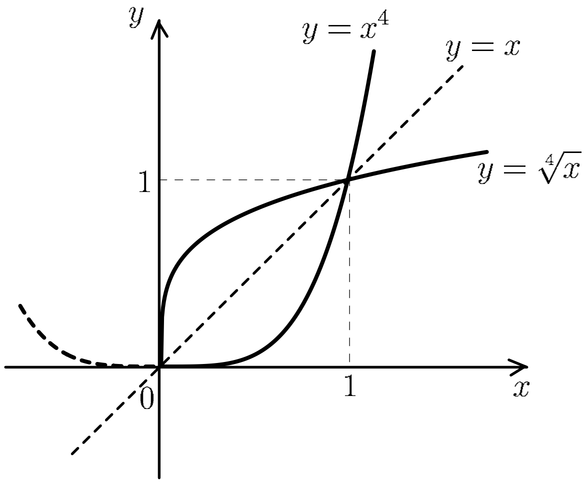
高知工科大学
Kochi University of Technology

数学 1

（2006年度版）



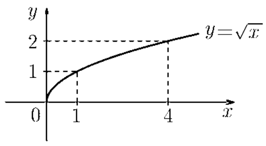
初等関数の微分法

（指数・対数・三角関数の微分法,
積・商・合成関数・逆関数の微分法）

井上 昌昭　著

＜関数の定義域と値域 1＞

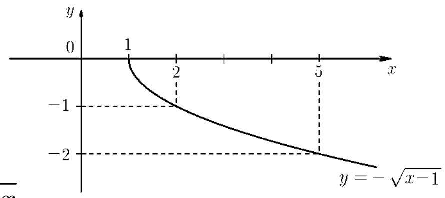
例 1　無理関数 $y=\sqrt{x}$ の場合,「$\sqrt{\ }$ の中が負になってはいけない」という制限が自動的につく。すなわち $x \geqq 0$ である。このような x の範囲を **定義域** という。なお $\sqrt{\ }$ の値は常に 0 以上だから y の範囲は $y \geqq 0$ となる。y の範囲を **値域** という。



例 2　無理関数 $y=-\sqrt{x-1}$ の場合,

($\sqrt{\ }$ の中) $\geqq 0 \Rightarrow x-1 \geqq 0$ より 定義域は $x \geqq 1$

$\sqrt{\ } \geqq 0 \Rightarrow y=-\sqrt{\ } \leqq 0$ より 値域は $y \leqq 0$



問 1　次の無理関数の定義域と値域を求めよ。

(1) $y=\sqrt{x+2}$　　(2) $y=-\sqrt{1-x}$

例 3　分数関数 $y=\dfrac{1}{x}$ の場合,「分母が 0 になってはいけない」という制限が自動的につく。従って定義域は $x \neq 0$ である。

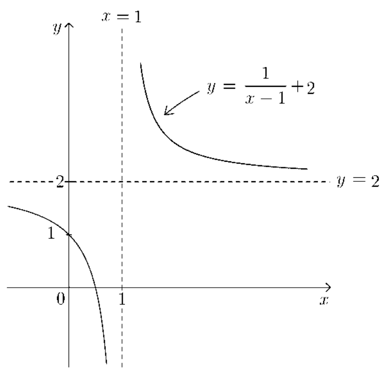
また値域は $y \neq 0$ である。すなわち $y=0$ となる x は存在しない。

$\left(\begin{array}{l} y=\dfrac{1}{x} \text{ より } x \times y = 1 \text{ であるから } y \neq 0 \text{ となる。なぜならば、もし} \\ y=0 \text{ であれば } x \times y = x \times 0 = 0 \text{ となって } x \times y = 1 \text{ に反するからである。} \end{array} \right)$

例 4　分数関数 $y=\dfrac{1}{x-1}+2$ の場合

分母 $\neq 0 \quad \Rightarrow \quad x-1 \neq 0$ より 定義域は $x \neq 1$

$\dfrac{1}{\square} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad y-2=\dfrac{1}{x-1} \neq 0$ より 値域は $y \neq 2$

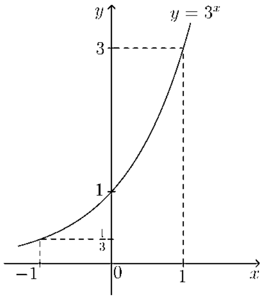


問 2　次の分数関数の定義域と値域を求めよ。

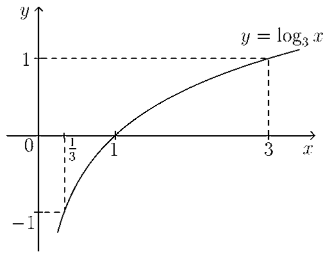
(1) $y=\dfrac{1}{x+1}-2$　　(2) $y=\dfrac{1}{1-x}-1$

< 関数の定義域と値域 2 >

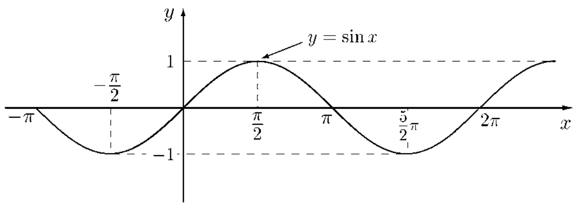
例 1　指数関数 $y = 3^x$ の場合, x に制限はないので 定義域は実数全体 である。
任意の実数 x に対し, 常に $3^x > 0$ より,
値域は $y > 0$ である。



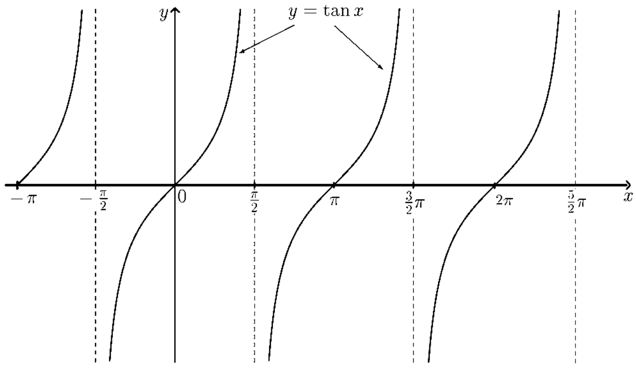
例 2　対数関数 $y = \log_3 x$ を考える。
対数の定義より $x = 3^y$ である。
例 1 と同様に考えると, y は実数全体, $x > 0$ であるから, 対数関数 $y = \log_3 x$ の 定義域は $x > 0$,
値域は実数全体 である。$x > 0$ は **真数条件** とも言う。



例 3　三角関数 $y = \sin x$ の場合,
x に制限は無いので 定義域は 実数全体 である。また $-1 \leqq \sin x \leqq 1$ より 値域は $-1 \leqq y \leqq 1$ である。



例 4　三角関数 $y = \tan x$ の場合,
$x = \dfrac{\pi}{2} \pm n\pi \ \ (n = 0, 1, 2, \ \cdots)$
のときは定義されてないので
定義域は $x \neq \dfrac{\pi}{2} \pm n\pi \ \ (n = 0, 1, 2, \ \cdots)$
である。また 値域は実数全体 である。

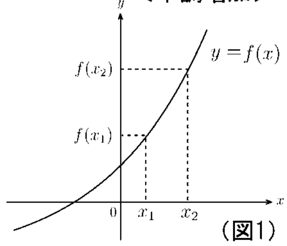


問 1　次の関数の定義域と値域を求めよ。

(1) $y = 2^x$　　(2) $y = \log_2 x$　　(3) $y = \cos x$

＜単調関数＞

＜単調増加＞



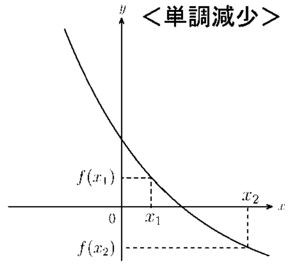
（図1）

図 1 のように関数 $f(x)$ の定義域内の任意の 2 点 x_1, x_2 に対し,

$$x_1 < x_2 \quad \text{ならば} \quad f(x_1) < f(x_2)$$

が常に成り立つとき, $f(x)$ は定義域内で**単調増加**という。

＜単調減少＞

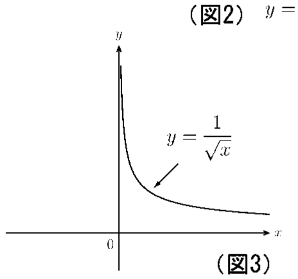


（図2）

図 2 のように関数 $f(x)$ の定義域内の任意の 2 点 x_1, x_2 に対し,

$$x_1 < x_2 \quad \text{ならば} \quad f(x_1) > f(x_2)$$

が常に成り立つとき, $f(x)$ は定義域内で**単調減少**という。
単調増加関数および単調減少関数をまとめて**単調関数**という。

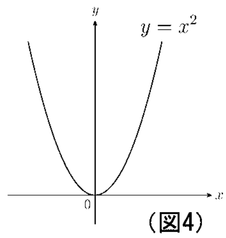


（図3）

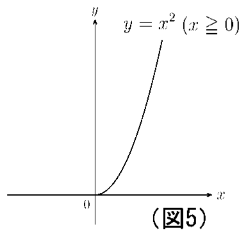
例 1　$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ の定義域は $x > 0$ である。
図 3 より定義域内で単調減少である。

例 2　$f(x) = x^2$ の定義域は実数全体である。
図 4 より単調関数ではない。

例 3　$f(x) = x^2 \ (x \geqq 0)$ は $y = x^2$ の定義域を $x \geqq 0$ に制限した関数である。図 5 より定義域 $(x \geqq 0)$ 内で単調増加である。



（図4）



（図5）

問　次の関数が単調関数かどうか判断せよ。もし単調関数であれば, 単調増加か単調減少かを明記せよ。ただし (　) 内は定義域である。

(1) $y = 3x - 2$

(2) $y = x^3 - 3x$

(3) $y = -(x-1)^2 \quad (x \geqq 2)$

(4) $y = |x|$

(5) $y = \sin x$

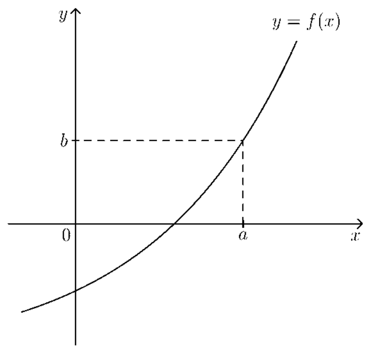
(6) $y = \sin x \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

＜ 逆関数 1 ＞

　関数 $f(x)$ が単調関数であるとき,
(値域内の) y の値 b に対して,

$$\boxed{b = f(a)}$$

となるような (定義域内の) x の値 a が
ただ 1 つ定まる。このとき



$$\boxed{a = f^{-1}(b)}$$

と書く。b に対し, $f^{-1}(b)$ を対応させる関係は関数と考えられる。
この関数を $y = f^{-1}(x)$ と表して, 元の関数 $y = f(x)$ の **逆関数**
という。

例　$f(x) = 3x - 2$ の逆関数を求める。

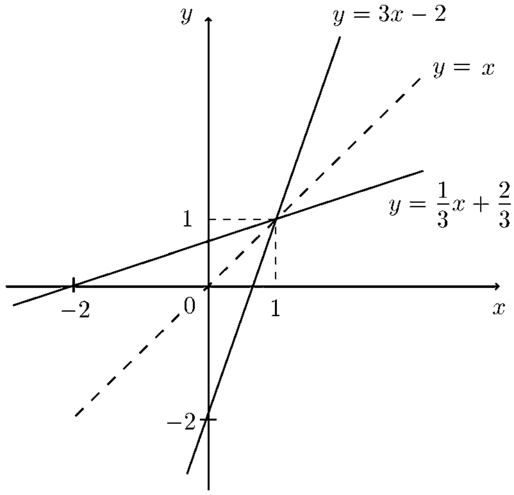
$$b = f(a) \Longleftrightarrow a = f^{-1}(b)$$

より

$$b = 3a - 2 \Longleftrightarrow a = \frac{1}{3}b + \frac{2}{3} = f^{-1}(b)$$

だから

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$



(注)　次のようにして逆関数を求めてもよい。

元の関数 ： $y = 3x - 2$

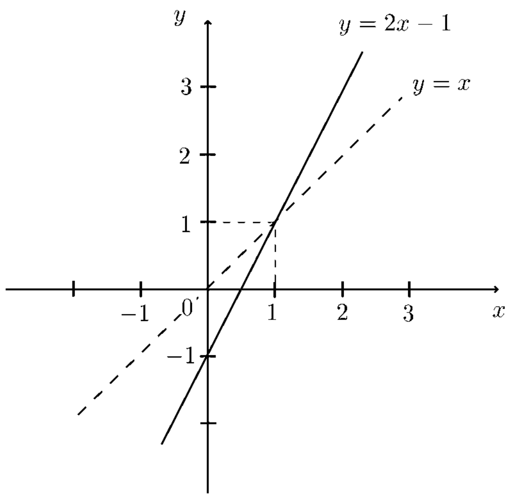
$\Downarrow$　(x について解く)

$$x = \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}$$

$\Downarrow$　(x と y を入れ替える)

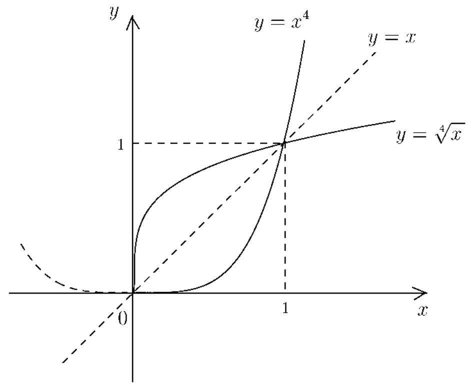
逆関数 ： $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

