A\boldsymbol{x}_1) \cdot \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1 \cdot (A\boldsymbol{x}_2)$$

が成り立つ。

(証明) $(A\boldsymbol{x}_1) \cdot \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 \\ bx_1 + cy_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$= (ax_1 + by_1)x_2 + (bx_1 + cy_1)y_2$$

$$= ax_1x_2 + b(y_1x_2 + x_1y_2) + cy_1y_2$$

$$\boldsymbol{x}_1 \cdot (A\boldsymbol{x}_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ax_2 + by_2 \\ bx_2 + cy_2 \end{pmatrix}$$

$$= x_1(ax_2 + by_2) + y_1(bx_2 + cy_2)$$

$$= ax_1x_2 + b(x_1y_2 + y_1x_2) + cy_1y_2$$

(証明終)

定理 2 2 次の対称行列 A の固有値 λ_1，λ_2 が異なっていれば，λ_1 と λ_2 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ は直交する。

(証明) $A\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1\boldsymbol{x}_1$，$A\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2\boldsymbol{x}_2$ と定理 1 より

$$(A\boldsymbol{x}_1) \cdot \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1 \cdot (A\boldsymbol{x}_2)$$

$$(\lambda_1\boldsymbol{x}_1) \cdot \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1 \cdot (\lambda_2\boldsymbol{x}_2)$$

よって $\lambda_1(\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_2) = \lambda_2(\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_2)$ ここで $\lambda_1 \neq \lambda_2$ より $\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_2 = 0$ でなければならない。内積が 0 だから $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ は直交している。(証明終)

問 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ の固有値 λ_1 と λ_2 を求め，λ_1 と λ_2 に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ を求めよ。さらに $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ が直交していることを確かめよ。

< 対称行列の対角化 >

前ページの定理から次の結果が得られる。

2 次対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の固有値 λ_1，λ_2 が異なっているとする。λ_1 と λ_2 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ が共に単位ベクトル $(|\boldsymbol{x}_1| = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2} = 1$，$|\boldsymbol{x}_2| = \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2} = 1)$ であるとき，行列

$$P = (\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

は直交行列であり

$$P^{-1}AP = {}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

となる。

(証明)　$\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ は直交しているので $\{\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2\}$ は正規直交系である。従って $P^{-1} = {}^tP$ となる。対角化は 55 ページの定理から明らか。　(証明終)

問　(1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対する固有値 λ_1，λ_2 を求めよ。

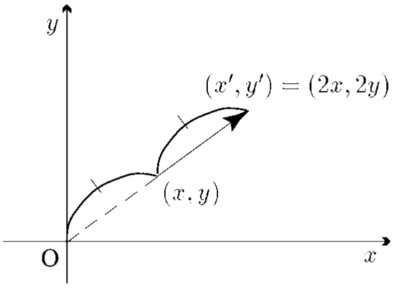
(2) (1) の固有値 λ_1，λ_2 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ で，共に単位ベクトル $(|\boldsymbol{x}_1| = |\boldsymbol{x}_2| = 1\ )$ となる $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ を求めよ。

(3) (2) で求めた $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ に対し，内積 $\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_2 = x_1x_2 + y_1y_2$ を求めよ。

(4) $P = (\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ に対し P^{-1} を求めよ。

(5) $P^{-1}AP$ を求めよ。

＜１次変換と固有値１＞



例１　1次変換 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

より, 原点からの距離を2倍に移動する変換である。このとき A の固有値は2であり, 固有ベクトルは任意のベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ である。

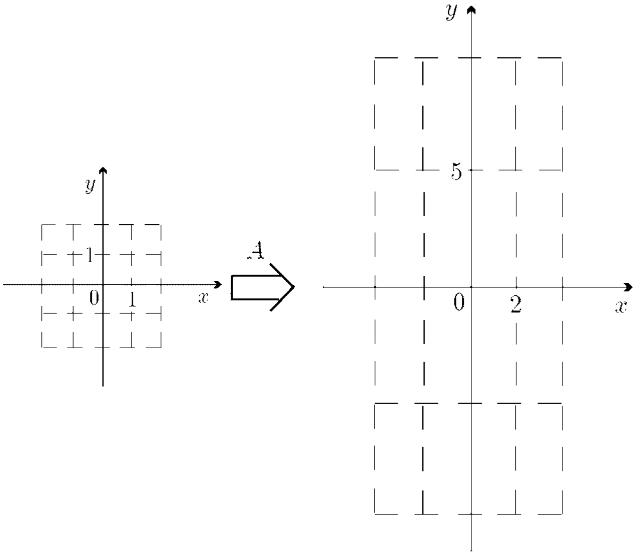
例２　1次変換 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ は

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\ A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より, 固有値は2と5で, 固有値2に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 固有値5に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。

