高知工科大学
Kochi University of Technology

数学 1

(2006年度版)

解答

＜１ページ. 関数の定義域と値域１＞

問１の解答

(1) 定義域 : $x \geqq -2$
値域　 : $y \geqq 0$

(2) 定義域 : $x \leqq 1$
値域　 : $y \leqq 0$

問２の解答

(1) 定義域 : $x \neq -1$
値域　 : $y \neq -2$

(2) 定義域 : $x \neq 1$
値域　 : $y \neq -1$

$<$ 2 ページ. 関数の定義域と値域 2 $>$

問の解答

(1) 定義域 : 実数全体
値域 : $y > 0$

(2) 定義域 : $x > 0$
値域 : 実数全体

(3) 定義域 : 実数全体
値域 : $-1 \leqq y \leqq 1$

< 3 ページ. 単調関数 >

問の解答

(1) 単調増加

(2) 単調関数ではない

(3) 単調減少

(4) 単調関数ではない

(5) 単調関数ではない

(6) 単調増加

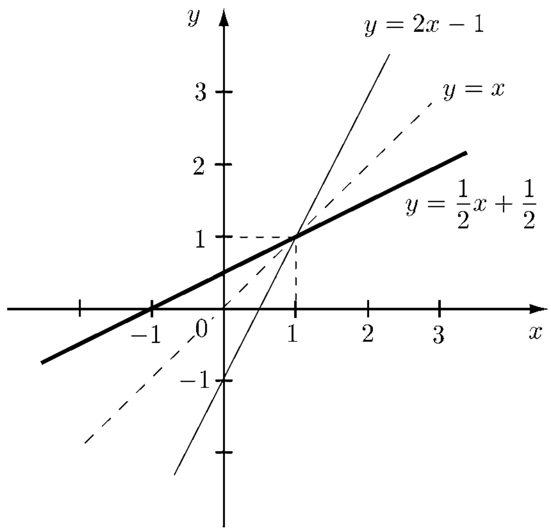
＜ 4 ページ. 逆関数 1 ＞

問の解答

$f(x) = 2x - 1$

$$\left(\begin{array}{l} y = 2x - 1 \\ \quad \Downarrow \\ x = \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{2} \\ \quad \Downarrow \qquad (x \leftrightarrow y) \\ y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} \end{array}\right)$$