問　$f(x) = 2x - 1$ の逆関数 $f^{-1}(x)$
を求めよ。また右図に $y = f^{-1}(x)$
のグラフを描け。



< 逆関数 2 >

例 1　$f(x) = x^4$ $(x \geqq 0)$ の逆関数を求める。



元の関数 ： $y = x^4$

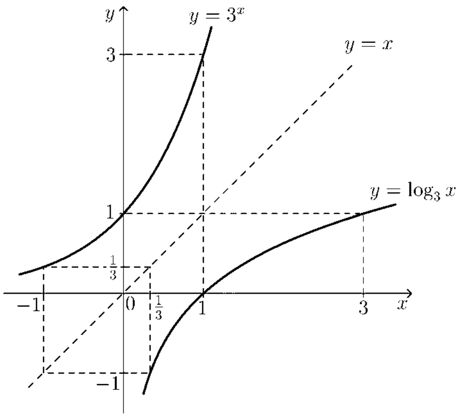
$\Downarrow$　　　$(x$ について解く$)$

$x = \sqrt[4]{y}$

$\Downarrow$　　　$(x$ と y を入れ替える$)$

逆関数 ： $y = \sqrt[4]{x}$　　<u>(答)　$f^{-1}(x) = \sqrt[4]{x}$</u>

例 2　$f(x) = 3^x$ の逆関数を求める。



元の関数 ： $y = 3^x$

$\Downarrow$

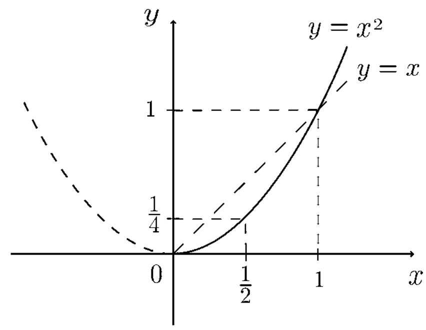
$\log_3 y = \log_3(3^x) = x$

$\Downarrow$　　　$(x$ と y を入れ替える$)$

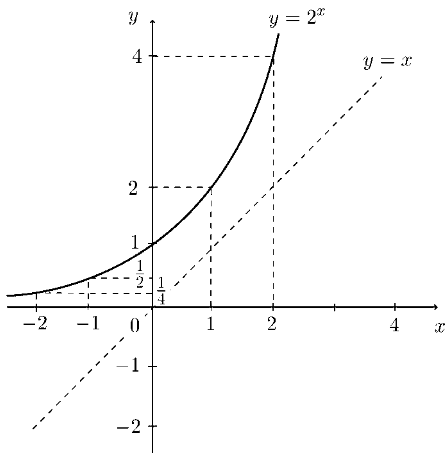
逆関数 ： $y = \log_3 x$　　<u>(答)　$f^{-1}(x) = \log_3 x$</u>

(注)　例 1, 例 2 の図を見てわかるように, 元の関数 $y = f(x)$ のグラフと
逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフは, 直線 $y = x$ に関して対称である。

問 1　$f(x) = x^2$ $(x \geqq 0)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求め,
右図内に $y = f^{-1}(x)$ のグラフを描け。

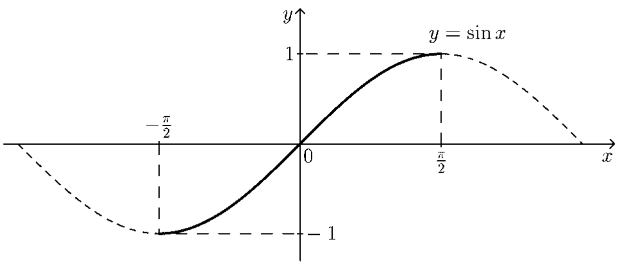


問 2　$f(x) = 2^x$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求め,
右図内に $y = f^{-1}(x)$ のグラフを描け。



問 3　$f(x) = \log_3 x$ の逆関数を求めよ。

＜ 逆三角関数 1 ＞



正弦関数 $y = \sin x$ の通常の定義域は実数全体であり、値域は $-1 \leqq y \leqq 1$ である。この関数の定義域を $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に制限すると、単調増加になる。このとき、関数

$$y = \sin x \quad (\text{定義域: } -\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2},\ \text{値域: } -1 \leqq y \leqq 1)$$

の逆関数が存在して、これを、

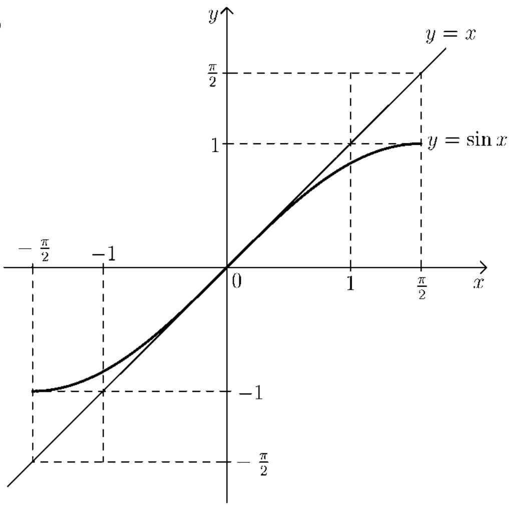
$$\boxed{y = \sin^{-1} x}\ \text{又は}\ \boxed{y = \arcsin x}\ (\text{定義域: } -1 \leqq x \leqq 1,\ \text{値域: } -\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2})$$

(インバースサイン)　　(アークサイン)

と表す。$y = \sin^{-1} x$ のグラフは、$y = \sin x$ のグラフを直線 $y = x$ に関して対称に折り返したものである。

(注) $\sin^{-1} x$ は $\dfrac{1}{\sin x}$ ではない。これを区別するため

$\dfrac{1}{\sin x} = \operatorname{cosec} x$ と書く。



問 1　右の座標平面上に $y = \sin^{-1} x$ のグラフを描け。

例　逆関数の定義より、

$$a = \sin^{-1} b \iff b = \sin a$$

である。例えば $\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の値 θ を求めようとすると、

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \iff \frac{1}{2} = \sin\theta$$

より、$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $\sin\theta$ が $\dfrac{1}{2}$ となる角度 θ を求める。右表より

$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ であるから (答)　$\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6}$

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	-1				0	$\frac{1}{2}$			1

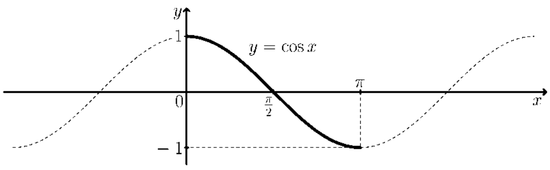
問 2　表を完成させよ。

問 3　次の値を求めよ。

(1)　$\sin^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) =$　　　(2)　$\sin^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) =$　　　(3)　$\sin^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right) =$

＜ 逆三角関数 2 ＞

余弦関数 $y=\cos x$ の通常の定義域は実数全体であり、値域は $-1 \leqq y \leqq 1$ である。この関数の定義域を $0 \leqq x \leqq \pi$ に制限すると、単調減少になる。そのとき、関数



$$y=\cos x \quad (\text{定義域: } 0 \leqq x \leqq \pi,\ \text{値域: } -1 \leqq y \leqq 1)$$

の逆関数が存在して、これを、

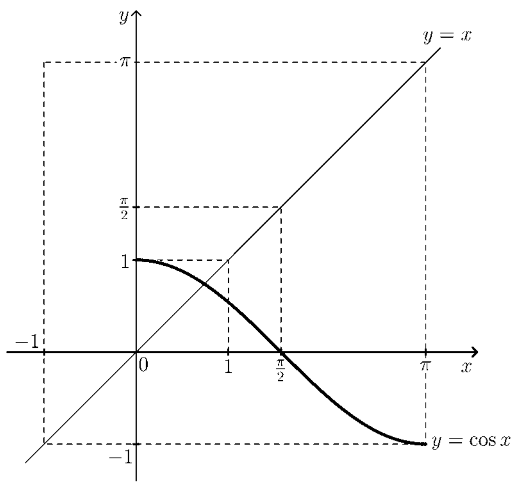
$\boxed{y=\cos^{-1} x}$ 又は $\boxed{y=\arccos x}$ (定義域: $-1 \leqq x \leqq 1$, 値域: $0 \leqq y \leqq \pi$)

(インバースコサイン)　(アークコサイン)

と表す。$y=\cos^{-1} x$ のグラフは、$y=\cos x$ のグラフを直線 $y=x$ に関して対称に折り返したものである。

(注) $\cos^{-1} x$ は $\dfrac{1}{\cos x}$ ではない。これを区別するため

$\dfrac{1}{\cos x}=\sec x$ と書く。



問 1　右の座標平面上に $y=\cos^{-1} x$ のグラフを描け。

例　逆関数の定義より、

$$a=\cos^{-1} b \iff b=\cos a$$

である。例えば $\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の値 θ を求めようとすると、

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \iff \frac{1}{2}=\cos\theta$$

より、$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で $\cos\theta$ が $\dfrac{1}{2}$ となる角度 θ を求める。右表より

$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ であるから (答)　$\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{3}$

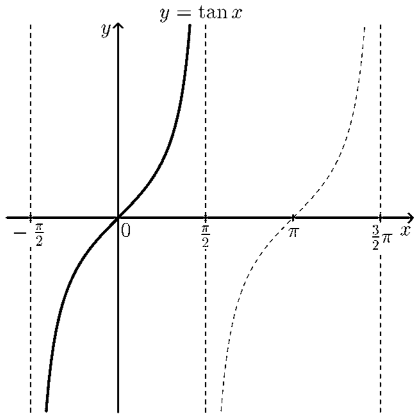
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos\theta$	1			$\frac{1}{2}$	0				-1

問 2　表を完成させよ。

問 3　次の値を求めよ。

(1)　$\cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=$　　(2)　$\cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=$　　(3)　$\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)=$

< 逆三角関数 3 >



正接関数 $y = \tan x$ の通常の定義域は

$\dfrac{\pi}{2} + n\pi$ (n は整数) 以外の実数であり、

値域は実数全体である。この関数の

定義域を $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ に制限すると、

単調増加になる。そのとき、関数

$$y = \tan x \quad (\text{定義域: } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\ ,\ \text{値域: 実数全体})$$

の逆関数が存在して、これを、

$\boxed{y = \tan^{-1} x}$ 又は $\boxed{y = \arctan x}$ (定義域: 実数全体 , 値域: $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$)

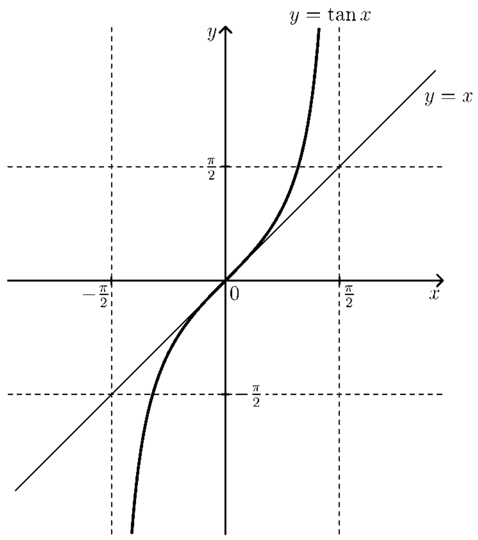
(インバースタンジェント) (アークタンジェント)

と表す。$y = \tan^{-1} x$ のグラフは、$y = \tan x$ のグラフを直線 $y = x$ に関して対称に折り返したものである。

(注) $\tan^{-1} x$ は $\dfrac{1}{\tan x}$ ではない。これを区別するため

$\dfrac{1}{\tan x} = \cot x$ と書く。

問 1　右の座標平面上に $y = \tan^{-1} x$ のグラフを描け。



例　逆関数の定義より、

$$a = \tan^{-1} b \iff b = \tan a$$

である。例えば $\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$ の値 θ を求めようとすると、

$$\theta = \tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right) \iff \sqrt{3} = \tan\theta$$

より、$-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $\tan\theta$ が

$\sqrt{3}$ となる角度 θ を求める。右表より

$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ であるから

θ	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan\theta$				0			$\sqrt{3}$

(答)　$\tan^{-1}(\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{3}$

問 2　表を完成させよ。

問 3　次の値を求めよ。

(1)　$\tan^{-1}(1) =$　　　(2)　$\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) =$　　　(3)　$\tan^{-1}(-\sqrt{3}) =$

< 合成関数 >

2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ について、関数 $f(g(x))$ や関数 $g(f(x))$ を考えることができる。これら関数を $f(x)$ と $g(x)$ の**合成関数**という。

例 1 $f(x) = x^3$, $g(x) = \sin x$ のとき

$$g(f(x)) = g(x^3) = \sin(x^3)$$

$$f(g(x)) = f(\sin x) = (\sin x)^3 = \sin^3 x$$

注) $\sin(x^3) \neq \sin^3 x$ である。一般に $f(g(x))$ と $g(f(x))$ は一致しない。

問 1 関数 $f(x)$ と $g(x)$ が以下の場合に、合成関数 $g(f(x))$ と $f(g(x))$ を求めよ。

(1) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 3x$, $g(f(x)) =$, $f(g(x)) =$

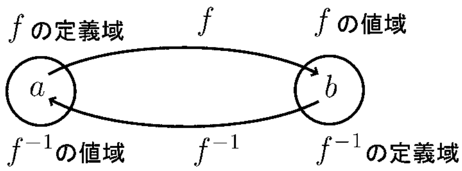
(2) $f(x) = \tan x$, $g(x) = x + 2$, $g(f(x)) =$, $f(g(x)) =$

(3) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 - 1$, $g(f(x)) =$, $f(g(x)) =$

(4) $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = \log_2 x$, $g(f(x)) =$, $f(g(x)) =$

問 2 関数 $f(x)$ が単調であれば逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在し，$f(a) = b$ ならば $f^{-1}(b) = a$ である。次式を a か b で表せ。

(1) $f^{-1}\left(f(a)\right)$　　(2) $f\left(f^{-1}(b)\right)$



問 3 関数 $f(x)$ と $g(x)$ が以下の場合に $g\left(f(x)\right)$ と $f\left(g(x)\right)$ を求めよ。

(1) $f(x) = x^4$, $g(x) = \sqrt[4]{x}$ $(x \geqq 0)$

(2) $f(x) = 2^x$, $g(x) = \log_2 x$ $(x > 0)$

(3) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sin^{-1} x$ $(-1 < x < 1)$

問 4 次式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt[3]{x^3}$　　(2) $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3$

(3) $\log_3(3^x)$　　(4) $3^{\log_3 x}$

(5) $\tan^{-1}\left(\tan\dfrac{\pi}{4}\right)$　　(6) $\tan\left(\tan^{-1}(1)\right)$

< 関数の練習 >

問 1 次の関数の定義域と値域を求めよ。

(1) $y = \sqrt{x}$　　(2) $y = 4^x$　　(3) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

(4) $y = \sin x$　　(5) $y = \log_4 x$　　(6) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

問 2 $f(x)$ が次の各場合に逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。ただし ( ) 内は $f(x)$ の定義域である。

(1) $f(x) = x^4 \quad (x \geqq 0)$　　(2) $f(x) = 4^x$

(3) $f(x) = \log_2 x$　　(4) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

問 3 次の関数の値を求めよ。

(1) $\sin^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　(2) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　(3) $\tan^{-1}(1)$

(4) $\mathrm{cosec}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$　　(5) $\sec\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$　　(6) $\cot\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

