大学数学への道

TEXclub

基礎数学
シリーズ 1

『方程式』が
よくわからないときに開く本

例題で式の計算がよくわかる！

内容

- ★ 文字式の計算
- ★ 整式の計算
- ★ 因数分解
- ★ 1次方程式
- ★ 2次方程式

井上昌昭　山﨑和雄 著

高知工科大学
KOCHI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

< ギリシャ文字 >

小文字	大文字	英語名	読み方
α	A	alpha	アルファ
β	B	beta	ベータ
γ	Γ	gamma	ガンマ
δ	Δ	delta	デルタ
ϵ	E	epsilon	イプシロン
ζ	Z	zeta	ツェータ
η	H	eta	イータ
θ	Θ	theta	シータ
ι	I	iota	イオタ
κ	K	kappa	カッパ
λ	Λ	lambda	ラムダ
μ	M	mu	ミュー
ν	N	nu	ニュー
ξ	Ξ	xi	グザイ
o	O	omicron	オミクロン
π	Π	pi	パイ
ρ	P	rho	ロー
σ	Σ	sigma	シグマ
τ	T	tau	タウ
υ	Υ	upsilon	ウプシロン (ユプシロン)
$\phi(\varphi)$	Φ	phi	ファイ
χ	X	chi	カイ
ψ	Ψ	psi	プサイ
ω	Ω	omega	オメガ

< 立体と斜体 >

アルファベットには筆記体と活字体がある。活字体とは新聞や本などに印刷される字体である。アルファベットの活字体にはさらに立体 (ローマン体) と斜体 (イタリック体) がある。

立体小文字	立体大文字	斜体小文字	斜体大文字
a	A	a	A
b	B	b	B
c	C	c	C
d	D	d	D
e	E	e	E
f	F	f	F
g	G	g	G
h	H	h	H
i	I	i	I
j	J	j	J
k	K	k	K
l	L	l	L
m	M	m	M
n	N	n	N
o	O	o	O
p	P	p	P
q	Q	q	Q
r	R	r	R
s	S	s	S
t	T	t	T
u	U	u	U
v	V	v	V
w	W	w	W
x	X	x	X
y	Y	y	Y
z	Z	z	Z

ここで注意してほしいのは小文字の x である。立体の x は積の記号 $\times$ によく似ているため一文字だけの x はほとんど使われない。未知数を表すときは必ず斜体の x を使用する。一般に数を表す文字は必ず斜体を使う。

< 文字の用途と字体 >

数学の教科書では「数を表す文字」と「それ以外のものを表す文字」で明確に字体を区別している。

1.「**数を表す文字**は**アルファベットの斜体**または**ギリシャ文字**を使う」

特に以下のような場合によく使われる文字を紹介する。

(1) $1, 2, 3, \cdots$ などの自然数は n , m , k , i , j , ℓ 等
(2) 未知数や変数には x , y , z , w , t , u , v , r 等
(3) 指数、次数には n , p , q , r 等
(4) 係数、定数には a , b , c , d , α , β , γ 等
(5) 関数には f , g , h , $\cdots$ 等

その他特別な数を表す場合がある。たとえば円周率 π、ネピアの数 e、虚数単位 i (または j)、重力加速度 g 等である。

2.「**単位を表す文字**は**アルファベットの立体**を使う」

(1) 長さ $\cdots$ km , m , cm , mm
(2) 質量 $\cdots$ kg , g
(3) 時間 $\cdots$ h , min , s

その他、角度 (rad)、力 (N,kgf)、熱量 (cal)、電流 (A)、電圧 (V) など全て立体である。ただし μm (マイクロメートル) や抵抗 Ω (オーム) のようにギリシャ文字を使うこともある。しかしアルファベットの斜体は使わない。

3.「**特殊な関数**や**数学記号**は**アルファベットの立体**を使う」

(1) 特殊な関数 $\cdots$ sin , cos , tan , log , exp など
(2) 数学記号 $\cdots$ lim(極限) , det(行列式) など

4.「**点や図形を表す文字**は**アルファベットの立体**を使う」

(1) 点を表す文字 $\cdots$ P , Q , A , B , C などがよく使われる。
(2) 図形を表す文字 $\cdots$ 線分 AB , 三角形 ABC など