$f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

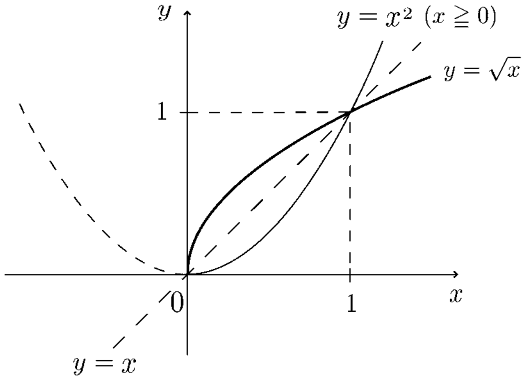


＜ 5 ページ. 逆関数 2 ＞

問 1 の解答

$f(x) = x^2 \quad (x \geqq 0)$

$\underline{f^{-1}(x) = \sqrt{x}}$



問 2 の解答

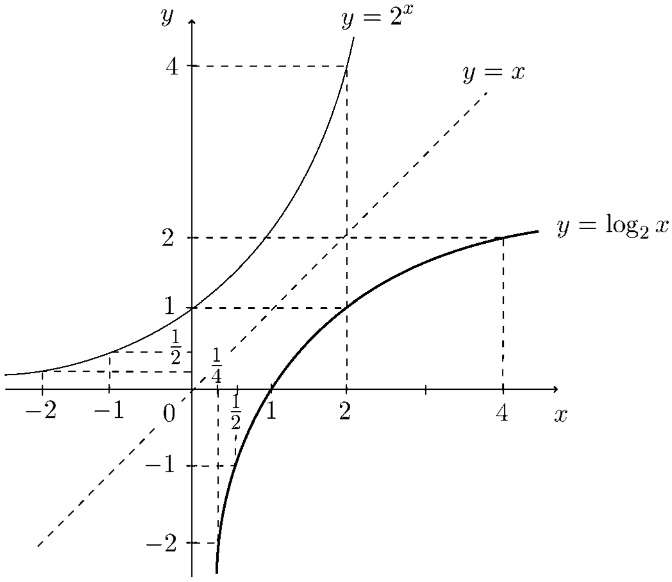
$f(x) = 2^x$

$\underline{f^{-1}(x) = \log_2 x}$

問 3 の解答

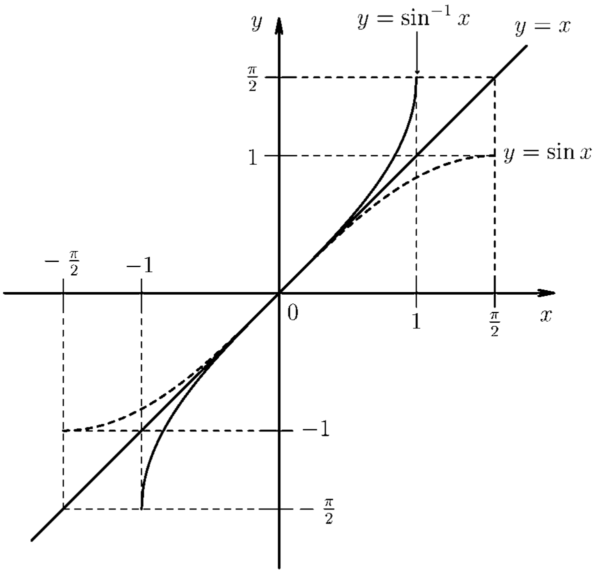
$f(x) = \log_3 x$

$\underline{f^{-1}(x) = 3^x}$



＜ 6 ページ. 逆三角関数 1 ＞

問 1 の解答



問 2 の解答

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

問 3 の解答

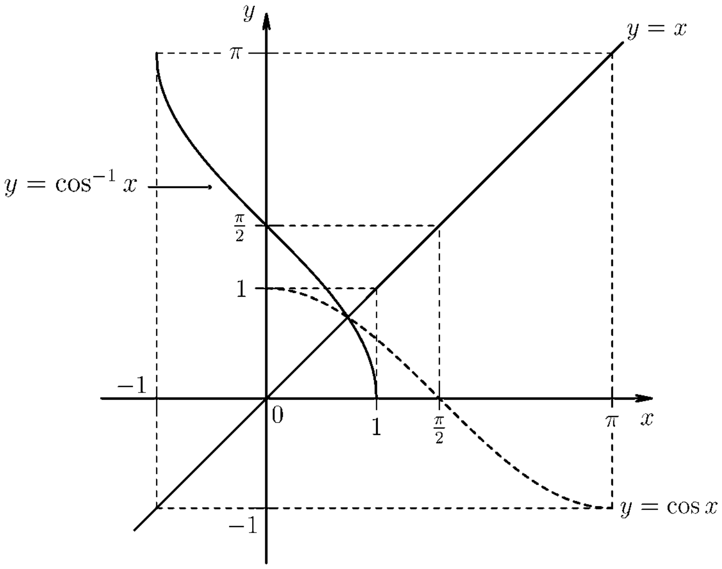
(1) $\dfrac{\pi}{4}$

(2) $-\dfrac{\pi}{3}$

(3) $-\dfrac{\pi}{6}$

＜ 7ページ. 逆三角関数 2 ＞

問 1 の解答



問 2 の解答

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

問 3 の解答

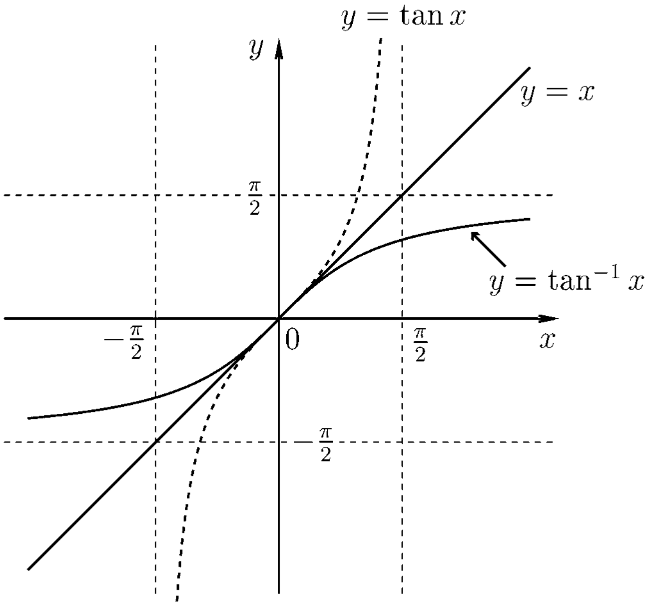
(1) $\dfrac{\pi}{6}$

(2) $\dfrac{3\pi}{4}$

(3) $\dfrac{2\pi}{3}$

＜ 8 ページ. 逆三角関数 3 ＞

問 1 の解答



問 2 の解答

θ	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan\theta$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

問 3 の解答

(1) $\dfrac{\pi}{4}$

(2) $\dfrac{\pi}{6}$

(3) $-\dfrac{\pi}{3}$

＜ 9 ページ. 合成関数 ＞

問 1 の解答

(1) $g(f(x)) = 3x^2 + 3$, $f(g(x)) = 9x^2 + 1$

(2) $g(f(x)) = (\tan x) + 2$, $f(g(x)) = \tan(x + 2)$

(3) $g(f(x)) = x - 1$, $f(g(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$

(4) $g(f(x)) = \log_2(x^2 + 2)$, $f(g(x)) = (\log_2 x)^2 + 2$

問 2 の解答

(1) $f^{-1}(f(a)) = a$

(2) $f(f^{-1}(b)) = b$

問 3 の解答

(1) $g(f(x)) = \sqrt[4]{x^4} = x$, $f(g(x)) = (\sqrt[4]{x})^4 = x$

(2) $g(f(x)) = \log_2(2^x) = x$, $f(g(x)) = 2^{\log_2 x} = x$

(3) $g(f(x)) = \sin^{-1}(\sin x) = x$, $f(g(x)) = \sin(\sin^{-1} x) = x$

問 4 の解答

(1) x

(2) x

(3) x

(4) x

(5) $\dfrac{\pi}{4}$

(6) 1

< 10 ページ. 関数の練習 >

問 1 の解答

(1) 定義域 : $x \geqq 0$
値域 : $y \geqq 0$

(2) 定義域 : 実数全体
値域 : $y > 0$

(3) 定義域 : 実数全体
値域 : $y > 0$

(4) 定義域 : 実数全体
値域 : $-1 \leqq y \leqq 1$

(5) 定義域 : $x > 0$
値域 : 実数全体

(6) 定義域 : $x > 0$
値域 : 実数全体

問 2 の解答

(1) $f^{-1}(x) = \sqrt[4]{x}$

(2) $f^{-1}(x) = \log_4 x$

(3) $f^{-1}(x) = 2^x$

(4) $f^{-1}(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

問 3 の解答

(1) $\dfrac{\pi}{3}$

(2) $\dfrac{3\pi}{4}$

(3) $\dfrac{\pi}{4}$

(4) $\dfrac{1}{\sin(\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}$

(5) $\dfrac{1}{\cos(\frac{\pi}{3})} = 2$

(6) $\dfrac{1}{\sin(\frac{\pi}{6})} = \sqrt{3}$

問 4 の解答

(1) $f(g(x)) = \sin(x^4)$, $g(f(x)) = \sin^4 x$

(2) $f(g(x)) = \cos(x^5)$, $g(f(x)) = \cos^5 x$

(3) $f(g(x)) = (3x+4)^5$, $g(f(x)) = 3x^5 + 4$

(4) $f(g(x)) = (x^2+3x)^6$, $g(f(x)) = x^{12} + 3x^6$

< 11 ページ. 無限等比級数 >

問の解答

(1) $\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

(2) $\dfrac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}}=\dfrac{1}{9}$

(3) $\dfrac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\dfrac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}}=\dfrac{1}{3}$