問 4 $f(x)$ と $g(x)$ が次の各場合に, 合成関数 $f(g(x))$ と $g(f(x))$ を求めよ。

(1) $f(x) = \sin x$,　$g(x) = x^4$,　$f(g(x)) =$　　$g(f(x)) =$

(2) $f(x) = \cos x$,　$g(x) = x^5$,　$f(g(x)) =$　　$g(f(x)) =$

(3) $f(x) = x^5$,　$g(x) = 3x + 4$,　$f(g(x)) =$　　$g(f(x)) =$

(4) $f(x) = x^6$,　$g(x) = x^2 + 3x$,　$f(g(x)) =$　　$g(f(x)) =$

< 無限等比級数 >

無限に続く等比数列

$$a\ ,\ ar\ ,\ ar^2\ ,\ ar^3\ ,\ \cdots\ ,\ ar^{n-1}\ ,\ \cdots$$

の和を考える。第 n 項までの和を

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \ \cdots\ ①$$

とおくと

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \ \cdots\ ②$$

であるから ① − ② より

$$(1-r)S_n = a - ar^n$$

よって $r \neq 1$ のとき

$$S_n = \frac{a - ar^n}{1-r}$$

ここで $0 < r < 1$ のときは $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ となる。(その証明は研究課題)。

従って無限和は

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a - ar^n}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

よって

$0 < r < 1$ のとき $\boxed{a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \dfrac{a}{1-r}}$

これを初項 a , 公比 r の **無限等比数列の和** または **無限等比級数の和** という。

例

$$2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \cdots + 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \cdots = \frac{2}{1-\frac{1}{3}} = 3$$

問　次の和を求めよ。

(1) $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n-1}} + \cdots =$

(2) $\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{100} + \dfrac{1}{1000} + \cdots + \dfrac{1}{10^n} + \cdots =$

(3) $\dfrac{3}{10} + \dfrac{3}{10} \times \dfrac{1}{10} + \dfrac{3}{10} \times \left(\dfrac{1}{10}\right)^2 + \cdots + \dfrac{3}{10} \times \left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1} + \cdots =$

< 循環小数 1 >

分数は有限小数かまたは循環する無限小数で表される。

例 1　$\dfrac{1}{8} = 0.125$,　　$\dfrac{1}{25} = 0.04$,　　$\dfrac{3}{40} = 0.075$

(注)　分母が 2 または 5 の積の場合は必ず有限小数で表される。
それ以外の場合は必ず循環する無限小数になる。これは
小数を 10 進法で表しているからである。

例 2　$\dfrac{1}{3} = 0.33333333\cdots$　,　$\dfrac{1}{6} = 0.166666\cdots$

$\dfrac{7}{12} = 0.583333\cdots$　,　$\dfrac{4}{11} = 0.363636\cdots$

$\dfrac{853}{1665} = 0.5123123123123\cdots$

$$
\begin{array}{r}
0.3636 \\
11\,)\overline{40} \\
\underline{33} \\
70 \\
\underline{66} \\
40 \\
\underline{33} \\
70 \\
\underline{66} \\
4
\end{array}
$$

このように同じ数が無限に繰り返さ
れる小数を**循環小数**という。
限りなく続くことをあらわすために,
繰り返される最初と最後の数の
上にドット (黒丸) を付けて表す。
例えば $\dfrac{1}{3} = 0.3333\cdots = 0.\dot{3}$

$\dfrac{1}{6} = 0.16666\cdots = 0.1\dot{6}$

$\dfrac{7}{12} = 0.58333\cdots = 0.58\dot{3}$

$\dfrac{4}{11} = 0.363636\cdots = 0.\dot{3}\dot{6}$

$\dfrac{853}{1665} = 0.5123123123\cdots = 0.5\dot{1}2\dot{3}$

等で表す。

$$
\begin{array}{r}
0.5123123 \\
1665\,)\overline{8530} \\
\underline{8325} \\
\boxed{2050} \\
\underline{1665} \\
3850 \\
\underline{3330} \\
5200 \\
\underline{4995} \\
\boxed{2050} \\
\underline{1665} \\
3850 \\
\underline{3330} \\
5200 \\
\underline{4995} \\
\boxed{2050}
\end{array}
$$

問　次の分数を小数になおせ。

(1) $\dfrac{11}{16}$　　(2) $\dfrac{5}{12}$

(3) $\dfrac{4}{33}$　　(4) $\dfrac{15}{37}$

＜ 循環小数 2 ＞

例 (1) $0.\dot{3} = 0.3333\cdots = 0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + 0.00003 + \cdots$

$$= \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \frac{3}{100000} + \cdots$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{3}{10} \times \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{3}{10} \times \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \frac{3}{10} \times \left(\frac{1}{10}\right)^4 + \cdots$$

より初項 $a = \dfrac{3}{10}$, 公比 $r = \dfrac{1}{10}$ の無限等比級数の和であるから

$$0.\dot{3} = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

(2) $0.\dot{3}\dot{6} = 0.36363636\cdots = 0.36 + 0.0036 + 0.000036 + 0.00000036 + \cdots$

$$= \frac{36}{100} + \frac{36}{10000} + \frac{36}{1000000} + \frac{36}{100000000} + \cdots$$

$$= \frac{36}{100} + \frac{36}{100} \times \left(\frac{1}{100}\right) + \frac{36}{100} \times \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \frac{36}{100} \times \left(\frac{1}{100}\right)^3 + \cdots$$

$$= \frac{\frac{36}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$$

問 次の循環小数を分数または整数になおせ。

(1) $0.\dot{5} = 0.5555\cdots =$

(2) $0.\dot{9} = 0.9999\cdots =$

(3) $0.\dot{1}\dot{2} = 0.12121212\cdots =$

(4) $0.\dot{4}\dot{3} = 0.434343\cdots =$

(5) $0.\dot{1}2\dot{3} = 0.123123123123\cdots =$

< 小数の表示 >

例 1 (1) $0.\dot{9} = 0.9999\cdots = 1$ （前ページ問 (2) より）

(2) $0.0\dot{9} = 0.09999\cdots = 0.09 + 0.009 + 0.0009 + 0.00009 + \cdots$

$$= 0.09 + 0.09 \times \frac{1}{10} + 0.09 \times \left(\frac{1}{10}\right)^2 + 0.09 \times \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \cdots$$

$$= \frac{0.09}{1 - \dfrac{1}{10}} = \frac{0.09}{\dfrac{9}{10}} = \frac{0.9}{9} = 0.1$$

例 2 $0.00\dot{9} = 0.009999\cdots = 0.009 + 0.0009 + 0.00009 + 0.000009 + \cdots$

$$= 0.009 + 0.009 \times \frac{1}{10} + 0.009 \times \left(\frac{1}{10}\right)^2 + 0.009 \times \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \cdots$$

$$= \frac{0.009}{1 - \dfrac{1}{10}} = 0.01$$

問 1 次の循環小数を有限小数になおせ。

(1) $0.000\dot{9} =$ (2) $0.0000\dot{9} =$

例 3 (1) $1.\dot{9} = 1.9999\cdots = 1 + 0.9999\cdots = 1 + 0.\dot{9} = 1 + 1 = 2$

(2) $2.4\dot{9} = 2.4 + 0.0\dot{9} = 2.4 + 0.1 = 2.5$

(3) $3.13\dot{9} = 3.13 + 0.00\dot{9} = 3.13 + 0.01 = 3.14$

問 2 次の循環小数を整数または有限小数になおせ。

(1) $9.\dot{9} =$ (2) $0.1\dot{9} =$

例 4 1 を循環小数によって次の 2 通りに表すことができる。

$1 = 0.\dot{9} = 0.9999\cdots$

$1 = 1.\dot{0} = 1.0000\cdots$

問 3 例 4 のように次の数を循環小数によって 2 通りに表せ。

(1) $10 =$ (2) $5.3 =$

< 関数の極限 1 >

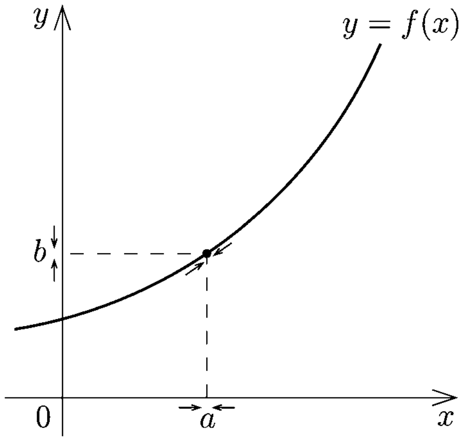
関数 $f(x)$ の定義域内で，x が a と異なる値をとりながら，a に限りなく近づくとき，どのように近づいても $f(x)$ の値が一定の値 b に限りなく近づくならば，これを

$x \to a$ のとき $f(x) \to b$

または

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

と表し，b を，x が a に限りなく近づくときの $f(x)$ の**極限値**という。



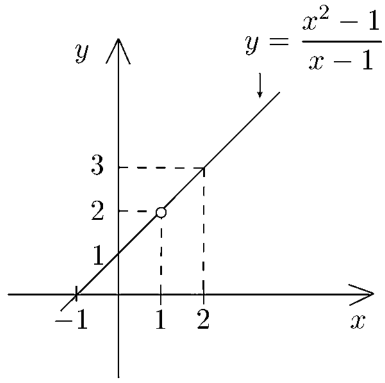
例 1 $\displaystyle \lim_{x \to 3} \sqrt{x^2+2x} = \sqrt{3^2+2\times 3} = \sqrt{9+6} = \sqrt{15}$

例 2 $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{2^2-1}{2-1} = 3$

例 3 $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1}(x+1) = 1+1 = 2$

(注)　例 3 の場合 $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ は $x=1$ では **定義されていない**。

無理に代入すると $f(1) = \dfrac{0}{0}$ の形で計算できないので，分子を因数分解して代入できる形になおしてから $x=1$ を代入する。



例 4 $\displaystyle \lim_{x \to -1} \frac{x^2-x-2}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x-2)}{x+1} = \lim_{x \to -1}(x-2) = -1-2 = -3$

問　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{x \to 3} \sqrt{x+1}$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \cos x$

(3) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \sin x$

(4) $\displaystyle \lim_{x \to \frac{1}{2}} \log_2 x$

(5) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x^2-1}{x-1}$

(6) $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{x^2-x-2}{x+1}$

(7) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^2-4x+3}{x-1}$

(8) $\displaystyle \lim_{x \to -2} \frac{x^2-x-6}{x+2}$

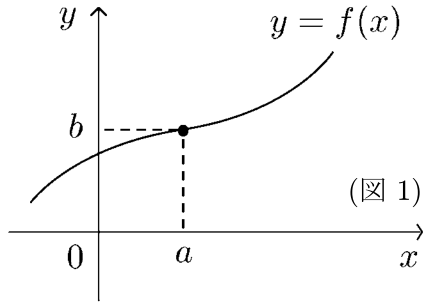
< 関数の極限 2 >

関数 $f(x)$ に対し

(∗) $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = b}$

であるとき, $y = f(x)$ のグラフは

右の図 1, 図 2, 図 3 の 3 通りの場合がある。



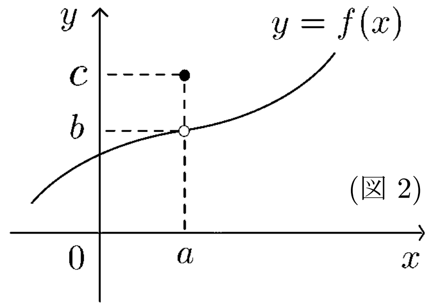
(図 1)

(1) 図 1 場合は

$b = f(a)$

となっている。このとき $f(x)$ は $x = a$ で

連続 であるという。

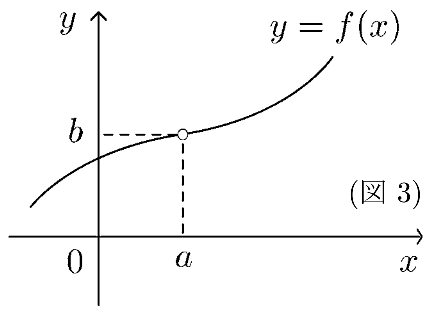


(図 2)

(2) 図 2 の場合は

$b \neq f(a) = c$

である。この場合も (∗) 式は成り立つ。



(図 3)

(3) 図 3 の場合は $x = a$ で $f(x)$ は定義されてない。(a は $f(x)$ の定義域にない)

しかし (∗) 式は成り立つ。前ページの例 3

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2 \qquad \left(f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \text{は } x = 1 \text{ で定義されてない} \right)$$

などの例がある。

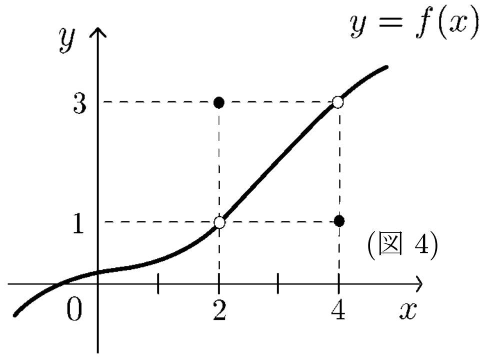
問 $y = f(x)$ のグラフが右の図 4 のような場合に

次の関数の値と極限値を求めよ。

$f(2) =$ 　　　　　　　　, 　$f(4) =$

$\lim_{x \to 2} f(x) =$

$\lim_{x \to 4} f(x) =$



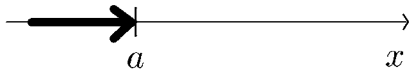
(図 4)

< 関数の極限 3 >

変数 x が a に近づくとき, 次の 2 つの場合を考える。

① a より小さい値をとりながら a に限りなく近づく場合に

$\boxed{x \to a - 0}$



と表し, a への **左側からの極限 (左極限)** という。

② a より大きい値をとりながら a に限りなく近づく場合に

$\boxed{x \to a + 0}$

と表し, a への **右側からの極限 (右極限)** という。

関数 $y = f(x)$ のグラフが図 1 のように, x が「a の左から a に近づいた場合 ($\dashrightarrow$)」と「a の右から a に近づいた場合 ($\leftarrow$)」とで $f(x)$ の極限値が異なる場合は

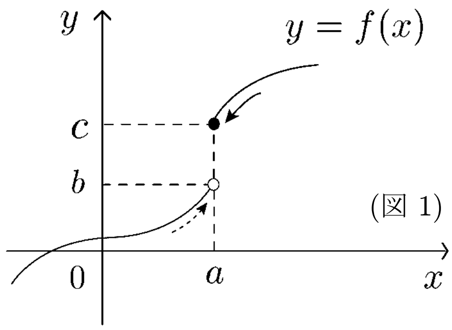
「$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ は存在しない」