5.「太文字 (ボールド体) で数の集合を表す」

自然数の全体を $\boldsymbol{N}$, 整数の集合を $\boldsymbol{Z}$, 有理数の全体を $\boldsymbol{Q}$,

実数の全体を $\boldsymbol{R}$, 複素数の全体を $\boldsymbol{C}$ で表す。

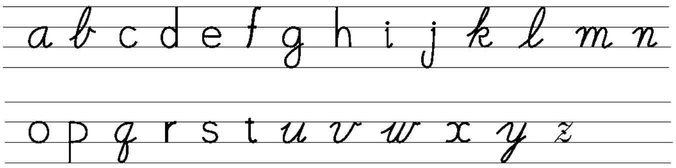
(注) 未知数がたくさんあるときはアルファベットやギリシャ文字では数が足りないことがある。たとえば未知数が 100 個あるときは、未知数を $x, y, z, \cdots$ と書くかわりに

$$x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ ,\ \cdots\ , x_{100}$$

と書く。x の右下の小さな文字を添(そえ)字という。x_2 は未知数 y のかわりで、$x \times 2$ ではない！

＜手書き文字について＞

◎アルファベットの小文字は、数学の答案では次のように書くとよい。



bは活字体の b でもよいが、数字の 6 と区別がつくように書く。

f は筆記体 f だと b と間違うので活字体の f の方がよい。

h は筆記体 h でもよいが k と区別がつくように書く。

kは活字体 k だと大文字 K やギリシャ文字の κ(カッパ) と間違えるので筆記体の方がよい。

lは活字体 l だと数字の 1 と間違えるので筆記体 ℓ を使う。

nは活字体 n だと h と間違えるので筆記体 n を使う。

q は活字体 q だと数字の 9 と間違えるので筆記体を使う。

s を数字の 5 のように書く人は筆記体 s を使ってもよい。

v を活字体で v と書くと、$\vee$ (理論記号の or) と似るので筆記体 v を使う。

x はギリシャ文字の χ(カイ) のように書かないこと。

z は数字の 2 と間違えやすいので必ず真ん中に点をつけ z のように書く。

◎ギリシャ文字は筆記体を使わないので，基本的に活字体で書く。

ただしアルファベットと同じような字体は区別するため

ɣ(ガンマ) ,　ω(オメガ)

のように書く。

＜ 割合 ＞

例 1 「5 m は 10 m のいくらに当たるか?」という問題に対する答えは「5m は 10m の $\frac{1}{2}$ に当たる。」となる。$\frac{1}{2}$ は $\frac{5}{10}$ を約分したものである。

この例のように、割合とは

$$\boxed{\text{比べる量} \div \text{もとになる量} = \text{割合}}$$

である。割合は分数または小数で表される。日常では割合を百分率や歩合で表したりする。

割合(分数)	割合(小数)	歩合	百分率(%)
1	1	10 割 (わり)	100%
$\frac{1}{10}$	0.1	1 割 (わり)	10%
$\frac{1}{100}$	0.01	1 分 (ぶ)	1%
$\frac{1}{1000}$	0.001	1 厘 (りん)	0.1%

例 2 プロ野球選手の打率が 3 割 2 分 1 厘とは $\frac{321}{1000}$ のこと、つまり 1000 回に 321 回ヒットがでることを意味する。百分率で表すと $\frac{321}{1000} = \frac{32.1}{100} = 32.1\%$ である。

問 1 次の割合を歩合と百分率の両方で表せ。

(1) $\frac{73}{100}$　　(2) 0.425

例 3 割合と同様に 2 つの量の大きさを比べるのに比がある。2 つの量の割合が $\frac{3}{4}$ のとき比では 3 : 4 と書き 3 対 4 と読む。
すなわち

$$3 : 4 = \frac{3}{4}$$

例 4 体重 40kg の人と体重 60kg の人の体重の比は

$$40 : 60 = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}(= 2 : 3)$$

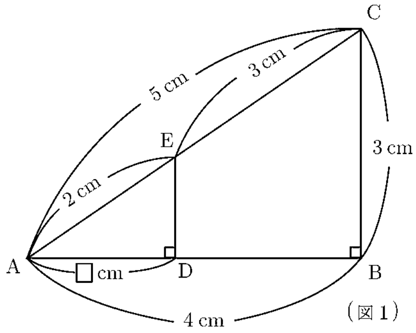
である。

問 2 次の比を (できるだけ簡単な) 分数になおせ。

(1) 5 : 6　(2) 12 : 18　(3) 18 : 45　(4) 1.5 : 2.5　(5) 0.72 : 1.44

＜比と比例配分＞

例１ (比)



(図 1)