< 12ページ. 循環小数 1 >

問の解答

(1) 0.6875

(2) $0.41666\cdots = 0.41\dot{6}$

(3) $0.121212\cdots = 0.\dot{1}\dot{2}$

(4) $0.405405405\cdots = 0.\dot{4}0\dot{5}$

< 13 ページ. 循環小数 2 >

問の解答

(1) $\dfrac{\frac{5}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\dfrac{5}{9}$

(2) $\dfrac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}}=1$

(3) $\dfrac{\frac{12}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\dfrac{4}{33}$

(4) $\dfrac{\frac{43}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\dfrac{43}{99}$

(5) $\dfrac{\frac{123}{1000}}{1-\frac{1}{1000}}=\dfrac{41}{333}$

< 14 ページ. 小数の表示 >

問 1 の解答

(1) 0.001

(2) 0.0001

問 2 の解答

(1) 10

(2) 0.2

問 3 の解答

(1) $10 = 9.\dot{9} = 10.\dot{0}$

(2) $5.3 = 5.2\dot{9} = 5.3\dot{0}$

< 15 ページ. 関数の極限 1 >

問の解答

(1) 2

(2) $\dfrac{1}{2}$

(3) 0

(4) -1

(5) 1

(6) 0

(7) -2

(8) -5

< 16 ページ. 関数の極限 2 >

問の解答

$f(2) = 3 \qquad , \quad f(4) = 1$

$\lim_{x \to 2} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 4} f(x) = 3$

＜ 17 ページ. 関数の極限 3 ＞

問の解答

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 1+0} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = 3 \quad , \quad \lim_{x\to 2+0} f(x) = 3$$

$$\lim_{x\to 4-0} f(x) = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 4+0} f(x) = -1$$

＜ 18 ページ. 関数の極限 4 ＞

問の解答

$\lim_{x \to -0} f(x) = 2$, $\lim_{x \to +0} f(x) = 2$, $\lim_{x \to 0} f(x) = 2$

$\lim_{x \to 1-0} f(x) = 3$, $\lim_{x \to 1+0} f(x) = 1$, $\lim_{x \to 1} f(x)$ は存在しない

$\lim_{x \to 4-0} f(x) = 2$, $\lim_{x \to 4+0} f(x) = 3$, $\lim_{x \to 4} f(x)$ は存在しない

$\lim_{x \to 5-0} f(x) = 4$, $\lim_{x \to 5+0} f(x) = 4$, $\lim_{x \to 5} f(x) = 4$

< 19 ページ. 微分可能性 >

問の解答

「左極限値が -1 であること」は「$x = 0$ の左側のグラフの傾きが -1 であること」を意味する。
「右極限値が $+1$ であること」は「$x = 0$ の右側のグラフの傾きが $+1$ であること」を意味する。

< 20 ページ. 弧度法の復習 >

問 1 の解答

度数法	$180°/\pi$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$180°$	$360°$	
弧度法 θ	1	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	2π	θ
弧の長さ ℓ	r	$\frac{1}{4}\pi r$	$\frac{\pi}{3}r$	$\frac{\pi}{2}r$	$\frac{2\pi}{3}r$	πr	$2\pi r$	θr
面積 S	$\frac{1}{2}r^2$	$\frac{\pi}{8}r^2$	$\frac{\pi}{6}r^2$	$\frac{1}{4}\pi r^2$	$\frac{\pi}{3}r^2$	$\frac{1}{2}\pi r^2$	πr^2	$\frac{\theta}{2}r^2$

問 2 の解答

$$\ell = \theta$$

$$S = \frac{\theta}{2}$$

< 21 ページ. 三角関数の極限 1 >

問の解答

$\sin\theta < \theta$ の両辺を θ で割ると $\dfrac{\sin\theta}{\theta} < 1 \quad \cdots$ ①

$\theta < \tan\theta$ の両辺に $\dfrac{\cos\theta}{\theta}$ をかけると $\cos\theta < \dfrac{\sin\theta}{\theta} \quad \cdots$ ②

①と②より $(**)$ が導かれる。

< 22 ページ. 三角関数の極限 2 >

問の解答

(1) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x}\times\frac{3}{2} = 1\times\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

(2) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{\cos x} = 1\times\frac{1}{\cos 0} = 1$

(3) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x(\cos x + 1)}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{-\sin x}{\cos x + 1} = 1\times\frac{-\sin 0}{\cos 0 + 1} = 1\times\frac{-0}{1+1} = 0$$

＜ 23 ページ. 三角関数の極限 3 ＞

問の解答

(1) $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \left\{ (\sin x) \times \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + (\cos x) \times \left(\frac{\sin h}{h} \right) \right\}$$

$$= (\sin x) \times 0 + (\cos x) \times 1 = \cos x$$

(2)　略

＜ 24 ページ. 導関数 1 ＞

問の解答

(1) $f(x) = 2$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2-2}{h} = 0$$

(2) $f(x) = x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = 1$$

(3) $f(x) = x^2$

$$\begin{aligned} f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x \end{aligned}$$

< 25 ページ. 導関数 2 >

問 1 の解答

(1) $f(x) = x^4$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^4 - x^4}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3) = 4x^3$$

(2) $f(x) = x^5$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^5 - x^5}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(5x^4 + 10x^3h + 10x^2h^2 + 5xh^3 + h^4) = 5x^4$$

問 2 の解答

$$f(x) = x^n$$

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

< 26 ページ. 導関数 3 >

問の解答

(1) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h+1} - \sqrt{x+1}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h+1)-(x+1)}{h(\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1})}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