という。図 1 の場合, 左極限と右極限は

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = b \ (\text{左極限})$$

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = c \ (\text{右極限})$$

となる。



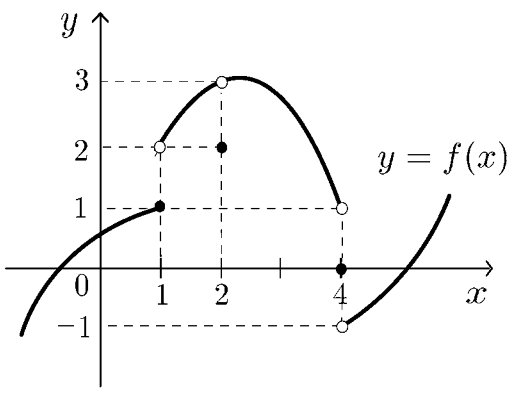
(図 1)

問 $y = f(x)$ のグラフが図 2 のような場合, 次の極限値を求めよ。

$\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) =$ 　　　　, $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to 2-0} f(x) =$ 　　　　, $\lim\limits_{x \to 2+0} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to 4-0} f(x) =$ 　　　　, $\lim\limits_{x \to 4+0} f(x) =$



< 関数の極限 4 >

関数 $f(x)$ に対し,「極限式 $\lim_{x\to a} f(x) = b$ が成り立つ」ということは「x がどのように a に近づいても $f(x)$ は b に近づく」ことを意味する。
従って「$\lim_{x\to a} f(x) = b$」であれば「左右の極限値が一致して b である」ことを意味する。ゆえに「$\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = b$」である。
逆に左右の極限値が一致すれば $\lim_{x\to a} f(x)$ も存在する。(証明は研究課題)。
従って

$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = b}$ と $\boxed{\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = b}$ は同じ。

例 前ページ問の場合

$\lim_{x\to 1-0} f(x) = 1,\quad \lim_{x\to 1+0} f(x) = 2$ 　より 　$\lim_{x\to 1} f(x)$ は存在しない。

$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2+0} f(x) = 3$ 　より 　$\lim_{x\to 2} f(x) = 3$

$\lim_{x\to 4-0} f(x) = 1,\quad \lim_{x\to 4+0} f(x) = -1$ 　より 　$\lim_{x\to 4} f(x)$ は存在しない。

(記法)

$x = 0$ のときの左極限 $\boxed{x \to 0-0}$ を $\boxed{x \to -0}$ と略記する。

$x = 0$ のときの右極限 $\boxed{x \to 0+0}$ を $\boxed{x \to +0}$ と略記する。

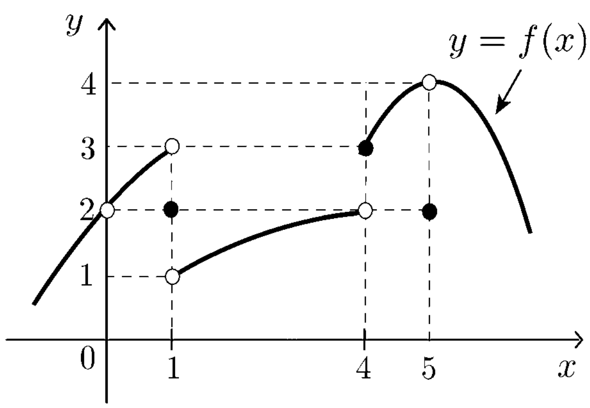
問 $y = f(x)$ のグラフが右図のような場合,
次の極限値を求めよ。また極限が
存在しない場合は, そのように記せ。

$\lim_{x\to -0} f(x)$ 　$\lim_{x\to +0} f(x)$ 　$\lim_{x\to 0} f(x)$

$\lim_{x\to 1-0} f(x)$ 　$\lim_{x\to 1+0} f(x)$ 　$\lim_{x\to 1} f(x)$

$\lim_{x\to 4-0} f(x)$ 　$\lim_{x\to 4+0} f(x)$ 　$\lim_{x\to 4} f(x)$

$\lim_{x\to 5-0} f(x)$ 　$\lim_{x\to 5+0} f(x)$ 　$\lim_{x\to 5} f(x)$

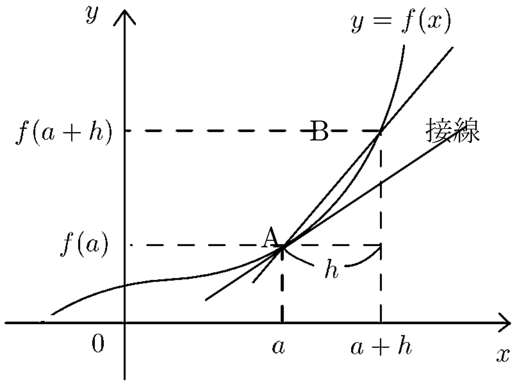


< 微分可能性 >

関数 $f(x)$ の定義域内の定数 a に対して, 極限値

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}} \qquad \Big(= f'(a)\Big)$$

が存在するとき, 関数 $f(x)$ は $x=a$ で **微分可能** であるという。
この極限値を $x=a$ における **微分係数** といい, $f'(a)$ で表す。
微分係数 $f'(a)$ の幾何学的な意味を説明する。
$h>0$ のとき $y=f(x)$ のグラフ上の 2 点
$\mathrm{A}(a, f(a)), \mathrm{B}(a+h, f(a+h))$ に対し, 2 点 AB
を通る直線の傾きは



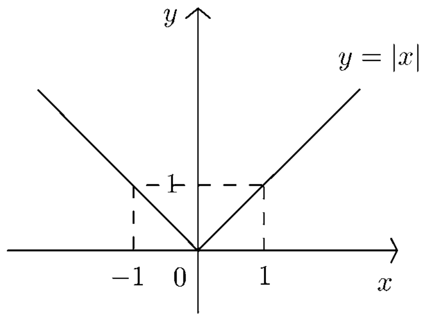
$$\text{AB の傾き} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

である。ここで h を 0 に近づけると, 点 B は 点 A に近づく, そのとき
直線 AB は曲線 $y=f(x)$ 上の点 A における接線に近づく。
このとき直線 AB の傾きは接線の傾きに近づくので

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}(\text{直線 AB の傾き})=\boxed{\text{接線の傾き}}$$

微分係数 $f'(a)$ は $x=a$ における **接線の傾き** を意味する。

例 (微分可能でない関数)
$f(x)=|x|$ (x の絶対値) は $x=0$ で微分可能でない。
$x>0$ のとき $|x|=x$ であるが, $x<0$ のときは $|x|=-x$
であるから $y=|x|$ のグラフは右図のようになる。
この場合, $x=0$ における微分係数 $f'(0)$ は存在しない。
なぜなら左右の極限値が



$$\text{左極限} = \lim_{h\to -0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{-h}{h}=-1$$

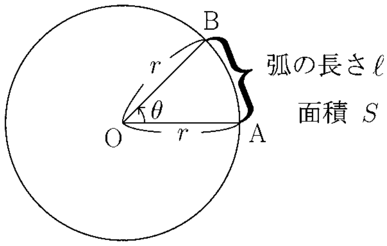
$$\text{右極限} = \lim_{h\to +0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{h}{h}=1$$

となって異なるので極限 $\displaystyle\lim_{h\to +0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ が存在しないからである。

問 例の場合の左極限値 -1 と右極限値 $+1$ は $y=|x|$ のグラフの何を意味するか？

< 弧度法の復習 >

中心角 θ，半径 r の扇形 OAB の弧の長さ ℓ と扇形 OAB の面積 S を求めたい。



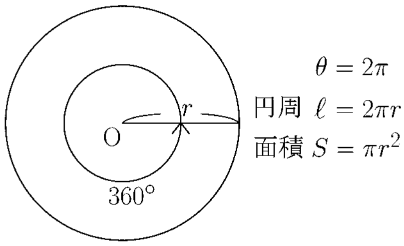
(1) $\theta = 2\pi$（ラジアン）$= 360^\circ$ のときは

ℓ は円周の長さだから

$\ell = 2\pi r$

であり S は円の面積だから

$S = \pi r^2$

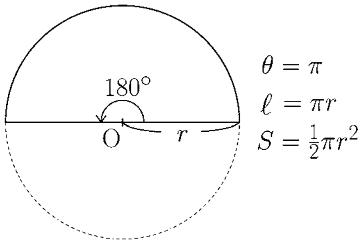


(2) $\theta = \pi$（ラジアン）$= 180^\circ$ のときは

(1) の半分であるから

$\ell = \pi r$

$S = \dfrac{1}{2}\pi r^2$



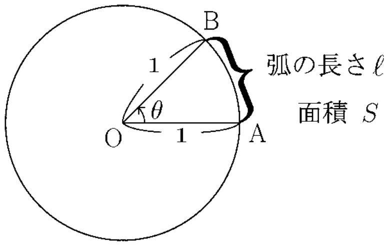
問 1 次の表を完成させよ。

度数法	$180^\circ/\pi$		60°	90°	120°		360°	
弧度法 θ	1	$\frac{\pi}{4}$				π		θ
弧の長さ ℓ		$\frac{1}{4}\pi r$				πr	$2\pi r$	
面積 S				$\frac{1}{4}\pi r^2$			πr^2	

問 2 上の表を参考にして，一般に角度が θ（ラジアン）で, 半径が $r = 1$ であるとき，弧の長さ ℓ と扇形 OAB の面積 S を θ を用いて表せ。

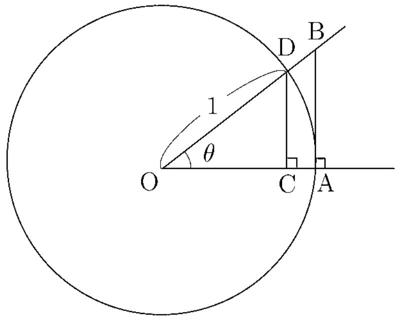
$\ell =$

$S =$



< 三角関数の極限 1 >

[定理] $\boxed{\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1}$



[証明] 次の不等式が成り立つ。

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\boxed{\sin\theta<\theta<\tan\theta}$ $(*)$

(これは右図のような中心 O，半径 1 の円 (OA=OD=1) で，
CD の長さ $=\sin\theta$，弧 AD の長さ $=\theta$，AB の長さ $=\tan\theta$ であり，
CD< 弧 AD<AB による。この不等式 $(*)$ の厳密な証明はワークブックの
ホームページで「数学小話」の中の「三角関数の極限について」に書いてある。)

$(*)$ 式より

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\boxed{\cos\theta<\dfrac{\sin\theta}{\theta}<1}$ $(**)$

が導かれる。ここで $\theta\to+0$ のときは

$$\lim_{\theta\to+0}\cos\theta \quad\leqq\quad \lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{\theta}\quad\leqq\quad 1$$

であり，$\cos 0=1$ より $\boxed{\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1}$ $(***)$

また $\theta\to-0$ のときは $\theta=-\theta_1$ とおくと $\theta_1\to+0$ だから

$$\lim_{\theta\to-0}\frac{\sin\theta}{\theta}=\lim_{\theta_1\to+0}\frac{\sin(-\theta_1)}{-\theta_1}=\lim_{\theta_1\to+0}\frac{-\sin\theta_1}{-\theta_1}=\lim_{\theta_1\to+0}\frac{\sin\theta_1}{\theta_1}=1$$

より $\boxed{\displaystyle\lim_{\theta\to-0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1}$ $(****)$

がわかる。$(***)$ と $(****)$ より定理が証明された。 (証明終)

問 $(*)$ から $(**)$ を導け。

< 三角関数の極限 2 >

前ページの結果より

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

が成り立つ。この極限の応用問題を練習する。

例 1 $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x \to 0} 2 \times \frac{\sin(2x)}{2x} = 2 \times 1 = 2$

例 2 $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1^2 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)}$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \frac{1}{1 + \cos x} = 1^2 \times \frac{1}{1 + \cos 0} = \frac{1}{2}$$

問 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{2x}$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$

(3) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$

< 三角関数の極限 3 >

前ページの結果より

① $\boxed{\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1}$, ② $\boxed{\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = 0}$

が成り立つ。

(注) ① は $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin h - \sin 0}{h} = 1$ とも書ける。これは $y = \sin x$ のグラフの $x = 0$ における接線の傾きが 1 であることを意味する。

② は $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - \cos 0}{h} = 0$ とも書ける。これは $y = \cos x$ のグラフの $x = 0$ における接線の傾きが 0 であることを意味する。

例 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+h\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{3}\cos h + \cos\frac{\pi}{3}\sin h - \sin\frac{\pi}{3}}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)(\cos h - 1) + \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)(\sin h)}{h} = \lim_{h\to 0}\left\{\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)\times\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)\times\frac{\sin h}{h}\right\}$$

$$= \left(\sin\frac{\pi}{3}\right)\times 0 + \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)\times 1 = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

問 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$

< 導関数 1 >

関数 $f(x)$ の定義域内のある領域を考える。$f(x)$ がその領域内の任意の値 a で微分可能であるとき、$f(x)$ はその領域で微分可能であるという。このとき、領域内の値 a に対して微分係数 $f'(a)$ を対応させる関数を、$f(x)$ の**導関数**といい、$\boldsymbol{f'(x)}$ で表す。導関数 $f'(x)$ は次式で定義される。

$$\boxed{f'(x) \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}} \qquad \text{(導関数の定義)}$$

例 1　$f(x)=1$ のとき

$$f'(x) \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1-1}{h} = 0$$

例 2　$f(x)=x^3$ の導関数を定義に従って求める。

$$\begin{aligned} f'(x) \;&=\; \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} \\ &=\; \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}\left(3x^2+3xh+h^2\right) = 3x^2 \end{aligned}$$

問　$f(x)$ が次の各場合に、導関数の定義に従って (極限の計算で) 導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(1)　$f(x)=2$

$f'(x)=$

(2)　$f(x)=x$

$f'(x)=$

(3)　$f(x)=x^2$

$f'(x)=$

＜導関数 2＞

$(a+b)^n$ の展開公式の係数を右のように並べたものをパスカルの三角形という。

$(a+b)^0=1$ ······································· 1

$(a+b)^1=a+b$ ································· 1　1

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ························· 1　2　1

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ ················ 1　3　3　1

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ ········ 1　4　6　4　1

$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$ ······ 1　5　10　10　5　1

問 1　$f(x)$ が次の各場合に、導関数の定義 $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ にしたがって、導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(1) $f(x)=x^4$

$f'(x)=$

(2) $f(x)=x^5$

$f'(x)=$

問 2　自然数 n に対し $f(x)=x^n$ とする。問 1 の結果から $f'(x)$ を類推せよ。

< 導関数 3 >

例　$f(x) = \sqrt{x}$ の導関数を定義に従って求める。

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right) \times \left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}{h \times \left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(注)　関数 $f(x)$ からその関数 $f'(x)$ を求めることを、$f(x)$ を**微分する**という。