右図において三角形 ADE と三角形 ABC は相似である。この場合、対応する辺の比はすべて等しい。つまり

$$\mathrm{AE} : \mathrm{AC} = \mathrm{AD} : \mathrm{AB} = \mathrm{DE} : \mathrm{BC}$$

となる。今は AE : AC = 2 : 5 なので「三角形 ADE と三角形 ABC の相似比は 2 : 5 である」という。AD の長さを求めたい。AD の長さを□ cm とすると、

$$\mathrm{AE} : \mathrm{AC} = \mathrm{AD} : \mathrm{AB}$$

より

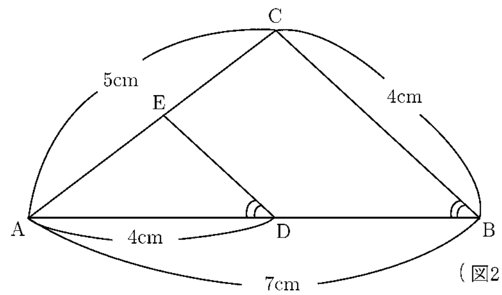
$$2 : 5 = \square : 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{5} = \frac{\square}{4}$$

であるから両辺を 4 倍すると

$$4 \times \frac{2}{5} = \square \quad \Rightarrow \quad \underline{(\text{答})\ \square = \frac{8}{5} = 1.6 \ \ (\text{cm})}$$

問１ 図 1 で DE の長さを求めよ。

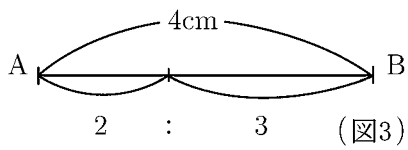
問２ 図 2 で三角形 ADE と三角形 ABC は相似である。DE の長さと AE の長さを求めよ。(答は仮分数でよい)



(図2)

例２ (比例配分)

「長さ 4cm の棒を 2 : 3 に分ける。
短い方の棒の長さを求めよ。」



(図3)

という問題を考える。図 3 をよく見ると、図 1 の□を求める問題と同じであり、4cm を 2 : 5 の比にするので

$$\underline{(\text{答})\ \ 4 \times \frac{2}{5} = 1.6 \ \ (\text{cm})}$$

(注) 例 2 のような比例配分の問題は比の問題と似てはいるが、**解き方は全くちがう。**

$$「2 : 3 に分ける」= \begin{cases} 小さい方 \ \Rightarrow \ 全体の\dfrac{2}{2+3} \\[2ex] 大きい方 \ \Rightarrow \ 全体の\dfrac{3}{2+3} \end{cases}$$

問３ 6 万円を 3 : 5 に分ける。高い方の金額を求めよ。

＜ 累乗 ＞

同じ数をいくつか掛けるとき

7×7 は 7^2 と表し、7 の 2 乗

$5\times 5\times 5$ は 5^3 と表し、5 の 3 乗

という。このように同じ数をいくつか掛けたものを、その数の**累乗**という。5^3 の 3 のように右かたの小さい数を**指数**という。累乗の指数はかけた数の個数を示している。2 乗を**自乗**または**平方**、3 乗を**立方**ということもある。

例 1 (1) $(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)=(-3)^4$

(2) $2\times 2\times 2\times 2\times 2=2^5$

(3) $(-5)\times(-5)\times 4\times 4\times 4=(-5)^2\times 4^3$

問 1 次の積を累乗の指数を使って表せ。

(1) $10\times 10\times 10$ (2) $7\times 7\times 7\times 7\times 7$ (3) $(-2)\times(-2)\times(-2)\times 3\times 3\times 3\times 3$

例 2 (1) $(-3)^2=(-3)\times(-3)=9$

(2) $-3^2=-(3\times 3)=-9$

(3) $2\times 3^2=2\times 9=18$

(4) $(2\times 3)^2=6^2=36$

(5) $(-2)^4\times 3^2=(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)\times 3\times 3=16\times 9=144$

(6) $\left(2^3\right)^2=8^2=64$

問 2 次の計算をせよ。

(1) $(-1)^2$ (2) $(-1)^3$ (3) $(-1)^4$ (4) $(-1)^5$

(5) -2^4 (6) $(-2)^4$ (7) -5^2 (8) $(-3)\times 4^2$

(9) $\left(-3^4\right)\times(-10)^3$ (10) $(-2)^3\times\left(-5^2\right)$ (11) $\left(3^2\right)^3$ (12) $\left(2^2\right)^3\div(-4)^2$