右図よりこの変換 A は

$$\left\{\begin{array}{l} \text{ベクトル}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\text{方向}\ (x\ \text{軸方向}) \\ \text{に2倍ひきのばし,} \\ \text{ベクトル}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\text{方向}\ (y\ \text{軸方向}) \\ \text{に5倍ひきのばす変換である。} \end{array}\right\}$$



問　1次変換 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ はどういう変換か？

例2の {} 内のような答え方をせよ。

＜１次変換と固有値２＞

例　1 次変換 $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ の固有値は $\lambda=2$ と $\lambda=5$ であり,

対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ であった (P.54)。

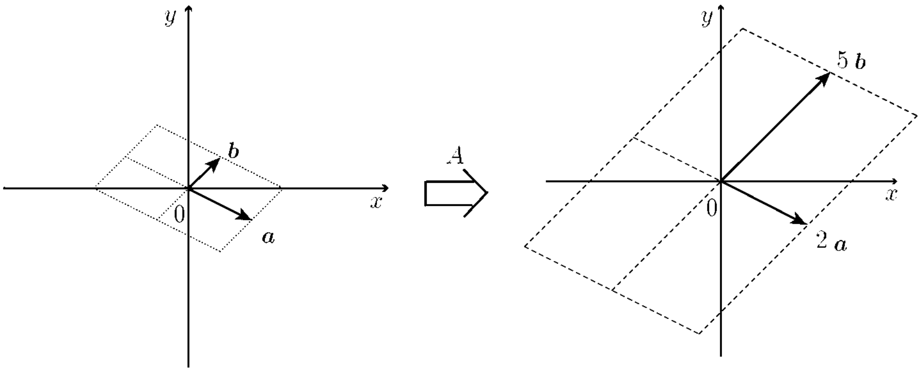
すなわち

$$A\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\ ,\quad A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

である。1 次変換 A によってベクトル $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ は方向が変わらず, 大きさは 2 倍になる。

又ベクトル $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ は方向が変わらず, 大きさが 5 倍になる。

$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ とすれば



上左図が 1 次変換 A によって, 上右図に移る。

$$\left\{\begin{array}{l}\text{この 1 次変換は }\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\text{ の方向に 2 倍,}\\[2ex] \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\text{ の方向に 5 倍ひきのばす変換である。}\end{array}\right\}$$

(注)　この変換は前ページ例 2 の変換のひきのばす方向を変えたものである。A を対角化すれば,$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$ となるからである (P.56)

問　次の行列 A で表される 1 次変換はどのような変換か？ 例の {} 内のような答え方をせよ。

(1) $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 5\end{pmatrix}$　　(2) $A=\begin{pmatrix}\frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2}\end{pmatrix}$

< 対称行列と１次変換 >

対称行列は直交行列と対角行列の積として表される。従って対称行列による一次変換は「回転」（または「折り返し」）と「ひきのばし」（または「縮小」）の合成として表すことができる。

例 $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ の固有値は $\lambda = 2$ または $\lambda = 3$ である。(P.57)

$\lambda = 2$ のとき固有ベクトルは $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。それを正規化して $\boldsymbol{p_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ とおく。

$\lambda = 3$ のとき固有ベクトルは $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。それを正規化して $\boldsymbol{p_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ とおく。

$\{\boldsymbol{p_1},\ \boldsymbol{p_2}\}$ は正規直交系であるから $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p_1} & \boldsymbol{p_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ は直交行列であり,