問　次の関数を、定義に従って微分せよ。

(1)　$f(x) = \sqrt{x+1}$

(2)　$f(x) = \dfrac{1}{x}$

＜導関数 4＞

例　P25 で把握したように $f(x) = x^n$ の導関数は $f'(x) = nx^{n-1}$ である。これを

$$(*) \quad \boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$$

と略記する。

また 2 つの微分可能な関数 $f(x), g(x)$ および定数 k に対して次の式が成立する。

1. $\{kf(x)\}' = kf(x)$　　　(k は定数)
2. $\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$
3. $\{f(x) - g(x)\}' = f'(x) - g'(x)$

＜1 の証明＞

$$\{kf(x)\}' = \lim_{h\to 0} \frac{\{kf(x+h)\} - \{kf(x)\}}{h} = \lim_{h\to 0} k \times \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k \times f'(x)$$

＜2 の証明＞

$$\begin{aligned}\{f(x) + g(x)\}' &= \lim_{h\to 0} \frac{\{f(x+h) + g(x+h)\} - \{f(x) + g(x)\}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\} = f'(x) + g'(x)\end{aligned}$$

問 1　公式 3 を証明せよ。

例　$\{4x^3 + 5\}' = (4x^3)' + (5)' = 4 \times (x^3)' + 0 = 4 \times 3x^2 = 12x^2$

(注)　定数を微分すると 0 になる。

問 2　公式 $(*)$ と 1〜2 を用いて次の関数を微分せよ。

(1)　$x^5 + 4$

(2)　$2x^6 - 3x^3$

(3)　$(x - 1)^2$

(4)　$(x + 1)(x^2 - x)$

< 積の微分 1 >

$f(x), g(x)$ が共に微分可能であるとき, 次の公式が成り立つ。

$$\boxed{\{f(x) \times g(x)\}' = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)}$$ （積の微分）

問 1 積の微分の公式を証明せよ。

例 1 $\{(x^2-3)(4x^2+5)\}' = (x^2-3)' \times (4x^2+5) + (x^2-3) \times (4x^2+5)'$
$= 2x \times (4x^2+5) + (x^2-3) \times 8x = 16x^3 - 14x$

例 2 $\{(x+1)^2\}' = \{(x+1)(x+1)\}' = (x+1)' \times (x+1) + (x+1) \times (x+1)' = 2(x+1)$

問 2 次の関数を微分せよ。

(1) $(x-1)(x^2+1)$

(2) $(x^2+1)(x^2-4x)$

(3) $(x+1)^3$

(4) $(x+1)^4$

< 積の微分 2 >

問 1　26 ページ例の結果より $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ である。これと積の微分を用いて次式を微分せよ。ただし k は定数とする。

(1)　$x\sqrt{x}$

(2)　$k\sqrt{x}$

問 2　積の微分公式 $\bigl(f(x) \times g(x)\bigr)' = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$ を用いて，定数倍の微分公式 $\bigl(k \times f(x)\bigr)' = k \times f'(x)$ を証明せよ。ここで k は定数とする。

問 3　$f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ がともに微分可能であるとき，3 つの積の導関数を $f'(x)$, $g'(x)$, $h'(x)$, $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ を用いて表せ。

$\bigl(f(x)g(x)h(x)\bigr)' =$

< 商の微分 >

微分可能な 2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ の商の導関数について, 次の公式が成り立つ。

1. $\boxed{\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}}$

2. $\boxed{\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}}$

問 1 1 を証明せよ。

問 2 $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \dfrac{1}{g(x)}$ であることと上記 1 と積の微分公式を用いて 2 を証明せよ。

例 (1) $\left(\dfrac{1}{x^3}\right)' = -\dfrac{(x^3)'}{(x^3)^2} = -\dfrac{3x^2}{x^6} = -\dfrac{3}{x^4}$

(2) $\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)' = \dfrac{(x^2)' \times (x-1) - x^2 \times (x-1)'}{(x-1)^2} = \dfrac{2x(x-1) - x^2 \times 1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

問 3 次の関数を微分せよ。

(1) $\dfrac{1}{x^2}$

(2) $\dfrac{1}{2x^2}$

(3) $\dfrac{x+1}{x^2}$

(4) $\dfrac{x^3}{x+1}$

< 三角関数の微分 >

次が成り立つ.

1. $\boxed{(\sin x)' = \cos x}$　　2. $\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$

3. $\boxed{(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}}$

[1 と 2 の証明]　23 ページの結果より得られる。

$$(\sin x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$$

$$(\cos x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\sin x$$

問 1　1 と 2 の結果と商の微分公式を用いて，3 を証明せよ。

問 2　次の関数を微分せよ.

(1)　$3\sin x + 4\cos x$　　(2)　$-3\cos x + 5\tan x$

(3)　$\sin x \cos x$　　(4)　$\sin^2 x$

(5)　$\cos^2 x$　　(6)　$x \tan x$

(7)　$\dfrac{\sin x}{x}$　　(8)　$\dfrac{\cos x}{x}$

問 3　次の導関数を計算し，結果を $\sin x$ または $\cos x$ を用いてあらわせ.

(1)　$\mathrm{cosec}\ x = \dfrac{1}{\sin x}$

(2)　$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

(3)　$\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$

＜微分の練習 1＞

問 1 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h}$

問 2 $y = f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の定義を書け。

問 3 次の関数を導関数の定義に従って微分せよ。

(1) $f(x) = 1$, $f'(x) =$

(2) $f(x) = x^3$, $f'(x) =$

(3) $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) =$

問 4 積の微分の公式 $\{f(x)\times g(x)\}' = f'(x)\times g(x) + f(x)\times g'(x)$ を証明せよ。

問 5 次の関数を微分せよ。

(1) $4x^3 + 6x^5 - 18$

(2) $(x-1)(x^2+1)$

(3) $5\sin x + 6\cos x$

(4) $3\sin x - 4\tan x$

(5) $x^2\sin x$

(6) $x^3\cos x$

(7) $\sin^2 x$

(8) $\dfrac{1}{x+1}$

(9) $\dfrac{x}{x+1}$

(10) $\dfrac{\sin x}{x}$

＜微分記号＞

関数 $y = f(x)$ の導関数の定義は

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

である。導関数を

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$$

等の記号で表す (全て同じ意味である)。$\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df}{dx}$ 等の記号は，変数が x である関数の導関数 (x についての微分) であることを明記するためにある。変数が x 以外の文字でも同様である。例えば変数 u の関数 $y = f(u)$ の導関数を

$$y' = f'(u) = \lim_{h \to 0} \frac{f(u+h) - f(u)}{h} = \frac{dy}{du} = \frac{df}{du} = \frac{d}{du} f(u)$$

等の記号で表す。

例

$y = x^5 - 3x^2$ のとき　$\dfrac{dy}{dx} = 5x^4 - 6x$

$s = u^5 - 3u^2$ のとき　$\dfrac{ds}{du} = 5u^4 - 6u$

$k = t^5 - 3t^2$ のとき　$\dfrac{dk}{dt} = 5t^4 - 6t$

例 2

$\dfrac{d}{dx} \sin x = \cos x$

$\dfrac{d}{du} \sin u = \cos u$

$\dfrac{d}{dt} \sin t = \cos t$

問 1　次の関数の導関数を求めよ。

(1) $y = x^3 - 4x^2 + 5$　　$\dfrac{dy}{dx} =$

(2) $y = \cos u$　　$\dfrac{dy}{du} =$

(3) $\ell = 3t^2 - 2t$　　$\dfrac{d\ell}{dt} =$

(4) $S = \pi r^2$　　$\dfrac{dS}{dr} =$

(5) $V = \dfrac{4}{3} \pi r^3$　　$\dfrac{dV}{dr}$

問 2　次の導関数を求めよ。

(1) $\dfrac{d}{dx} x^5$

(2) $\dfrac{d}{dt} (t^7 - 5t^4)$

(3) $\dfrac{d}{du} (\sqrt{u})$

(4) $\dfrac{d}{dt} \cos t$

(5) $\dfrac{d}{du} \tan u$

(6) $\dfrac{d}{du} \sin u \cos u$

＜微分と極限 1＞

関数 $f(x)$ の導関数の極限による定義式は

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

である。変数が x でなく，他の文字でも同様である。

$$f'(t) = \frac{d}{dt}f(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

$$f'(u) = \frac{d}{du}f(u) = \lim_{h \to 0} \frac{f(u+h) - f(u)}{h}$$

例

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(t+h)^4 - t^4}{h} = \frac{d}{dt}(t^4) = 4t^3$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(u+h) - \sin u}{h} = \frac{d}{du}(\sin u) = \cos u$$

問　次の極限値を微分の公式を使って求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^5 - x^5}{h}$

(2) $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{\sin(t+h) - \sin t}{h}$

(3) $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{\cos(u+h) - \cos u}{h}$

(4) $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{\tan(r+h) - \tan r}{h}$

＜微分と極限 2＞

関数 $f(x)$ の導関数の極限による定義式は次式で与えられる。

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\ell \to 0} \frac{f(x+\ell) - f(x)}{\ell}$$

ここで，0 へ収束する変数は h だけでなく ℓ でも良いし，他の文字を使っても良い。

例

(1) $\displaystyle \lim_{\ell \to 0} \frac{\sin(x+\ell) - \sin x}{\ell} = \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

(2) $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{\cos(t+h) - \cos t}{h} = \frac{d}{dt}(\cos t) = -\sin t$

(3) $\displaystyle \lim_{r \to 0} \frac{\tan(u+r) - \tan u}{r} = \frac{d}{du}(\tan u) = \frac{1}{\cos^2 u}$

問　次の極限値を微分の公式を使って求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{\ell \to 0} \frac{\cos(x+\ell) - \cos x}{\ell}$

(2) $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{\sin(u+h) - \sin u}{h}$

(3) $\displaystyle \lim_{r \to 0} \frac{(u+r)^4 - u^4}{r}$

(4) $\displaystyle \lim_{v \to 0} \frac{(t+v)^6 - t^6}{v}$

(5) $\displaystyle \lim_{\ell \to 0} \frac{\tan(t+\ell) - \tan t}{\ell}$

< 合成関数の微分 1 >

2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ の合成関数 $f(g(x))$ の導関数は $u = g(x)$ とおくと

$$\boxed{\frac{d}{dx}f(g(x)) = \left\{\frac{d}{du}f(u)\right\} \times \left\{\frac{d}{dx}g(x)\right\}}$$

で計算される。

< 証明 >

$u = g(x)$,　　$g(x+h) - g(x) = \ell$ とおくと

$h \to 0$ のとき $\ell \to 0$ であり，$g(x+h) = g(x) + \ell = u + \ell$ より

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(u+\ell) - f(u)}{\ell} \times \frac{\ell}{h}$$

$$= \lim_{\ell\to 0}\frac{f(u+\ell) - f(u)}{\ell} \times \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \left\{\frac{d}{du}f(u)\right\} \times \left\{\frac{d}{dx}g(x)\right\}$$

(証明終)

例　$\sin(x^3)$ の導関数を求めたい。$u = x^3$ とおくと

$$\frac{d}{dx}\sin(x^3) = \left\{\frac{d}{du}\sin u\right\} \times \left\{\frac{d}{dx}x^3\right\} = \cos(u) \times 3x^2 = 3x^2\cos(x^3)$$

問　次の導関数を求めよ。

(1) $\dfrac{d}{dx}\cos(x^4)$

(2) $\dfrac{d}{dx}\tan(x^5)$

< 合成関数の微分 2 >

$$\boxed{\frac{d}{dx}f(g(x)) = \left\{\frac{d}{du}f(u)\right\} \times \left\{\frac{d}{dx}g(x)\right\}} \qquad \Big(\text{ただし } u = g(x)\Big)$$

例 1　$\sin(4x+3)$ の導関数を求めたい。$u = 4x+3$ とおくと

$$\frac{d}{dx}\sin(4x+3) = \left\{\frac{d}{du}\sin u\right\} \times \left\{\frac{d}{dx}(4x+3)\right\} = \cos(u) \times 4$$

$$= 4\cos u = 4\cos(4x+3)$$

例 2　$\cos(x^2+x^3)$ の導関数を求めたい。$u = x^2+x^3$ とおくと

$$\frac{d}{dx}\cos(x^2+x^3) = \left\{\frac{d}{du}\cos u\right\} \times \left\{\frac{d}{dx}(x^2+x^3)\right\} = -\sin(u) \times (2x+3x^2)$$

$$= -(2x+3x^2)\sin u = -(2x+3x^2)\sin(x^2+x^3)$$

問　次の関数を微分せよ。

(1) $\sin(5x)$

(2) $\cos(7x)$

(3) $\sin(4x-5)$

(4) $\cos(2x+3)$

(5) $\tan(8x-7)$

(6) $\sin(x^3+2x^4)$

< 合成関数の微分 3 >

合成関数 $f(g(x))$ の微分公式

$$(*) \quad \boxed{\frac{d}{dx}f(g(x)) = \left\{\frac{d}{du}f(u)\right\} \times \left\{\frac{d}{dx}g(x)\right\}} \qquad (\text{ただし } u = g(x))$$

は，$y = f(g(x)),\quad u = g(x)$ とおくと $f(u) = y$ より

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = \frac{dy}{dx} \quad , \quad \frac{d}{du}f(u) = \frac{dy}{du} \quad , \quad \frac{d}{dx}g(x) = \frac{du}{dx}$$