< 素因数分解 >

6 は 3 で割り切れる。このとき 3 は 6 の**約数**または**因数**という。
6 は 2 でも割り切れ、もちろん 1 でも割り切れ、6 自身でも割り切れる。
従って

$$\boxed{6\text{の約数は}\,1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ 6}$$

の合計 4 個である。

問 1　次の約数を全て書け。

(1) 18 の約数　　(2) 24 の約数

7 の約数は 1 と 7 だけである。1 より大きい数でその数自身と 1 以外に約数をもたない数を**素数**という。2 から 20 までの素数は

$$2\,,\ 3\,,\ 5\,,\ 7\,,\ 11\,,\ 13\,,\ 17\,,\ 19$$

である。

問 2　20 から 50 までの素数を全て書け。

素数でない数は素数の積で表される。たとえば 12 は

$$12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$$

となる。このような素数の積の形にすることを**素因数分解**という。

例 1　66 を素因数分解したい。右のように素数で割っていく。2×3 で割ると 11 になるから

$$66 = 2 \times 3 \times 11$$

$$\begin{array}{r|r} 2 & 66 \\ \hline 3 & 33 \\ \hline & 11 \end{array}$$

例 2　720 を素因数分解したい。右のように素数で割っていく。2 で 4 回割り切れ、3 で 2 回割り切れ、5 で 1 回割り切れるから

$$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$$

$$\begin{array}{r|r} 2 & 720 \\ \hline 2 & 360 \\ \hline 2 & 180 \\ \hline 2 & 90 \\ \hline 3 & 45 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline & 5 \end{array}$$

問 3　次の数を素因数分解せよ。

(1) 68　　(2) 108　　(3) 140　　(4) 144

(5) 156　　(6) 196　　(7) 225　　(8) 324

(9) 512　　(10) 1024　　(11) 1296　　(12) 1536

< 分数と小数 1 >

よく間違えやすい問題の検算方法を示す。

例 1 (小数の積)　小数の積は位どり (小数点の位置) が難しい。

$0.3 \times 0.12 = 0.0036$

この検算は分数になおして確かめる。

(検算)　$\dfrac{3}{10} \times \dfrac{12}{100} = \dfrac{36}{1000} = 0.036$

問 1 次の積を分数になおして計算し、答を小数で出せ。

(1) $0.2 \times 1.3 =$

(2) $0.4 \times 0.15 =$

(3) $0.03 \times 1.04 =$

例 2 (分数の商)　商の検算は出した答に割る数をかけて確かめる。

商　$\bigcirc \div \triangle = \square$　$\Rightarrow$　検算　$\square \times \triangle = \bigcirc$

(1) $\dfrac{3}{4} \div \dfrac{5}{6} = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{6}{5} = \dfrac{18}{20} = \dfrac{9}{10}$　$\Rightarrow$　検算　$\dfrac{9}{10} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{9 \times 5}{10 \times 6} = \dfrac{3}{4}$

(2) $\dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{3}{4}} = \dfrac{\frac{5}{6} \times 4 \times 6}{\frac{3}{4} \times 4 \times 6} = \dfrac{5 \times 4}{3 \times 6} = \dfrac{20}{18} = \dfrac{10}{9}$

$\Rightarrow$　検算　$\dfrac{10}{9} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{10 \times 3}{9 \times 4} = \dfrac{30}{36} = \dfrac{5}{6}$

問 2 次の商を計算し、さらに検算せよ。

(1) $\dfrac{6}{5} \div \dfrac{3}{4}$　　　検算

(2) $\dfrac{5}{12} \div \dfrac{8}{3}$　　　検算

(3) $\dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{5}}$　　　検算

(4) $\dfrac{\frac{3}{10}}{\frac{7}{12}}$　　　検算

＜分数と小数 2＞

例 (通分)　分数の通分は小数になおして検算する。

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{1\times 5}{3\times 5}+\frac{2\times 3}{5\times 3}=\frac{5}{15}+\frac{6}{15}=\frac{11}{15}$$

この計算を $\frac{3}{8}$ と間違える場合があるが、小数になおすと

$$\frac{1}{3}\fallingdotseq 0.33 \quad , \quad \frac{2}{5}=0.4 \quad , \quad \frac{11}{15}\fallingdotseq 0.73 \quad , \quad \frac{3}{8}=0.375$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{11}{15}\fallingdotseq 0.73 \quad , \quad \frac{3}{8}=0.375$$