(2) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2}$

＜ 27 ページ. 導関数 4 ＞

問 1 の解答

略

問 2 の解答

(1) $(x^5+4)' = 5x^4$

(2) $(2x^6 - 3x^3)' = 12x^5 - 9x^2$

(3) $$\big((x-1)^2\big)' = (x^2-2x+1)' = 2x-2$$

(4) $$\big((x+1)(x^2-x)\big)' = (x^3-x)' = 3x^2-1$$

< 28 ページ. 積の微分 1 >

問 1 の解答

略

問 2 の解答

(1) $3x^2 - 2x + 1$

(2) $4x^3 - 12x^2 + 2x - 4$

(3) $3(x+1)^2$

(4) $4(x+1)^3$

＜ 29 ページ. 積の微分 2 ＞

問 1 の解答

(1) $(x\sqrt{x})' = x' \times \sqrt{x} + x \times (\sqrt{x})' = 1 \times \sqrt{x} + x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$= \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

(2) $(k\sqrt{x})' = k' \times \sqrt{x} + k \times (\sqrt{x})' = 0 \times \sqrt{x} + k \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$= \frac{k}{2\sqrt{x}}$$

問 2 の解答

略

問 3 の解答

$$\begin{aligned}(f(x)g(x)h(x))' &= \{f(x)g(x)\}' \times h(x) + f(x)g(x) \times (h(x))' \\ &= \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\} \times h(x) + f(x)g(x)h'(x) \\ &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)\end{aligned}$$

< 30 ページ. 商の微分 >

問 1 の解答

略

問 2 の解答

略

問 3 の解答

(1) $-\dfrac{2}{x^3}$

(2) $-\dfrac{1}{x^3}$

(3) $-\dfrac{x+2}{x^3}$

(4) $\dfrac{2x^3+3x^2}{(x+1)^2}$

< 31ページ. 三角関数の微分 >

問 1 の解答

証明略

問 2 の解答

(1) $3\cos x - 4\sin x$

(2) $3\sin x + \dfrac{5}{\cos^2 x}$

(3) $\cos^2 x - \sin^2 x$

(4) $2\cos x \sin x$

(5) $-2\cos x \sin x$

(6) $\tan x + \dfrac{x}{\cos^2 x}$

(7) $\dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$

(8) $\dfrac{-x\sin x - \cos x}{x^2}$

問 3 の解答

(1) $-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$

(2) $\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

(3) $-\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\mathrm{cosec}^2 x$

< 32 ページ. 微分の練習 1 >

問 1 の解答

(1) 1

(2) 0

問 2 の解答

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

問 3 の解答

(1) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1-1}{h} = 0$

(2) p24 例 2

(3) p26 例

問 4 の解答

証明略

問 5 の解答

(1) $12x^2 + 30x^4$

(2) $3x^2 - 2x + 1$

(3) $5\cos x - 6\sin x$

(4) $3\cos x - \frac{4}{\cos^2 x}$

(5) $2x\sin x + x^2\cos x$

(6) $3x^2\cos x - x^3\sin x$

(7) $2\sin x\cos x$

(8) $-\frac{1}{(x+1)^2}$

(9) $\frac{1}{(x+1)^2}$

(10) $\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$

＜ 33 ページ. 微分記号 ＞

問 1 の解答

(1) $3x^2 - 8x$

(2) $-\sin u$

(3) $6t - 2$

(4) $2\pi r$

(5) $4\pi r^2$

問 2 の解答

(1) $5x^4$

(2) $7t^6 - 20t^3$

(3) $\dfrac{1}{2\sqrt{u}}$

(4) $-\sin t$

(5) $\dfrac{1}{\cos^2 u}$

(6) $\cos^2 u - \sin^2 u$

＜ 34 ページ. 微分と極限 1 ＞

問の解答

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^5-x^5}{h}=\frac{d}{dx}(x^5)=5x^4$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin(t+h)-\sin t}{h}=\frac{d}{dt}(\sin t)=\cos t$

(3) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos(u+h)-\cos u}{h}=\frac{d}{du}(\cos u)=-\sin u$

(4) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\tan(r+h)-\tan r}{h}=\frac{d}{dr}(\tan r)=\frac{1}{\cos^2 r}$

$<$ 35 ページ. 微分と極限 2 $>$

問の解答

(1) $\displaystyle \lim_{\ell \to 0} \frac{\cos(x+\ell) - \cos x}{\ell} = \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

(2) $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{\sin(u+h) - \sin u}{h} = \frac{d}{du}(\sin u) = \cos u$

(3) $\displaystyle \lim_{r \to 0} \frac{(u+r)^4 - u^4}{r} = \frac{d}{du}(u^4) = 4u^3$

(4) $\displaystyle \lim_{v \to 0} \frac{(t+v)^6 - t^6}{v} = \frac{d}{dt}(t^6) = 6t^5$

(5) $\displaystyle \lim_{\ell \to 0} \frac{\tan(t+\ell) - \tan t}{\ell} = \frac{d}{dt}(\tan t) = \frac{1}{\cos^2 t}$

< 36 ページ. 合成関数の微分 1 >

問の解答

(1) $\dfrac{d}{dx}\cos(x^4) = -4x^3\sin(x^4)$

(2) $\dfrac{d}{dx}\tan(x^5) = \dfrac{5x^4}{\cos^2(x^5)}$

＜ 37 ページ. 合成関数の微分 2 ＞

問の解答

(1) $\dfrac{d}{dx}\{\sin(5x)\} = \left\{\dfrac{d}{du}\sin u\right\} \times \left\{\dfrac{d}{dx}(5x)\right\} = \cos(u) \times 5 = 5\cos(5x)$

$(u = 5x)$

(2) $\dfrac{d}{dx}\{\cos(7x)\} = \left\{\dfrac{d}{du}\cos u\right\} \times \left\{\dfrac{d}{dx}(7x)\right\} = -\sin(u) \times 7 = -7\sin(7x)$

$(u = 7x)$

(3) $\dfrac{d}{dx}\{\sin(4x-5)\} = \left\{\dfrac{d}{du}\sin u\right\} \times \left\{\dfrac{d}{dx}(4x-5)\right\} = \cos(u) \times 4 = 4\cos(4x-5)$