と書ける。従って，公式 $(*)$ は

$$(*)' \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}}$$

と書きなおせる。この $(*)'$ 式の方がおぼえやすい。

例　$y = (x^3 + 5x^2)^7$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めたい。$u = x^3 + 5x^2$ とおくと，$y = u^7$ より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \left\{\frac{d}{du}(u^7)\right\} \times \left\{\frac{d}{dx}(x^3 + 5x^2)\right\} = (7u^6) \times (3x^2 + 10x)$$

$$= 7(3x^2 + 10x)u^6 = 7(3x^2 + 10x)(x^3 + 5x^2)^6$$

問　次の関数を微分せよ。

(1) $y = (3x + 4)^5$　　$\dfrac{dy}{dx} =$

(2) $y = (4x - 5)^{10}$　　$\dfrac{dy}{dx} =$

(3) $y = (x^2 + 3x)^6$　　$\dfrac{dy}{dx} =$

(4) $y = \cos(x^2 - 3x)$　　$\dfrac{dy}{dx} =$

< 微分の練習 2 >

問 1　次の導関数を求めよ。ただし n は自然数である。

(1) $\dfrac{d}{dx}(4x^5 - 7x^9 + 12)$　　(2) $\dfrac{d}{dt}(4t^2 - 8t + 5)$

(3) $\dfrac{d}{du}(\sin u)$　　(4) $\dfrac{d}{du}(\cos u)$

(5) $\dfrac{d}{du}(\tan u)$　　(6) $\dfrac{d}{du}(u^n)$

問 2　合成関数の微分法を用いて次の導関数を求めよ。

(1) $\sin(x^2)$　　(2) $\cos(x^3)$

(3) $\tan(x^4)$　　(4) $\sin(4x)$

(5) $\cos(5x)$　　(6) $\tan(6x)$

(7) $\sin(2x - 3)$　　(8) $\cos(3x + 5)$

(9) $\tan(7x + 6)$　　(10) $\sin(x^2 + 2x)$

(11) $(3x + 4)^6$　　(12) $(4x - 3)^7$

(13) $(5x + 8)^{10}$　　(14) $(x^2 - 3x)^5$

(15) $(1 + \sin x)^8$　　(16) $(2 + \cos x)^9$

問 3　合成関数の微分法と積の微分法を用いて，次の関数を微分せよ。

(1) $x^2 \sin(4x)$　　(2) $x^3 \cos(5x)$

(3) $\sin(2x) \cos(3x)$

＜ネピアの数＞

a を 1 でない正の数とするとき，対数関数 $\log_a x$ の導関数を求めたい。導関数の定義

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ に従って計算する。

$$(\log_a x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

ここで $\dfrac{h}{x} = \ell$ とおくと $h \to 0$ のとき $\ell \to 0$ より

$$(\log_a x)' = \lim_{\ell\to 0}\frac{1}{x\ell}\log_a(1+\ell) = \lim_{\ell\to 0}\frac{1}{x}\log_a(1+\ell)^{\frac{1}{\ell}}$$

となる。そこで $\ell \to 0$ のときの $(1+\ell)^{\frac{1}{\ell}}$ の極限を調べてみる。ℓ に 0.1，0.01，0.001，0.0001，$\cdots$ および −0.1，−0.01，−0.001，−0.0001，$\cdots$ を代入して，$(1+\ell)^{\frac{1}{\ell}}$ の値を計算すると，次の表が得られる。

ℓ	$(1+\ell)^{\frac{1}{\ell}}$		ℓ	$(1+\ell)^{\frac{1}{\ell}}$
0.1	$2.59342\cdots$		-0.1	$2.867971\cdots$
0.01	$2.704813\cdots$		-0.01	$2.731999\cdots$
0.001	$2.716923\cdots$		-0.001	$2.719642\cdots$
0.0001	$2.718145\cdots$		-0.0001	$2.718417\cdots$
0.00001	$2.718268\cdots$		-0.00001	$2.718295\cdots$

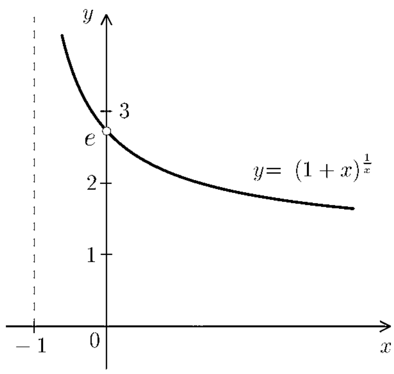
この表から予想されるように，$\ell \to 0$ のとき $(1+\ell)^{\frac{1}{\ell}}$ は一定の値に近づく。この極限値を $\boldsymbol{e}$ で表す。

$$\boldsymbol{e = \lim_{\ell\to 0}(1+\ell)^{\frac{1}{\ell}}}$$

$\boldsymbol{e}$ は無理数で，その値は

$$\boldsymbol{e = 2.71828182845\cdots}$$

であることが知られている。$\boldsymbol{e}$ を**ネピアの数**または**自然対数の底**という。右図は $\boldsymbol{y = (1+x)^{\frac{1}{x}}}$ のグラフである。



問　次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$　　(2) $\lim_{x\to +0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$　　(4) $\lim_{\ell\to 0}\dfrac{1}{\ell}\log_a(1+\ell)$

< 対数関数の導関数 >

例　関数 $f(x) = \log_{10} x$ の微分係数 $f'(2)$ を求めたい。定義から

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\log_{10}(2+h) - \log_{10} 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log_{10}\left(\frac{2+h}{2}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log_{10}\left(1 + \frac{h}{2}\right)$$

ここで　$\dfrac{h}{2} = \ell$ とおくと，$h \to 0$ のとき $\ell \to 0$ より

$$f'(2) = \lim_{\ell \to 0} \frac{1}{2\ell} \log_{10}(1+\ell) = \lim_{\ell \to 0} \frac{1}{2} \log_{10}(1+\ell)^{\frac{1}{\ell}} = \frac{1}{2} \log_{10} e$$

(注) ここで前のページの結果 $\displaystyle\lim_{\ell \to 0}(1+\ell)^{\frac{1}{\ell}} = e$ を使った。

問 1　例と同じ関数 $f(x) = \log_{10} x$ の微分係数 $f'(3)$ と導関数 $f'(x)$ を例と同様な極限計算で求めよ。

(1) $f'(3) =$

(2) $f'(x) =$

問 2　a を 1 でない正の数とする。$f(x) = \log_a x$ の導関数 $f'(x)$ を例と同様な極限計算で求めよ。

$f'(x) =$

＜ 自然対数 ＞

問 1　前ページの問の結果を用いて次の対数関数の導関数を求めよ。(ただし $a > 0,\ a \neq 1$)

(1) $(\log_{10} x)' =$　　　　(2) $(\log_a x)' =$

問 2　底が e(ネピアの数 $\fallingdotseq 2.718$) である対数関数 $\log_e x$ の導関数を求め，できるだけ簡単にせよ。

(答) $(\log_e x)' =$

底がネピアの数 e である対数 $\log_e x$ を**自然対数**と呼び，底を省略する。

$$\boxed{\log_e x = \log x} \quad (\text{自然対数})$$

今後底を省略した対数 $\log x$ は必ず自然対数を意味する。
(注) 常用対数 $\log_{10} x$ と区別するため，自然対数を $\ln x$ と書くこともある。

例　$\log(\sqrt{e}) = \log_e(\sqrt{e}) = \log_e(e^{\frac{1}{2}}) = \dfrac{1}{2}$　　　$\ln\sqrt{e} = \log_e\sqrt{e} = \dfrac{1}{2}$

$\log\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = \log_e\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = \log_e(e^{-2}) = -2$　　　$\ln\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = \log_e\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = -2$

問 3　次の自然対数の値を求めよ。

(1) $\log e$　　(2) $\log(\sqrt[3]{e})$　　(3) $\log\left(\dfrac{1}{e}\right)$　　(4) $\log 1$

(5) $\ln\left(\dfrac{1}{e}\right)$　　(6) $\ln(\sqrt[4]{e})$　　(7) $\ln(e)$　　(8) $\ln(e\sqrt{e})$

問 4　問 2 の結果を使って自然対数の導関数を求めよ。

$(\log x)' =$

$(\ln x)' =$

問 5　$y = \log x$ のグラフを書け

< $\log f(x)$ の導関数 >

例　関数 $y = \log(x^2 + 3x + 4)$ の導関数を求めたい。

$u = x^2 + 3x + 4$　とおくと　$y = \log u$　となる。

合成関数の微分法より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(\log u) \times \frac{d}{dx}(x^2 + 3x + 4) = (\log u)' \times (x^2 + 3x + 4)'$$

$$= \frac{1}{u} \times (2x + 3) = \frac{1}{x^2 + 3x + 4} \times (2x + 3) = \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 4}$$

問 1　例にならって，次の関数の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求める。

(1)　$y = \log(x^3 + 2x - 5)$

$\dfrac{dy}{dx} =$

(2)　$y = \log(1 + \sin x)$

$\dfrac{dy}{dx} =$

(3)　$y = \log(5 - \cos x)$

$\dfrac{dy}{dx} =$

問 2　上の結果から，一般の場合を類推する。関数 $f(x)$ に対し合成関数 $y = \log\big(f(x)\big)$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx} = \Big(\log\big(f(x)\big)\Big)'$ を $f(x)$ と $f'(x)$ で表せ。

(答)　$\boxed{\Big(\log\big(f(x)\big)\Big)' = \qquad\qquad}$

例 2　$\Big(\log(\cos x)\Big)' = \dfrac{(\cos x)'}{\cos x} = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$

問 3　問 2 の結果を用いて次の導関数を求めよ。

(1) $\Big(\log(x^2 + 2x)\Big)'$

$=$

(2) $\Big(\log(x^6 + 3x^4)\Big)'$

$=$

(3) $\Big(\log(\sin x)\Big)'$

$=$

＜ 指数関数の導関数 1 ＞

40 ページの結果から

$$\boxed{\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e} \qquad \cdots ①$$

である。この極限式①より

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1} \qquad \cdots ②$$

が導かれる。

＜②式の証明の概略＞

①式より $h\fallingdotseq 0$ のとき $e\fallingdotseq(1+h)^{\frac{1}{h}}$

である。両辺を h 乗すると

$$h\fallingdotseq 0 \text{ のとき } e^h\fallingdotseq 1+h$$

だから $h\fallingdotseq 0$ のとき $\dfrac{e^h-1}{h}\fallingdotseq 1$

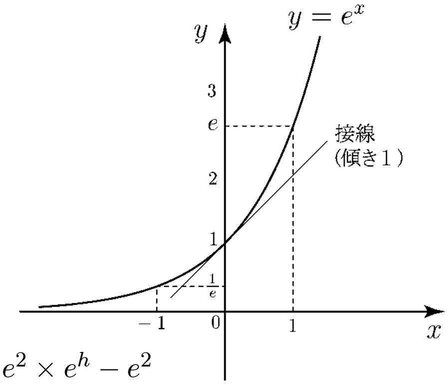
より②式が導かれる。

(注) 指数関数 $f(x)=e^x$ に対し,

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-e^0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$$

より，曲線 $y=e^x$ の $x=0$ における接線の

傾きが $f'(0)=1$ であることが②式からわかる。



例　$f(x)=e^x$ に対し

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{2+h}-e^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^2\times e^h-e^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}e^2\times\frac{e^h-1}{h}=e^2\times 1=e^2$$

問　$f(x)=e^x$ に対し，微分係数 $f'(3)$ および導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(1) $f'(3)=$

(2) $f'(x)=$

＜指数関数の導関数 2＞

前のページの結果より，ネピアの数 e を底とする指数関数 $f(x)=e^x$ の導関数は $f'(x)=e^x$ である。すなわち

$$\boxed{\frac{d}{dx}e^x = e^x}$$

このように微分しても変わらない関数は e^x の定数倍だけである。そこでこの指数関数を特に $e^x = \mathrm{EXP}(x)$ という記号で表すことがある。

例 1　$y=e^{x^2}$ の導関数を求めたい。$u=x^2$ とおくと $y=e^u$ より合成関数の微分法から

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=\left\{\frac{d}{du}e^u\right\}\times\left\{\frac{d}{dx}(x^2)\right\}=e^u\times 2x=2xe^{x^2}$$

問 1　次の関数を微分せよ。ただし a，K は定数である。

(1) $y=e^{2x}$　　$\dfrac{dy}{dx}=$

(2) $y=e^{-3x}$　　$\dfrac{dy}{dx}=$

(3) $y=e^{2x-1}$　　$\dfrac{dy}{dx}=$

(4) $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$　　$\dfrac{dy}{dx}=$

(5) $y=e^{Kx}$　　$\dfrac{dy}{dx}=$

(6) $y=e^{x\log a}$　　$\dfrac{dy}{dx}=$

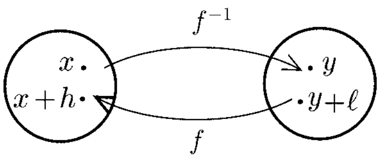
問 2　$a>0,\ a\neq 1$ とする。このとき等式 $a=e^{\log a}$ が成立する。ただし $\log a=\log_e a$ は自然対数である。この等式を用いて，一般の指数関数 $y=a^x$ の導関数を求めよ。

< 逆関数の微分 1 >

関数 $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ の導関数は次式で与えられる。

$$(*)\quad \boxed{\frac{d}{dx}\{f^{-1}(x)\} = \frac{1}{\frac{d}{dy}\{f(y)\}}} \qquad (\text{ただし } y = f^{-1}(x))$$

＜証明＞



$y = f^{-1}(x),\ y + \ell = f^{-1}(x+h)$ とおくと

$f(y) = x,\ f(y+\ell) = x + h$ であり

$h \to 0$ のとき $\ell = f^{-1}(x+h) - f^{-1}(x) \to 0$ だから

$$\frac{d}{dx}\{f^{-1}(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(x+h) - f^{-1}(x)}{h} = \lim_{\ell\to 0}\frac{y+\ell-y}{f(y+\ell)-f(y)}$$

$$= \lim_{\ell\to 0}\frac{1}{\frac{f(y+\ell)-f(y)}{\ell}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}\{f(y)\}} \qquad (\text{証明終})$$

(注) $y = f^{-1}(x)$ とおくと $x = f(y)$ であり $\dfrac{d}{dx}f^{-1}(x) = \dfrac{dy}{dx},\ \dfrac{d}{dy}f(y) = \dfrac{dx}{dy}$ より上の公式で $(*)$ は次式 $(**)$ のように書ける。この $(**)$ 式の方が覚えやすい

$$(**)\quad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}} \qquad (\text{逆関数の微分公式})$$

例　$y = \sqrt[3]{x}$ の導関数を求めたい。$x = y^3$ より

$$\frac{d}{dx}(\sqrt[3]{x}) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}(y^3)} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

問　次の導関数を求めよ。

(1) $y = \sqrt{x}$　　(2) $y = \sqrt[4]{x}$

< 逆関数の微分 2 >

例　逆三角関数 $y = \sin^{-1} x$ の導関数を求めたい。$x = \sin y$ より

$$\frac{d}{dx}\left\{\sin^{-1}(x)\right\} = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}\{\sin y\}} = \frac{1}{\cos y}$$

ここで $\cos^2 y + \sin^2 y = 1 \Rightarrow \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$ より

(答)　$\underline{\dfrac{d}{dx}\{\sin^{-1}(x)\} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