より $\frac{3}{8}$ が間違いであることがわかる。

問 1 次の分数を小数 (第 2 位まで) で表せ。

(1) $\frac{1}{2}=$ 　, $\frac{1}{3}=$ 　(2) $\frac{3}{4}=$ 　, $\frac{5}{6}=$

$\frac{5}{6}=$ 　, $\frac{2}{5}=$ 　$\frac{8}{10}=$ 　, $\frac{19}{12}=$

(3) $\frac{1}{6}=$ 　, $\frac{1}{2}=$ 　(4) $\frac{11}{12}=$ 　, $\frac{1}{4}=$

$\frac{2}{8}=$ 　, $\frac{2}{3}=$ 　$\frac{12}{16}=$ 　, $\frac{7}{6}=$

問 2 次の分数を通分せよ。(答が仮分数になっても帯分数になおさなくてよい。)

(1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ 　(2) $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$ 　(3) $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$ 　(4) $\frac{11}{12}-\frac{5}{8}$

(5) $\frac{5}{4}+\frac{7}{6}$ 　(6) $\frac{7}{8}+\frac{11}{6}$ 　(7) $\frac{7}{5}-\frac{3}{10}$ 　(8) $\frac{13}{8}-\frac{7}{6}$

(9) $\frac{1.2}{2}+\frac{3.2}{3}$ 　(10) $\frac{5}{4}+\frac{4.5}{6}$ 　(11) $\frac{9.3}{8}-\frac{3.4}{4}$ 　(12) $\frac{7.6}{8}-\frac{3.7}{6}$

＜ 分数と小数 3 ＞

例 0.84 , $\dfrac{6}{7}$, $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}$ の大小関係を調べる。

分数を小数になおすと

$$\frac{6}{7} \fallingdotseq 0.857 \quad , \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6} \fallingdotseq 0.833$$

で　$0.833 < 0.84 < 0.857$　より

$$\underline{(\text{答})\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{3} < 0.84 < \frac{6}{7}}$$

(注) 上の答を逆向きに並べて

$$\underline{\frac{6}{7} > 0.84 > \frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$$

と答えても間違いではないが、通常は大きい数を右側に書く。

(別解) 共通因子 $100 \times 7 \times 2 \times 3$ で通分すると

$$0.84=\frac{84}{100}=\frac{84\times 42}{100\times 42}=\frac{3528}{4200} \quad , \quad \frac{6}{7}=\frac{6\times 600}{7\times 600}=\frac{3600}{4200}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}=\frac{5\times 700}{6\times 700}=\frac{3500}{4200}$$

$$\frac{3500}{4200}<\frac{3528}{4200}<\frac{3600}{4200} \quad \text{より} \quad (\text{答})\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}<0.84<\frac{6}{7}$$

問 次の数の大小関係を調べよ。

(1) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}$　,　$\dfrac{1}{7}$　,　0.2

(2) $\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{3}$　,　$\dfrac{17}{9}$　,　1.9

(3) $-\dfrac{3}{4}-\dfrac{2}{5}$　,　$-\dfrac{9}{8}$　,　-1.13

(4) $\dfrac{3}{4}-\dfrac{2}{5}$　,　$\dfrac{1}{3}$　,　0.34

(5) $-\dfrac{1}{6}-\dfrac{3}{4}$　,　$-\dfrac{8}{9}$　,　$-\dfrac{7}{8}$

(6) $\dfrac{25}{8}-\dfrac{3}{4}$　,　$\dfrac{5}{6}+\dfrac{3}{2}$　,　$\dfrac{12}{5}$

< 通分 >

例 1　$\frac{5}{6}$ と $\frac{7}{4}$ の和を通分するときは分母の 6 と 4 の最小公倍数である 12 を共通分母にして

$$\frac{5}{6}+\frac{7}{4}=\frac{5\times 2}{6\times 2}+\frac{7\times 3}{4\times 3}=\frac{10}{12}+\frac{21}{12}=\frac{31}{12}$$

とやるのが普通であるが、この最小公倍数 12 を求めるのが難しい。その代わりに共通分母を 6×4 にして、最後に約分する方が簡単である。

$$\frac{5}{6}+\frac{7}{4}=\frac{5\times 4}{6\times 4}+\frac{7\times 6}{4\times 6}=\frac{20}{24}+\frac{42}{24}=\frac{62}{24}=\frac{31}{12}$$