$(u = 4x-5)$

(4) $\dfrac{d}{dx}\{\cos(2x+3)\} = \left\{\dfrac{d}{du}\cos u\right\} \times \left\{\dfrac{d}{dx}(2x+3)\right\} = -\sin(u) \times 2 = -2\sin(2x+3)$

$(u = 2x+3)$

(5) $\dfrac{d}{dx}\{\tan(8x-7)\} = \left\{\dfrac{d}{du}\tan u\right\} \times \left\{\dfrac{d}{dx}(8x-7)\right\} = \dfrac{1}{\cos^2 u} \times 8 = \dfrac{8}{\cos^2(8x-7)}$

$(u = 8x-7)$

(6) $\dfrac{d}{dx}\left\{\sin(x^3+2x^4)\right\} = \left\{\dfrac{d}{du}\sin u\right\} \times \left\{\dfrac{d}{dx}(x^3+2x^4)\right\}$

$(u = x^3+2x^4) \quad = \cos(u) \times (3x^2+8x^3)$

$= (3x^2+8x^3)\cos(x^3+2x^4)$

＜ 38ページ. 合成関数の微分 3 ＞

問の解答

(1) $u = 3x + 4$ とおくと $y = u^5$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \left\{ \frac{d}{du}(u^5) \right\} \times \left\{ \frac{d}{dx}(3x+4) \right\} = 5u^4 \times 3$$

$$= 15(3x+4)^4$$

(2) $u = 4x - 5$ とおくと $y = u^{10}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \left\{ \frac{d}{du}(u^{10}) \right\} \times \left\{ \frac{d}{dx}(4x-5) \right\} = 10u^9 \times 4$$

$$= 40u^9 = 40(4x-5)^9$$

(3) $u = x^2 + 3x$ とおくと $y = u^6$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \left\{ \frac{d}{du}(u^6) \right\} \times \left\{ \frac{d}{dx}(x^2+3x) \right\} = 6u^5 \times (2x+3)$$

$$= 6(2x+3)(x^2+3x)^5$$

(4) $u = x^2 - 3x$ とおくと $y = \cos(u)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \left\{ \frac{d}{du}\cos u \right\} \times \left\{ \frac{d}{dx}(x^2-3x) \right\}$$

$$= -\sin(u) \times (2x-3)$$

$$= -(2x-3)\sin(x^2-3x)$$

＜ 39 ページ. 微分の練習 2 ＞

問 1 の解答

(1) $20x^4 - 63x^8$

(2) $8t - 8$

(3) $\cos u$

(4) $-\sin u$

(5) $\dfrac{1}{\cos^2 u}$

(6) nu^{n-1}

問 2 の解答

(1) $2x\cos(x^2)$

(2) $-3x^2\sin(x^3)$

(3) $\dfrac{4x^3}{\cos^2(x^4)}$

(4) $4\cos(4x)$

(5) $-5\sin(5x)$

(6) $\dfrac{6}{\cos^2(6x)}$

(7) $2\cos(2x-3)$

(8) $-3\sin(3x+5)$

(9) $\dfrac{7}{\cos^2(7x+6)}$

(10) $(2x+2)\cos(x^2+2x)$

(11) $18(3x+4)^5$

(12) $28(4x-3)^6$

(13) $50(5x+8)^9$

(14) $5(2x-3)(x^2-3x)^4$

(15) $8\cos x(1+\sin x)^7$

(16) $-9\sin x(2+\cos x)^8$

問 3 の解答

(1) $2x\sin(4x) + 4x^2\cos(4x)$

(2) $3x^2\cos(5x) - 5x^3\sin(5x)$

(3) $2\cos(2x)\cos(3x) - 3\sin(2x)\sin(3x)$

＜ 40 ページ. ネピアの数 ＞

問の解答

(1) $\lim_{h \to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$

(2) $\lim_{x \to +0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

(3) $\lim_{n \to \infty}(1+\dfrac{1}{n})^n = e$

(4) $\lim_{\ell \to 0}\dfrac{1}{\ell}\log_a(1+\ell) = \log_a e$

< 41 ページ. 対数関数の導関数 >

問 1 の解答

(1) $$f'(3) = \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log_{10}(3+h)-\log_{10}3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_{10}\left(\frac{3+h}{3}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_{10}\left(1+\frac{h}{3}\right) \qquad \left(\ell = \frac{h}{3}\right)$$

$$= \lim_{\ell\to 0}\frac{1}{3\ell}\log_{10}(1+\ell) = \lim_{\ell\to 0}\frac{1}{3}\log_{10}(1+\ell)^{\frac{1}{\ell}} = \frac{1}{3}\log_{10}e$$

(2) $$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log_{10}(x+h)-\log_{10}x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_{10}\left(1+\frac{h}{x}\right) \qquad \left(\ell = \frac{h}{x}\right)$$

$$= \lim_{\ell\to 0}\frac{1}{x\ell}\log_{10}(1+\ell) = \lim_{\ell\to 0}\frac{1}{x}\log_{10}(1+\ell)^{\frac{1}{\ell}} = \frac{1}{x}\log_{10}e$$

問 2 の解答

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$= \lim_{\ell\to 0}\frac{1}{x\ell}\log_a(1+\ell) \qquad \left(\ell = \frac{h}{x}\right)$$

$$= \lim_{\ell\to 0}\frac{1}{x}\log_a(1+\ell)^{\frac{1}{\ell}} = \frac{1}{x}\log_a e$$

＜ 42 ページ. 自然対数 ＞

問 1 の解答

(1) $(\log_{10} x)' = \dfrac{1}{x}\log_{10} e$

(2) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x}\log_a e$

問 2 の解答

(答) $(\log_e x)' = \dfrac{1}{x}\log_e e = \dfrac{1}{x}$

問 3 の解答

(1) $\log e = 1$　(2) $\log(\sqrt[3]{e}) = \dfrac{1}{3}$　(3) $\log\left(\dfrac{1}{e}\right) = -1$　(4) $\log 1 = 0$