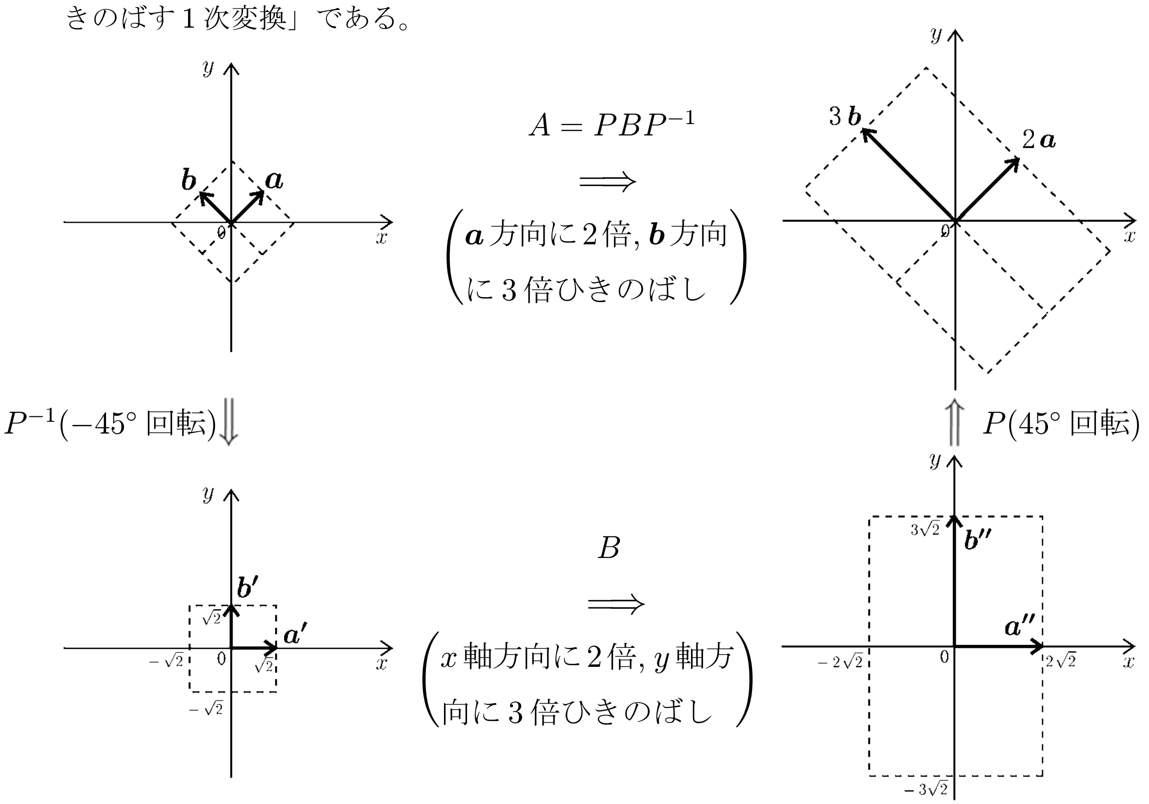
$$P^{-1}AP = {}^tPAP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

となる。対角行列を $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ とおくと $A = PBP^{-1} = PB\,{}^tP$ と表される。

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}$$

より P は「45° 回転」の１次変換であり, $P^{-1} = {}^tP$ は「−45° 回転」の１次変換である。

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は固有ベクトルであるから $A\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{a},\ A\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{b}$ より, A は「$\boldsymbol{a}$ 方向に２倍, $\boldsymbol{b}$ 方向に３倍ひきのばす１次変換」である。



$\left(\boldsymbol{a'} = P^{-1}\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b'} = P^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}\right)$ $(\boldsymbol{a''}=B\boldsymbol{a'},\ \boldsymbol{b''}=B\boldsymbol{b'})$

< 回転行列と固有値 >

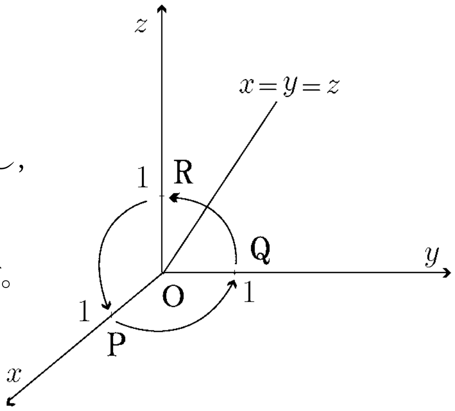
3 次の直交行列 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ の行列式が $\det(A)=1$ であるとき，A は回転行列と呼ばれる。

回転行列 A の固有値は $\lambda=1$，$e^{i\theta}(=\cos\theta+i\sin\theta)$，$e^{-i\theta}(=\cos\theta-i\sin\theta)$

の形をしている。このとき $\lambda=1$ に対する固有ベクトルを$\boldsymbol{\omega}$で表すと，1 次変換 A はベクトル$\boldsymbol{\omega}$を中心軸とし，角度 θ の回転を表す。(証明略)

例 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ は点 P(1，0，0) を Q(0，1，0) へ移し，

点 Q(0，1，0) を R(0，0，1) へ移し，点 R を点 P へ移す。



A の固有値は

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3+1=0$$

とおくと $\lambda=1$，$\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=e^{\frac{\pi}{3}i}$，$\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=e^{-\frac{\pi}{3}i}$ である。

$\lambda=1$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{\omega}=\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$ とおくと

$$(A-E)\boldsymbol{\omega}=\mathbf{0} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} -\omega_1+\omega_3=0 \\ \omega_1-\omega_2=0 \\ \omega_2-\omega_3=0 \end{cases}$$

より$\boldsymbol{\omega}$は $\omega_1=\omega_2=\omega_3$ をみたすベクトルである。

この 1 次変換 A は直線 $x=y=z$ を中心軸とし，角度 $\frac{\pi}{3}(=120^\circ)$ だけ回転させる。

問 行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ はどのような 1 次変換か。