問 1　$y = \cos^{-1}(x)$ の導関数を求めよ。

$$\frac{d}{dx}\{\cos^{-1}(x)\} =$$

問 2　$y = \tan^{-1} x$ の導関数を求めよ。

$$\frac{d}{dx}\{\tan^{-1}(x)\} =$$

(ヒント)

$$\frac{1}{\cos^2 y} = \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y$$

< 対数微分法 1 >

一般の関数 $y=f(x)$ に対し，自然対数との合成関数 $\log y=\log(f(x))$ の導関数は (43 ページの結果より)

$$(\log(f(x)))'=\frac{f'(x)}{f(x)} \text{ であるから，} (\log y)'=\frac{y'}{y}$$

例　指数関数 $y=2^x$ の導関数 y' を求めたい。両辺の自然対数をとると

$$\log y=\log(2^x)=x\log 2$$

である。両辺を x で微分すると ($x'=1$ より)

$$\frac{y'}{y}=\log 2$$

となるから

$$y'=y\times\log 2=2^x\log 2$$

(注)　両辺の自然対数をとってから微分する方法を**対数微分法**という。

問 1　$y=3^x$ の導関数 y' を対数微分法で求めよ。

(解)

問 2　$a>0$ ($a\neq 1$) に対し、$y=a^x$ の導関数 y' を対数微分法で求めよ。

(解)

問 3　$y=x^x$ の導関数 y' を対数微分法で求めよ。

< 対数微分法 2 >

例　$y = x^{\frac{3}{2}}$ $\left(= \sqrt{x^3}\right)$ の導関数を対数微分法で求める。

$$y = x^{\frac{3}{2}}$$

両辺の自然対数をとる。

$$\log y = \log\left(x^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2}\log x$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{x}$$

より

$$y' = \frac{3}{2} \times \frac{1}{x} \times y = \frac{3}{2} \times \frac{1}{x} \times x^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \times x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \ \left(= \frac{3}{2}\sqrt{x}\right)$$

であるから

$$\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

問 1　$y = x^{\frac{4}{3}}$ $\left(= \sqrt[3]{x^4}\right)$ の導関数を対数微分法で求めよ。

(解)

(答)　$\left(x^{\frac{4}{3}}\right)' =$

問 2　一般の実数 r に対し，関数 $y = x^r$ の導関数を対数微分法で求めよ。

(解)

(答)　$(x^r)' =$

< x^r の導関数 >

前のページより任意の実数 r に対し,

$$\boxed{(x^r)' = rx^{r-1}}$$

が成り立つ。

例 1　$y = \sqrt[3]{x^5}$ の導関数を求めたい。分数指数の定義 $\boxed{\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{m}{n}}}$ から

$$\left(\sqrt[3]{x^5}\right)' = \left(x^{\frac{5}{3}}\right)' = \frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1} = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$$

問 1　次の導関数を求め，結果を根号 ($\sqrt{\quad}$, $\sqrt[n]{\quad}$ 等) で表せ。

(1) $\left(\sqrt[4]{x^5}\right)' =$　　(2) $\left(\sqrt[5]{x^7}\right)' =$　　(3) $\left(\sqrt{x^3}\right)' =$

例 2　$y = \dfrac{1}{x^2}$ の導関数を求めたい。負の指数の定義 $\boxed{\dfrac{1}{x^n} = x^{-n}}$ から

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -2 \times \frac{1}{x^3} = -\frac{2}{x^3}$$

問 2　次の導関数を求め，結果を分数の形にせよ。

(1) $\left(\dfrac{1}{x^3}\right)' =$　　(2) $\left(\dfrac{1}{x^4}\right)' =$　　(3) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' =$

例 3　$(\sqrt[3]{x})' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

問 3　次の導関数を求め，結果を例 3 のように根号で表せ。

(1) $(\sqrt[4]{x})' =$　　(2) $\left(\sqrt[5]{x^4}\right)' =$　　(3) $(\sqrt{x})' =$

例 4　$\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\dfrac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1} = -\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}+1}} = -\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$

(注)　$\sqrt[3]{x^4} = x\sqrt[3]{x}$

問 4　次の導関数を求め，結果を例 4 のように根号で表せ。

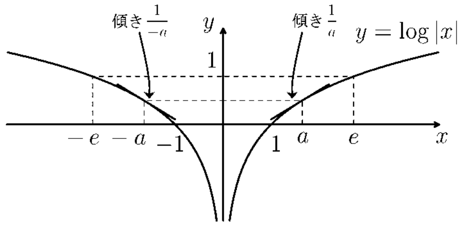
(1) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)' =$　　(2) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)' =$　　(3) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)' =$

$<\log|x|$ の導関数 $>$

例 1　関数 $y=\log|x|$ を考える。
絶対値の定義から，$a>0$ に対し

$$\log|-a|=\log a=\log|a|$$

より，$y=\log|x|$ のグラフは右図のように y 軸対称となる。
この導関数は



(1) $x>0$ のとき $|x|=x$ より $y'=(\log x)'=\dfrac{1}{x}$

(2) $x<0$ のとき $|x|=-x$ より $y'=(\log|x|)'=(\log(-x))'=\dfrac{(-x)'}{-x}=\dfrac{-1}{-x}=\dfrac{1}{x}$

(1), (2) より $x\neq 0$ のとき

$$\boxed{(\log|x|)'=\frac{1}{x}}$$

となる。

例 2　関数 $y=\log|\cos x|$ を微分したい。
$u=\cos x$ とおくと $y=\log|u|$
より合成関数の微分法を使うと

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=(\log|u|)'\times(\cos x)'=\frac{1}{u}\times(-\sin x)=\frac{1}{\cos x}\times(-\sin x)$$

$$=-\frac{\sin x}{\cos x}=-\tan x$$

問　次の関数の導関数を求めよ。

(1) $y=\log|\tan x|$ ，$\dfrac{dy}{dx}=$

(2) $y=\log|x^2+3x|$ ，$\dfrac{dy}{dx}=$

(3) $y=\log|f(x)|$ ，$\dfrac{dy}{dx}=$

< 微分の練習 3 >

問 1　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$　　(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$

問 2　次の関数を微分せよ。

(1) $2e^x$　　(2) $3\log x$

(3) $\sqrt[3]{x}$　　(4) $\dfrac{1}{x^3}$

(5) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$　　(6) e^{4x+1}

(7) $\log(5x)$　　(8) $e^{-\frac{x^2}{2}}$

(9) $\log\left(x^3\right)$　　(10) $\log|4x|$

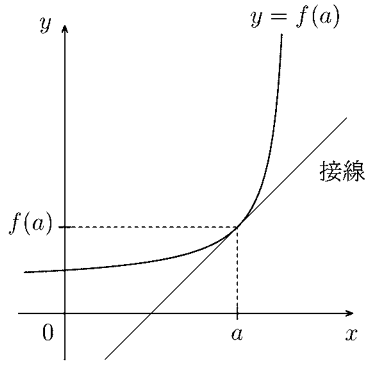
(11) $\log|\sin x|$　　(12) $x\sqrt{x}$

(13) $e^x\sin x$　　(14) $e^{3x}\cos(4x)$

(15) xe^{-x}　　(16) $x^2\log|x|$

問 3　$y=4^x$ を対数微分法を用いて微分せよ。

< 接線の方程式 >



$y=f(x)$ のグラフの $x=a$ における接線の方程式は

$$\boxed{y=f'(a)\times(x-a)+f(a)} \quad \text{(接線の方程式)}$$

である。

例 1 $f(x)=e^{2x}$ のとき $f(0)=e^0=1$

$f'(x)=2e^{2x}$, $f'(0)=2e^0=2$

よって $y=e^{2x}$ の $x=0$ における接線の方程式は

$y=f'(0)(x-0)+f(0)=2x+1$ より $\underline{y=2x+1}$ (接線)

例 2 $f(x)=\log x$ のとき $f(e)=\log e=1$

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $f'(e)=\dfrac{1}{e}$

よって $y=\log x$ の $x=e$ における接線の方程式は

$y=f'(e)(x-e)+f(e)=\dfrac{1}{e}(x-e)+1=\dfrac{1}{e}x$ より $\underline{y=\dfrac{1}{e}x}$ (接線)

例 3 $f(x)=\cos x$ のとき $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

$f'(x)=-\sin x$, $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$

よって $y=\cos x$ の $x=\dfrac{\pi}{2}$ における接線の方程式は

$y=f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)+f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1\times\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)+0$ より $\underline{y=-x+\dfrac{\pi}{2}}$ (接線)

例 4 $f(x)=\sqrt{x}$ のとき $f(1)=\sqrt{1}=1$

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $f'(1)=\dfrac{1}{2\sqrt{1}}=\dfrac{1}{2}$

よって $y=\sqrt{x}$ の $x=1$ における接線の方程式は

$y=f'(1)(x-1)+f(1)=\dfrac{1}{2}(x-1)+1=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$ より $\underline{y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}}$ (接線)

問 以下の接線の方程式を求めよ。

(1) $y=e^x$ の $x=0$ における接線

(2) $y=\log x$ の $x=1$ における接線

(3) $y=\sin x$ の $x=0$ における接線

(4) $y=\sqrt{x}$ の $x=4$ における接線

(5) $y=\dfrac{1}{x}$ の $x=1$ における接線

< 平均値の定理 >

a, b が定数で，$a < b$ とするとき，不等式

$$a \leqq x \leqq b \quad , \quad a < x < b \quad , \quad a < x \quad , \quad x \leqq b$$

などを満たす実数 x の集合を**区間**といい，

$$[\,a,\, b\,] \quad , \quad (a,\, b) \quad , \quad (a,\, +\infty) \quad , \quad (-\infty,\, b\,]$$

などで表す。$[\,a, b\,]$ を閉区間，(a, b) を開区間という。

問 1　区間 $[a,\, b]$ は集合 $\{x : a \leqq x \leqq b\}$ を表す。($[\,a, b\,] = \{x : a \leqq x \leqq b\}$)
次の区間を集合の記述法 $\{x :\qquad\qquad\qquad\}$ を用いて表せ。

$(a,\, b) =$　　　　$(a,\, +\infty) =$　　　　$(-\infty,\, b) =$

$(\,a,\, b\,] =$　　　　$[\,a,\, b) =$　　　　$[\,a,\, +\infty) =$

< ロルの定理 >

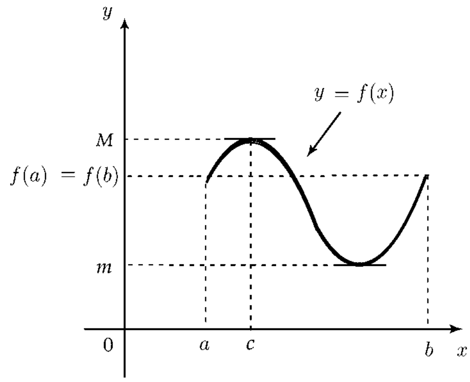
関数 $f(x)$ が閉区間 $[\,a,\, b\,]$ で連続,

開区間 $(a,\, b)$ で微分可能で，$f(a) = f(b)$

ならば

$$f'(c) = 0 \quad , \quad a < c < b$$

を満たす実数 c が存在する。



証明略

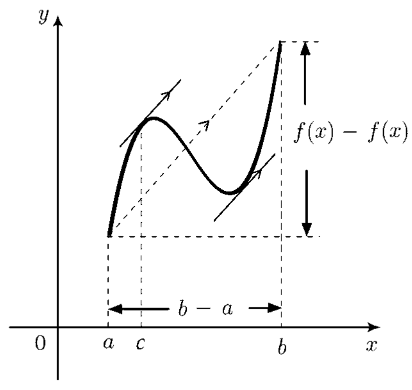
< 平均値の定理 >

関数 $f(x)$ が閉区間 $[\,a,\, b\,]$ で連続,

開区間 $(a,\, b)$ で微分可能ならば

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad , \quad a < c < b$$

を満たす実数 c が存在する。

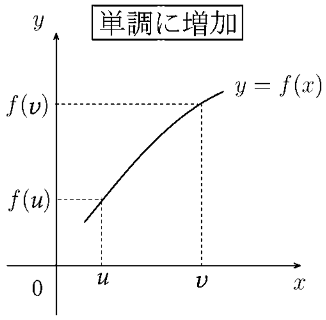


証明略

問 2　定数 a, b $(a < b)$ と関数 $f(x) = x^2$ に対し，次式をみたす c を a と b で表せ。

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad (a < c < b)$$

< 関数の増減 >



関数 $f(x)$ において，ある区間の任意の値 u，v について

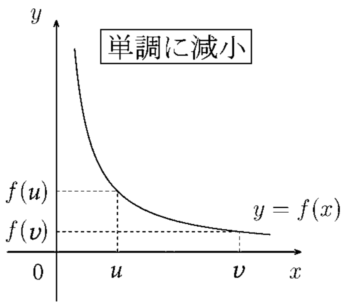
① $\boxed{u < v \quad \text{ならば } f(u) < f(v)}$

が成り立つとき，$f(x)$ はその区間で**単調に増加**するという。

また，

② $\boxed{u < v \quad \text{ならば } f(u) > f(v)}$

が成り立つとき，$f(x)$ はその区間で**単調に減小**するという。



上の定義式①で $f(u) \leqq f(v)$ が成り立つとき**増加**といい，

②式で $f(u) \geqq f(v)$ が成り立つとき**減小**という。

前ページの平均値の定理から次の定理が導かれる。(証明は研究課題)

< 定理 >

関数 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続，開区間 (a, b) で微分可能とする。

区間 (a, b) で常に $f'(x) > 0$ ならば $f(x)$ は区間 $[a, b]$ で**単調に増加**する。

常に $f'(x) < 0$ ならば $f(x)$ は区間 $[a, b]$ で**単調に減小**する。

常に $f'(x) = 0$ ならば $f(x)$ は区間 $[a, b]$ で**定数**である。

例 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ の増減を調べる。

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$

より $x = 1,\ 3$ で $f'(x) = 0$ となる。

右表よりグラフは右図のようになる。

(表 1)

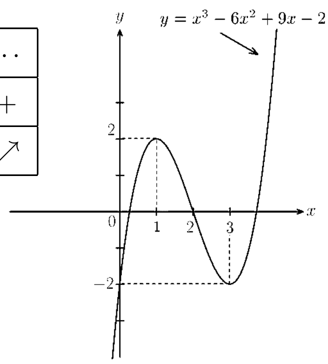
x	$x < 1$	1	$1 < x < 3$	3	$3 < x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	単調 増加	2	単調 減少	-2	単調 増加

(注) この表を**増減表**という。

増減表は表 2 のように略記してよい。

(表 2)