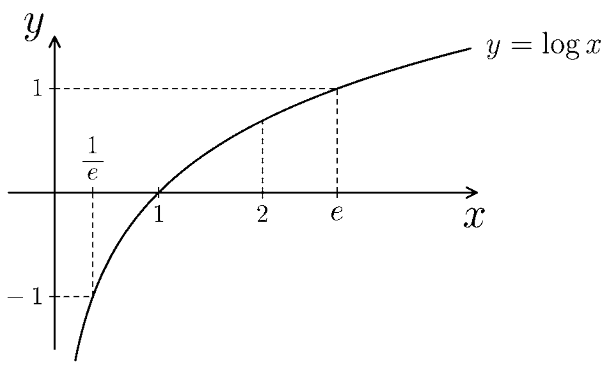
(5) $\ln\left(\dfrac{1}{e}\right) = -1$　(6) $\ln(\sqrt[4]{e}) = \dfrac{1}{4}$　(7) $\ln(e) = 1$　(8) $\ln(e\sqrt{e}) = \dfrac{3}{2}$

問 4 の解答

(1) $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$

(2) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

問 5 の解答



＜ 43 ページ.$\log f(x)$ の導関数 ＞

問 1 の解答

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2+2}{x^3+2x-5}$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

(3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin x}{5-\cos x}$

問 2 の解答

$$\boxed{\Big(\log(f(x))\Big)' = \frac{f'(x)}{f(x)}}$$

問 3 の解答

(1) $\Big(\log(x^2+2x)\Big)' = \dfrac{2x+2}{x^2+2x}$

(2) $\Big(\log(x^6+3x^4)\Big)' = \dfrac{6x^5+12x^3}{x^6+3x^4} = \dfrac{6x^2+12}{x^3+3x}$

(3) $\Big(\log(\sin x)\Big)' = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \cot x$

＜ 44 ページ. 指数関数の導関数 1 ＞

問の解答

(1) $f'(3) = \lim_{h\to 0} \dfrac{e^{3+h} - e^3}{h} = \lim_{h\to 0} e^3 \times \dfrac{e^h - 1}{h} = e^3 \times 1 = e^3$

(2) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \times \dfrac{e^h - 1}{h} = e^x \times 1 = e^x$

< 45 ページ. 指数関数の導関数 2 >

問 1 の解答

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 2e^{2x}$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = -3e^{-3x}$

(3) $\dfrac{dy}{dx} = 2e^{2x-1}$

(4) $\dfrac{dy}{dx} = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$

(5) $\dfrac{dy}{dx} = Ke^{Kx}$

(6) $\dfrac{dy}{dx} = e^{x\log a} \times \log a$

問 2 の解答

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}a^x &= \frac{d}{dx}\left(e^{\log a}\right)^x = \frac{d}{dx}\left\{e^{x\log a}\right\} = e^{x\log a} \times \log a \\ &= \left(e^{\log a}\right)^x \times \log a = \underline{a^x \times \log a}\end{aligned}$$

< 46 ページ. 逆関数の微分 1 >

問の解答

(1) $y = \sqrt{x} \iff x = y^2$ より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}(y^2)} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(2) $y = \sqrt[4]{x} \iff x = y^4$ より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{d}{dy}(y^4)} = \frac{1}{4y^3} = \frac{1}{4(\sqrt[4]{x})^3} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

＜ 47 ページ. 逆関数の微分 2 ＞

問 1 の解答

$y=\cos^{-1}x \iff x=\cos y$ より

$$\frac{d}{dx}\left\{\cos^{-1}(x)\right\}=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{d}{dy}(\cos y)}=\frac{1}{-\sin y}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

問 2 の解答

$y=\tan^{-1}x \iff x=\tan y$ より

$$\frac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}x\right\}=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{d}{dy}(\tan y)}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}}$$

$$=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

< 48 ページ. 対数微分法 1 >

問 1 の解答

(解) $\log y = x \log 3$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \log 3 \Rightarrow y' = y \times \log 3 = 3^x \log 3$$

よって $(3^x)' = 3^x \log 3$

問 2 の解答

(解) $\log y = x \log a$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \log a \Rightarrow y' = a^x \log a$$

よって $(a^x)' = a^x \log a$

問 3 の解答

(解) $\log y = x \log x$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = (x)' \times \log x + x \times (\log x)' = 1 \times \log x + x \times \frac{1}{x} = \log x + 1$$

よって $y' = y \times (1 + \log x) = x^x(1 + \log x)$

＜ 49 ページ. 対数微分法 2 ＞

問 1 の解答

(解) $\log y = \dfrac{4}{3}\log x$ である. この両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{4}{3} \times \frac{1}{x} \times y = \frac{4}{3} \times \frac{1}{x} x^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}}$$

(答) $\left(x^{\frac{4}{3}}\right)' = \dfrac{4}{3} \times x^{\frac{1}{3}}$

問 2 の解答

(解) $y = x^r$ の両辺の自然対数をとると

$\log y = r \log x$ であり, この両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{r}{x} \Rightarrow y' = \frac{r}{x} \times y = \frac{r}{x} \times x^r = r x^{r-1}$$

(答) $(x^r)' = r x^{r-1}$

＜ 50 ページ.x^r の導関数 ＞

問 1 の解答

(1) $\left(\sqrt[4]{x^5}\right)' = \dfrac{5}{4}x^{\frac{1}{4}} = \dfrac{5}{4}\sqrt[4]{x}$

(2) $\left(\sqrt[5]{x^7}\right)' = \dfrac{7}{5}x^{\frac{2}{5}} = \dfrac{7}{5}\sqrt[5]{x^2}$

(3) $\left(\sqrt{x^3}\right)' = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

問 2 の解答

(1) $\left(\dfrac{1}{x^3}\right)' = -3x^{-4} = -\dfrac{3}{x^4}$

(2) $\left(\dfrac{1}{x^4}\right)' = -4x^{-5} = -\dfrac{4}{x^5}$

(3) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$

問 3 の解答

(1) $\left(\sqrt[4]{x}\right)' = \dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

(2) $\left(\sqrt[5]{x^4}\right)' = \dfrac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}} = \dfrac{4}{5\sqrt[5]{x}}$

(3) $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

問 4 の解答

(1) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)' = -\dfrac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}-1} = -\dfrac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$