例 2

$$\frac{7}{6}+\frac{5}{8}=\frac{7\times 8}{6\times 8}+\frac{5\times 6}{8\times 6}=\frac{56+30}{48}=\frac{86}{48}=\frac{43}{24}$$

例 3

$$\frac{8}{9}-\frac{7}{12}=\frac{8\times 12}{9\times 12}-\frac{7\times 9}{12\times 9}=\frac{96-63}{9\times 12}=\frac{33}{9\times 12}=\frac{11}{3\times 12}=\frac{11}{36}$$

例 4

$$\frac{x}{6}-\frac{y}{8}=\frac{x\times 8}{6\times 8}-\frac{y\times 6}{8\times 6}=\frac{8x-6y}{48}=\frac{4x-3y}{24}$$

最後の式 $\frac{4x-3y}{24}$ はこれ以上簡単にならない。

例 5

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=\frac{2\times y}{x\times y}+\frac{3\times x}{y\times x}=\frac{2y+3x}{xy}=\frac{3x+2y}{xy}$$

最後の式 $\frac{3x+2y}{xy}$ はこれ以上簡単にならない。

例 6

$$\frac{3}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}=\frac{3\times(b\times c)}{a\times(b\times c)}+\frac{2\times(a\times c)}{b\times(a\times c)}+\frac{1\times(a\times b)}{c\times(a\times b)}=\frac{3bc+2ac+ab}{abc}=\frac{ab+2ac+3bc}{abc}$$

最後の式 $\frac{ab+2ac+3bc}{abc}$ はこれ以上簡単にならない。

問　次式を通分せよ。

(1) $\frac{7}{6}-\frac{7}{8}$　　(2) $\frac{2}{9}+\frac{5}{12}$　　(3) $\frac{5}{4}-\frac{7}{8}$

(4) $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}$　　(5) $\frac{a}{12}-\frac{b}{8}$　　(6) $\frac{x}{2}+\frac{y}{6}$

(7) $\frac{y}{x}-\frac{a}{3}$　　(8) $\frac{b}{a}+\frac{d}{c}$　　(9) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$

< 分数の簡略化 >

分数は分母と分子に同じ数をかけても元の分数と等しい。また同じ数で割っても元の分数と等しい (約分)。この性質を利用すると複雑な分数を簡単な分数になおすことができる。

例 (1) $\dfrac{1}{\frac{2}{3}} = \dfrac{1\times 3}{\frac{2}{3}\times 3} = \dfrac{3}{2}$

(2) $\dfrac{\frac{7}{6}}{\frac{5}{4}} = \dfrac{\left(\frac{7}{6}\right)\times(6\times 4)}{\left(\frac{5}{4}\right)\times(6\times 4)} = \dfrac{7\times 4}{5\times 6} = \dfrac{28}{30} = \dfrac{14}{15}$

(3) $\dfrac{1-\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{5-2}{5}}{\frac{4+3}{6}} = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{6}} = \dfrac{\left(\frac{3}{5}\right)\times(6\times 5)}{\left(\frac{7}{6}\right)\times(6\times 5)} = \dfrac{3\times 6}{7\times 5} = \dfrac{18}{35}$

(4) $\dfrac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \dfrac{1}{\frac{b+a}{ab}} = \dfrac{1\times ab}{\left(\frac{b+a}{ab}\right)\times ab} = \dfrac{ab}{b+a} = \dfrac{ab}{a+b}$

最後の式 $\dfrac{ab}{a+b}$ はこれ以上簡単にできない。

(5) $\dfrac{\frac{z}{2}+\frac{w}{5}}{\frac{x}{4}-\frac{y}{6}} = \dfrac{\frac{5z+2w}{10}}{\frac{6x-4y}{24}} = \dfrac{\frac{5z+2w}{10}}{\frac{3x-2y}{12}} = \dfrac{\left(\frac{5z+2w}{10}\right)\times(12\times 10)}{\left(\frac{3x-2y}{12}\right)\times(12\times 10)}$

$= \dfrac{(5z+2w)\times 12}{(3x-2y)\times 10} = \dfrac{(5z+2w)\times 6}{(3x-2y)\times 5} = \dfrac{30z+12w}{15x-10y}$

最後の式 $\dfrac{30z+12w}{15x-10y}$ はこれ以上簡単にならない。

問 次の分数を簡単にせよ。

(1) $\dfrac{1}{\frac{7}{5}}$ (2) $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}}$ (3) $\dfrac{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}$