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$



問 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ に対し増減表を作り，

グラフを描け。

< 極大・極小 1 >

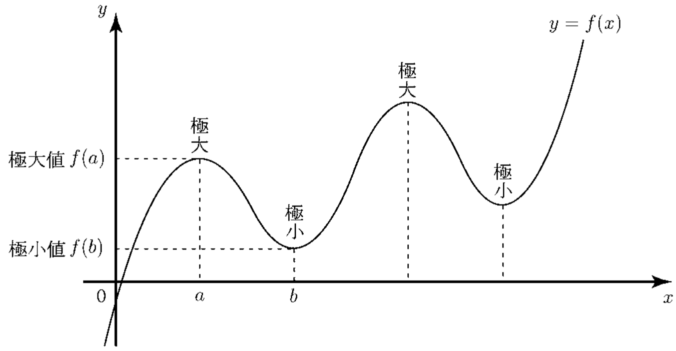
関数 $f(x)$ について、 a の近くの x に対し

$$f(a) > f(x)$$

が成り立つとき、 $f(x)$ は $x = a$ で**極大**になるといい、$f(x)$ を**極大値**という。

また、 b の近くの x に対し

$$f(b) < f(x)$$



が成り立つとき、 $f(x)$ は $x = b$ で**極小**になるといい、 $f(b)$ を**極小値**という。
極大値と極小値をまとめて**極値**という。

例　3 次関数 $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$ の極値を調べるには、増減表を作ればよい。微分すると

$$\begin{aligned} y' &= 6x^2 - 18x + 12 \\ &= 6(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

より $x = 1$ と $x = 2$ のとき $y' = 0$ となる。

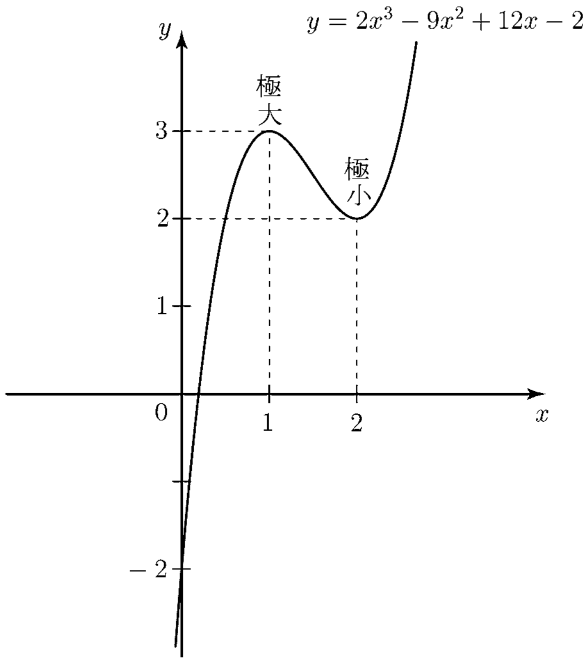
x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$
		極大		極小	

増減表より

$\underline{x = 1 \text{ のとき　極大値 } y = 3}$

$\underline{x = 2 \text{ のとき　極小値 } y = 2}$

であることがわかる。



問　3 次関数 $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ の増減表を作り、極値を調べよ。

$x =$　　　　のとき極大値 $y =$ ________

$x =$　　　　のとき極小値 $y =$ ________

x	
y'	
y	

＜ 極大・極小 2 ＞

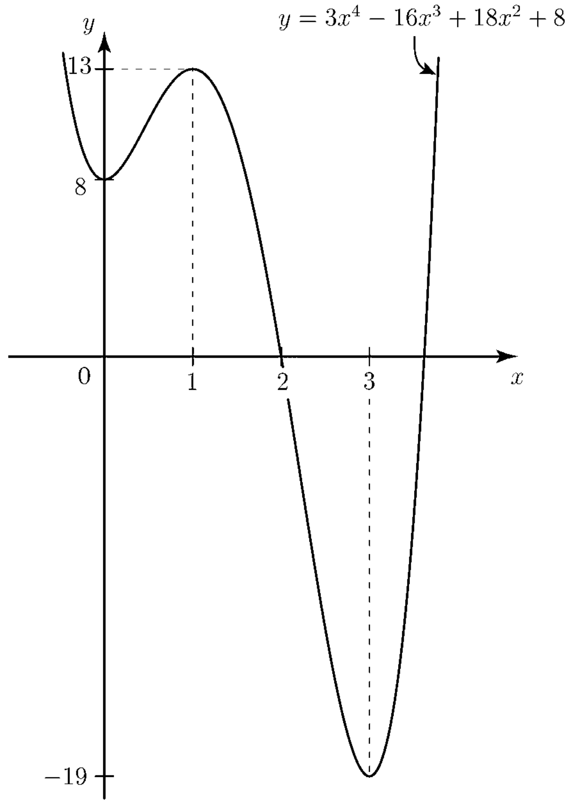
例　4 次関数 $y = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 + 8$
の極値を調べるには、3 次関数と
同様に増減表を作ればよい。
微分すると

$$\begin{aligned} y' &= 12x^3 - 48x^2 + 36x \\ &= 12x(x^2 - 4x + 3) \\ &= 12x(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

より、$x = 0,\ x = 1,\ x = 3$ のとき
$y' = 0$ となる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	8	↗	13	↘	-19	↗
		極小		極大		極小	

増減表より
　$x = 1$ のとき極大値 $y = 13$
　$x = 0$ のとき極小値 $y = 8$
　$x = 3$ のとき極小値 $y = -19$
であることがわかる。



問　以下の関数の増減表を作り、極値を調べよ。

(1) $y = 3x^4 - 8x^3 - 18x^2$

x	
y'	
y	

(2) $y = \dfrac{x^2}{e^x}$

x	
y'	
y	

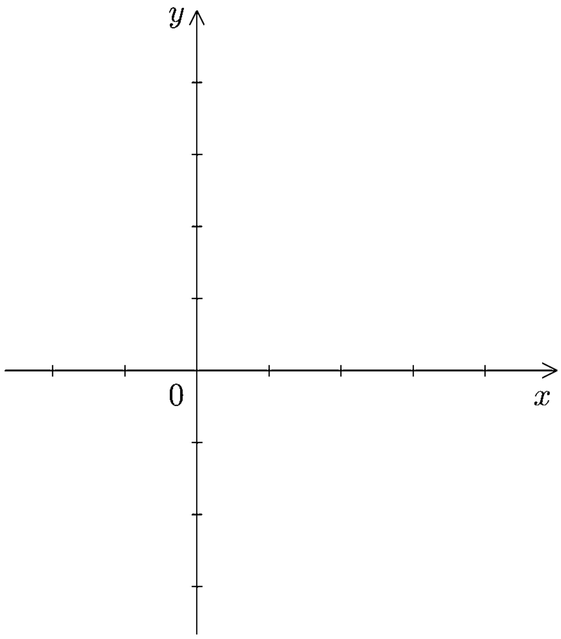
< 関数のグラフ >

問　次の関数を微分し、増減表を作り、極値を調べよ。また右図の上にその関数のグラフを書け。(グラフは極値の座標が分かるように目盛りを書く)

(1)　$y = x^3 + 3x^2 - 2$

$y' =$

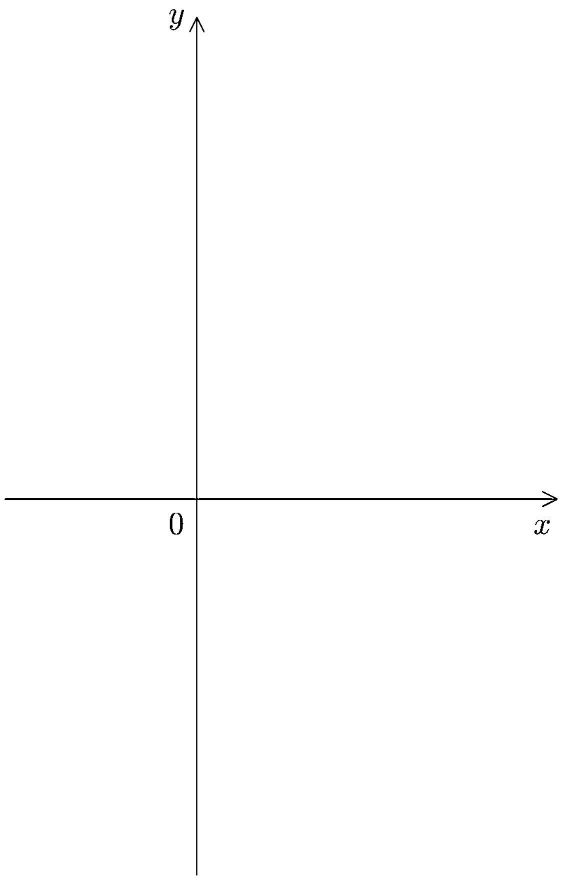
x	
y'	
y	



(2)　$y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 20$

$y' =$

x	
y'	
y	



< 最大・最小 1 >

例題　次の関数の最大値と最小値を、指定された定義域 (x の範囲) 内で求めよ。

$y = 2x^3 - 9x^2$ (定義域 $-1 \leqq x \leqq 5$)

(解)　導関数

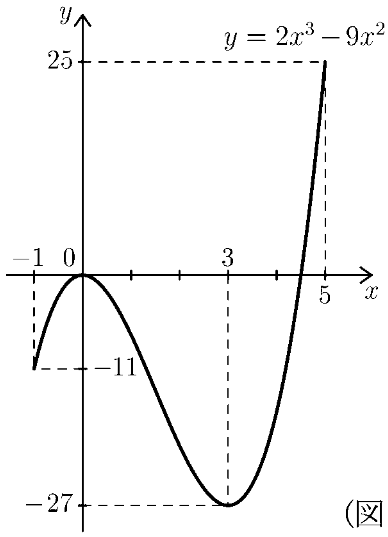
$y' = (2x^3 - 9x^2)' = 6x^2 - 18x$

を求め、$y' = 0$ とおくと

$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 18x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ または $x = 3$

であるから $-1 \leqq x \leqq 5$ の範囲で増減表は次のようになる。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$	5
y'	$\times$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\times$
y	-11	$\nearrow$	0	$\searrow$	-27	$\nearrow$	25



(図1)

この表よりグラフは図 1 のようになるから

(答)　$x = 5$ のとき 最大値 $y = 25$ をとり、$x = 3$ のとき 最小値 $y = -27$ をとる。

(注)　最大や最小は定義域によって違ってくる。たとえば

$y = 2x^3 - 9x^2$ (定義域 $-2 \leqq x \leqq 4$)

のとき 増減表は右表のようになり、

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4
y'	$\times$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\times$
y	-52	$\nearrow$	0	$\searrow$	-27	$\nearrow$	-16

この場合の答えは $x = 0$ のとき 最大値 $y = 0$, $x = -2$ のとき 最小値 $y = -52$ である。

問　次の関数に対し、指定された定義域内で増減表を書き、最大値と最小値を求めよ。

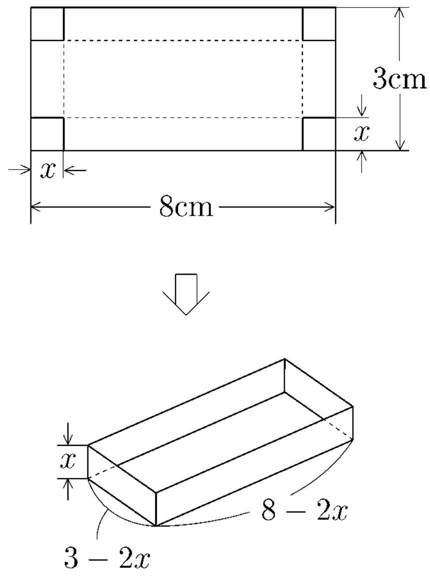
$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$　　(定義域　$-1 \leqq x \leqq 3$)

x	-1		3
y'	$\times$		$\times$
y			

(答)　$x =$ 　　　　のとき最大値 $y =$

　　　$x =$ 　　　　のとき最小値 $y =$

< 最大・最小 2 >



例題 たて 3cm , よこ 8cm の長方形のブリキの板の 4 角から、一辺 $x$cm の正方形を切り取り、右上図の点線のところを折り曲げて、右下図のようなふたのない容器を作る。容器の容積 $y$cm^3 を最大にするには、切り取る正方形の一辺の長さ x を何 cm にすればよいか？

(解) 容器のたては $3-2x$(cm), よこは $8-2x$(cm), 高さは x(cm) だから、容積 y(cm^3) は

$$y=(3-2x)(8-2x)x=4x^3-22x^2+24x$$

である。題意より $x>0$ でしかも $2x<3$ であるから、x の範囲は $0<x<\dfrac{3}{2}$ である。

この範囲内で増減表を作り、y の最大値を求める。y を微分すれば

$$y'=12x^2-44x+24=4(3x-2)(x-3)$$

でかつ、

$$x=\frac{2}{3}\text{ のとき}$$

$$y=4\times\left(\frac{2}{3}\right)^3-22\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+24\times\frac{2}{3}=\frac{200}{27}$$

より、増減表は右のようになる。よって

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{200}{27}$	$\searrow$	0

(答) $x=\dfrac{2}{3}$(cm) のとき、最大容積 $y=\dfrac{200}{27}$(cm^3) をとる。

問 一辺 4cm の正方形のブリキの板から、例題と同様にして、ふたのない容器を作るとき、容器の容積 y(cm^3) を最大にするには、切り取る正方形の一辺の長さ x を何 cm にすればよいか？
x の範囲を求め、その範囲内で増減表を作り、y の最大値を求めよ。

(解)

x	0	$\cdots$		$\cdots$	
y'			0		
y					

＜微分の応用＞

問 1　次の関数の極値を求め , グラフをかけ。

(1)　$y = x^3 - 3x^2 - 9x$

(2)　$y = x^2(x^2 - 2)$

問 2　次の関数の (　　) 内に示した範囲における最大値および最小値を求めよ。

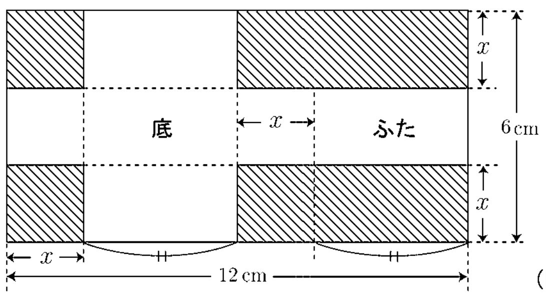
(1)　$y = -x^2 - 4x + 3$　　　　$(-2 \leqq x \leqq 1)$

(2)　$y = -x^3 + 3x^2 + 9x$　　$(-2 \leqq x \leqq 5)$

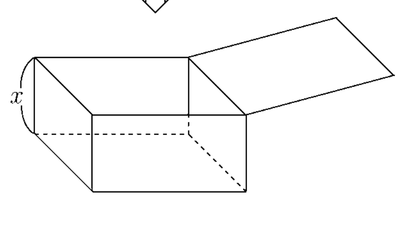
問 3　縦 6 cm , 横 12 cm の長方形のブリキの板から図 1 の斜線部分を切り取り , 点線のところを折り曲げて , 図 2 のような高さ x cm のふた付き容器を作る。

(1)　容器の容積を y cm^3 とする。y を x で表せ。

(2)　x が何 cm のとき y が最大になるか。



(図 1)



(図 2)