(2) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)' = -\dfrac{1}{4}x^{-\frac{1}{4}-1} = -\dfrac{1}{4x\sqrt[4]{x}}$

(3) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

< 51 ページ.$\log|x|$ の導関数 >

問の解答

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan x} = \dfrac{1}{\sin x \cos x}$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x+3}{x^2+3x}$

(3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

< 52 ページ. 微分の練習 3 >

問 1 の解答

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ (2) $\displaystyle\lim_{h\to\infty}\frac{e^h-1}{h} = 1$

問 2 の解答

(1) $(2e^x)' = 2e^x$ (2) $(3\log x)' = \dfrac{3}{x}$

(3) $(\sqrt[3]{x})' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ (4) $\left(\dfrac{1}{x^3}\right)' = -\dfrac{3}{x^4}$

(5) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$ (6) $(e^{4x+1})' = 4e^{4x+1}$

(7) $\big(\log(5x)\big)' = \dfrac{1}{x}$ (8) $\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$

(9) $\big(\log\left(x^3\right)\big)' = \dfrac{3}{x}$ (10) $(\log|4x|)' = \dfrac{1}{x}$

(11) $(\log|\sin x|)' = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \cot x$ (12) $(x\sqrt{x})' = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

(13) $\big(e^x\sin x\big)' = e^x\sin x + e^x\cos x$ (14) $\big(e^{3x}\cos(4x)\big)' = 3e^{3x}\cos(4x) - 4e^{3x}\sin(4x)$

(15) $(xe^{-x})' = e^{-x} - xe^{-x}$ (16) $(x^2\log|x|)' = 2x\log|x| + x$

問 3 の解答

$y = 4^x$ の両辺の自然対数をとる

$\log y = \log 4^x = x\log 4$

両辺を x で微分すると

$\dfrac{y'}{y} = \log 4$

$y' = y\times\log 4$

$\quad = \underline{4^x\log 4}$

< 53ページ.接線の方程式 >

問の解答

(1) $y = x + 1$

(2) $y = x - 1$

(3) $y = x$

(4) $y = \dfrac{1}{4}x + 1$

(5) $y = -x + 2$

＜ 54 ページ. 平均値の定理 ＞

問 1 の解答

$(a,\, b) = \{x : a < x < b\}$　　$(a,\, +\infty) = \{x : a < x\}$　　$(-\infty,\, b) = \{x : x < b\}$

$(a,\, b] = \{x : a < x \leqq b\}$　　$[a,\, b) = \{x : a \leqq x < b\}$　　$[a,\, +\infty) = \{x : a \leqq x\}$

問 2 の解答

$$\frac{b^2 - a^2}{b - a} = \frac{(b-a)(b+a)}{b-a} = b + a = f'(c) = 2c$$

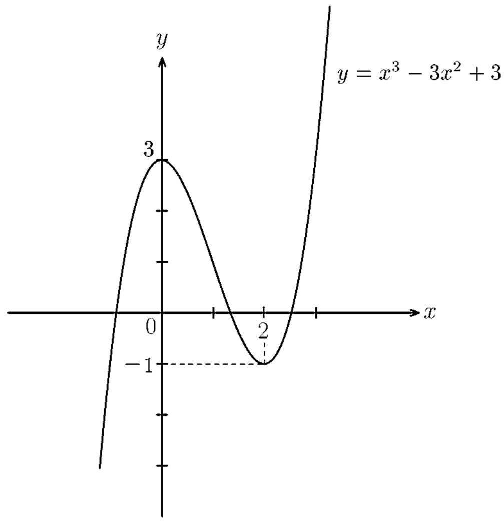
$$2c = a + b \Rightarrow \underline{c = \frac{a+b}{2}}$$

＜ 55 ページ. 関数の増減 ＞

問の解答

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$



< 56 ページ. 極大・極小 1 >

問の解答

$$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$$

$$\begin{aligned} y' &= 6x^2 + 6x - 12 \\ &= 6(x^2 + x - 2) \\ &= 6(x-1)(x+2) \end{aligned}$$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	20	$\searrow$	-7	$\nearrow$

$x = -2$ のとき極大値 $y = 20$

$x = 1$ のとき極小値 $y = -7$

< 57 ページ. 極大・極小 2 >

問の解答

(1) $y = 3x^4 - 8x^3 - 18x^2$

$$\begin{aligned} y' &= 12x^3 - 24x^2 - 36x \\ &= 12x(x^2 - 2x - 3) \\ &= 12x(x-3)(x+1) \end{aligned}$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	-7	$\nearrow$	0	$\searrow$	-135	$\nearrow$

$x = 0$ のとき極大値 $y = 0$

$x = -1$ のとき極小値 $y = -7$

$x = 3$ のとき極小値 $y = -135$

(2) $y = \dfrac{x^2}{e^x}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^2)' \times e^x - x^2 \times (e^x)'}{(e^x)^2} \\ &= \frac{2xe^x - x^2e^x}{e^{2x}} \\ &= \frac{2x - x^2}{e^x} = \frac{x(2-x)}{e^x} \end{aligned}$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$