(4) $\dfrac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}$ (5) $\dfrac{\frac{d}{c}}{\frac{b}{a}}$ (6) $\dfrac{1}{\frac{zw}{xy}}$

(7) $\dfrac{1}{\frac{y}{x}+\frac{w}{z}}$ (8) $\dfrac{\frac{1}{ac}}{\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}$ (9) $\dfrac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$

< 数としての文字 >

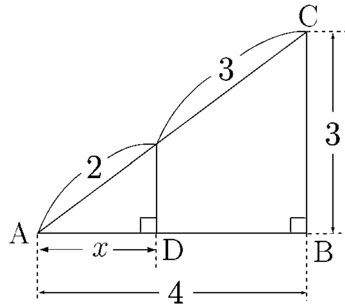
わからない数を□で表すかわりに x や y などの文字を使って表す。わからない数を表す文字を**未知数**といい，数の代わりに文字を使うことを**代数**という。

例 1 図 1 の AD の長さを x とおくと

$$2 : 5 \;=\; x : 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{5} = \frac{x}{4}$$

両辺を 4 倍すると

$$4 \times \frac{2}{5} = x \quad \Rightarrow \quad \underline{(答)\ x = \frac{8}{5} = 1.6}$$



(図1)

(注) この例 1 の場合は文字 x は (結果的に) 分数 $\dfrac{8}{5}$ または少数 1.6 を意味する。

例 2 図 2 において各直線上の数字の和が同じになるよう x, y, z, w を決めたい。

上段の和は

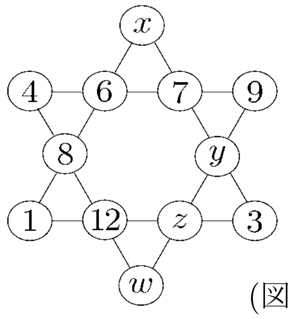
$$4 + 6 + 7 + 9 = 26$$

だから

$$x + 6 + 8 + 1 = 26$$

より

$$x = 26 - (6 + 8 + 1) = 11$$



(図 2)

問 1 例 2 で y, z, w にあてはまる数を求めよ。

問 2 図 3，図 4 で縦・横・ななめの数字の和が等しくなるよう，x, y, z, w を求めよ。

(1)

4	9	w
3	x	7
8	z	y

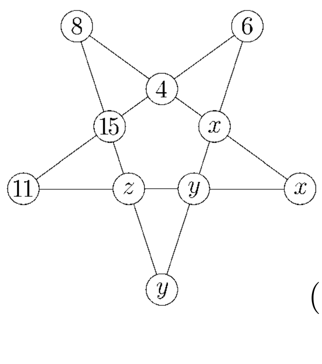
(図 3)

(2)

16	2	3	13
5	11	10	z
9	x	y	12
4	14	15	w

(図 4)

問 3 図 5 において各直線上の数字の和が等しくなるよう x, y, z を求めよ。



(図 5)

＜１次方程式＞

例題　次の方程式を解け。

(1)　$0.3x-5=0.1(x-20)$　　(2)　$\dfrac{2x-3}{3}+\dfrac{3x-4}{5}=2$

(3)　$x:(x-1)=5:3$

(解)　(1)　$0.3x-5=0.1x-2 \quad\Rightarrow\quad 0.2x=3 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{3}{0.2}=15$

(2)　両辺を 3×5 倍すると

$$(2x-3)\times5+(3x-4)\times3=30 \quad\Rightarrow\quad 19x=57 \quad\Rightarrow\quad x=\tfrac{57}{19}=3$$

(3)　$\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{5}{3} \quad\Rightarrow\quad 3x=5(x-1) \quad\Rightarrow\quad -2x=-5 \quad\Rightarrow\quad x=\dfrac{5}{2}$

問　次の方程式を解け。

(1) $1.2x-0.2=0.6x$

(2) $\dfrac{1}{4}x-10=2x+\dfrac{1}{2}$

(3) $\dfrac{1}{2}x-5=-\dfrac{2}{3}x+2$

(4) $-3(x-6)+8=19$

(5) $4(x-1)=12-3(x+3)$

(6) $8x-\{3x-2(x-6)\}=0$

(7) $9x-\{1-3(x+5)\}=2x-6$

(8) $\dfrac{x}{6}-\dfrac{3-5x}{2}=x$

(9) $\dfrac{x+2}{3}-\dfrac{x-1}{2}=3$

(10) $x-\dfrac{x-1}{4}=6$

(11) $\dfrac{x+3}{3}-\dfrac{2x-3}{2}=x-\dfrac{5}{6}$

(12) $\dfrac{4}{3}\left(x+\dfrac{7}{4}\right)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1-x}{4}$