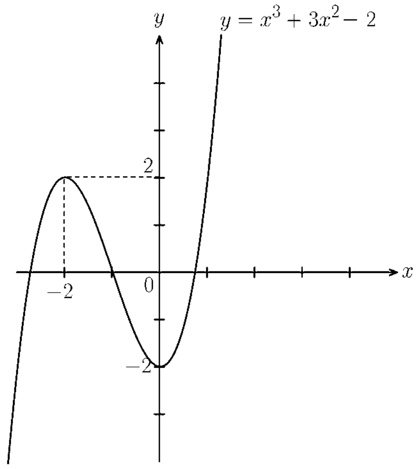
$x = 2$ のとき極大値 $y = \dfrac{4}{e^2}$

$x = 0$ のとき極小値 $y = 0$

＜ 58 ページ. 関数グラフ ＞

問の解答

(1)　$y' = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$



x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

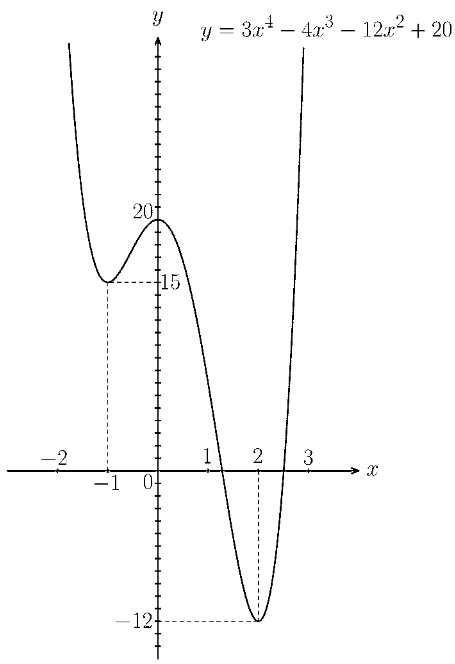
$x = -2$ のとき極大値 $y = 2$

$x = 0$ のとき極小値 $y = -2$

(2)　$y' = 12^3 - 12x^2 - 24x$

$= 12x(x^2 - x - 2)$

$= 12x(x-2)(x+1)$



x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	15	$\nearrow$	20	$\searrow$	-12	$\nearrow$

$x = -1$ のとき極小値 $y = 15$

$x = 0$　のとき極大値 $y = 20$

$x = 2$　のとき極小値 $y = -12$

$<$ 59 ページ. 最大・最小 1 $>$

問の解答

$$
\begin{aligned}
y' &= 3x^2 - 12x + 9 \\
&= 3(x^2 - 4x + 3) \\
&= 3(x-3)(x-1)
\end{aligned}
$$

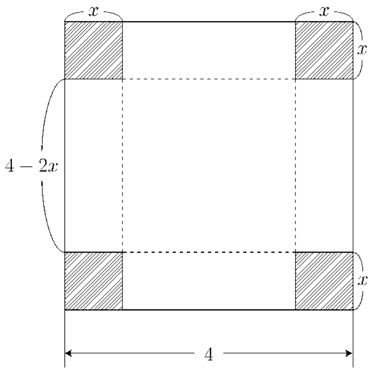
x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3
y'	$\times$	$+$	0	$-$	$\times$
y	-19	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3

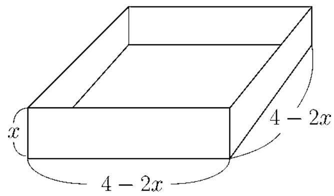
$x = 1$ のとき最大値 $y = 1$

$x = -1$ のとき最小値 $y = -19$

＜ 60 ページ. 最大・最小 2 ＞

問の解答





x の範囲は $\underline{\ 0 < x < 2\ }$ である

$$
\begin{aligned}
y &= x(4-2x)^2 \\
&= x(16-16x+4x^2) \\
&= 4x^3-16x^2+16x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y' &= 12x^2-32x+16 \\
&= 4(3x^2-8x+4) \\
&= 4(3x-2)(x-2)
\end{aligned}
$$

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	2
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{128}{27}$	$\searrow$	0

$$x = \frac{2}{3} \ \Rightarrow \ y = \frac{128}{27}$$

(答) $x = \dfrac{2}{3}$(cm) のとき最大容積 $y = \dfrac{128}{27}(\text{cm}^3)$

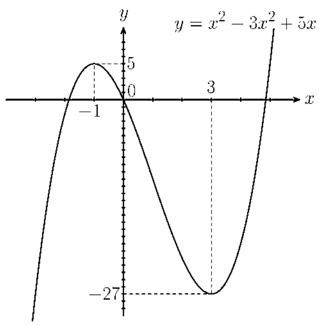
＜ 61 ページ. 微分の応用 ＞

問 1 の解答

(1) $x = -1$ のとき極大値 $y = 5$

$x = 3$ のとき極小値 $y = -27$

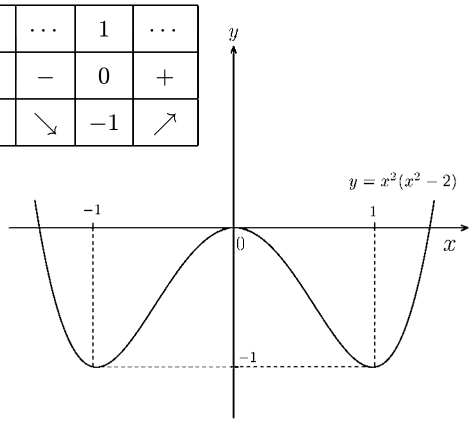
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27	$\nearrow$



(2) $x = 0$ のとき極大値 $y = 0$

$x = -1,\ 1$ のとき極小値 $y = -1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$



問 2 の解答

(1) $y = -x^2 - 4x + 3 \quad (-2 \leqq x \leqq 1)$

$y' = -2x - 4 = -2(x + 2)$

$x = -2$ のとき最大値 $y = 7$

$x = 1$ のとき最小値 $y = -2$

x	-2	$\cdots$	1
y'	0	$-$	$-$
y	7	$\searrow$	-2

(2) $y = -x^3 + 3x^2 + 9x \quad (-2 \leqq x \leqq 5)$

$y' = -3x^2 + 6x + 9 = -3(x - 3)(x + 1)$

$x = 3$ のとき最大値 $y = 27$

$x = -1,\ 5$ のとき最小値 $y = -5$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	5
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	2	$\searrow$	-5	$\nearrow$	27	$\searrow$	-5

問 3 の解答

(1) $y = x(6 - 2x)(6 - x) = 2x^3 - 18x^2 + 36x$

(2) $y' = 6x^2 - 36x + 36 = 6\left\{(x - 3)^2 - 3\right\}$

x	0	$\cdots$	$3-\sqrt{3}$	$\cdots$	3
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$12\sqrt{3}$	$\searrow$	0

(答) $x = 3 - \sqrt{3}$ (cm) のとき y は最大容積 $12\sqrt{3}$ (cm^3) になる