(13) $\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{5}{4}$

(14) $2x:(x+1)=6:5$

＜１次方程式の応用＞

例題 1 冊 120 円の A4 版ノートと 1 冊 90 円の B5 版ノートを合わせて 16 冊買った合計金額は 1740 円であった。A4 版のノートを何冊買ったか。

(解) A4 版ノートを x 冊買ったとすると , B5 版ノートは $16 - x$ 冊買ったことになる。それぞれの金額は

A4 版ノートの金額 = (単価)×(冊数) = $120x$ (円)
B5 版ノートの金額 = (単価)×(冊数) = $90(16 - x)$ (円)

だから , 合計金額は

合計金額 = $120x + 90(16 - x) = 1740$ (円)

この一次方程式より

$$
\begin{aligned}
(120 - 90)x &= 1740 - 90 \times 16 \\
30x &= 300 \\
x &= 10
\end{aligned}
$$

よって (答) A4 版ノートを 10 冊買った。

問１ リンゴ 10 個とみかん 15 個を買って 1700 円払った。りんご 1 個の値段はみかん 1 個の値段より 20 円高い。りんごとみかんの値段を求めよ。

問２ A は 4800 円 , B は 3600 円もっている。今この 2 人が同じ本を買ったら , A の残金は B の残金の 2 倍になったという。買った本の値段を求めよ。

問３ 修学旅行で旅館の部屋割りをするのに生徒を 1 室に 7 人ずつ入れると 6 人余り , 8 人ずつ入れると 1 室だけ 5 人になる。部屋数および生徒数を求めよ。

＜連立１次方程式＞

例 次の連立方程式の解を求める。

$$\begin{cases} 5x + 6y = 9 & \cdots \text{①} \\ 4x + 7y = 5 & \cdots \text{②} \end{cases}$$

(1) y を消去するためには①式を 7 倍した式から②式を 6 倍した式をひく。

$$\begin{array}{rrcll} & 35x + 42y & = & 63 & \cdots \text{①} \times 7 \\ -) & 24x + 42y & = & 30 & \cdots \text{②} \times 6 \\ \hline & 11x & = & 33 & \Rightarrow \quad \underline{x = 3} \end{array}$$

(2) x を消去するためには①式を 4 倍した式から②式を 5 倍した式をひく。

$$\begin{array}{rrcll} & 20x + 24y & = & 36 & \cdots \text{①} \times 4 \\ -) & 20x + 35y & = & 25 & \cdots \text{②} \times 5 \\ \hline & -11y & = & 11 & \Rightarrow \quad \underline{y = -1} \end{array}$$

よって $\underline{\text{(答)}\ x = 3 \quad , \quad y = -1}$

問 次の連立方程式を解け。

(1) $\begin{cases} 7x - y = 11 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 7x + 5y = 18 \\ 4x + 3y = 10 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ x + 5y = 13 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 5x - 3y = 13 \\ 2x + 4y = 26 \end{cases}$

＜連立1次方程式の応用 1 ＞

例題 ある店で 80 円のノートと 200 円の手帳をあわせて 10 冊購入したら合計 1280 円であった。ノートと手帳は何冊購入したか。

(解) ノートを x 冊 , 手帳を y 冊購入したとすると , 全部で 10 冊なので

冊数 ： $x+y=10 \qquad \cdots$ ①

である。また金額は

金額 ： $80x+200y=1280 \qquad \cdots$ ②

である。① ×20− ② ÷10 より

$$\begin{array}{rrcll} & 20x+20y & = & 200 & \cdots ① \times 20 \\ -) & 8x+20y & = & 128 & \cdots ② \div 10 \\ \hline & 12x & = & 72 & \Rightarrow \quad x=\frac{72}{12}=6 \quad , \quad y=10-x=4 \end{array}$$

よって (答) ノートを 6 冊 , 手帳を 4 冊購入した。

問 1 1 冊 120 円の A4 版ノートと 1 冊 90 円の B5 版ノートをあわせて 20 冊購入した。合計金額は 2010 円であった。A4 版ノートと B5 版ノートを何冊購入したか。

問 2 ある演奏会の入場料は大人が 500 円 , 子供が 200 円である。ある日の入場者数は 100 人であり , 入場料の合計は 38000 円であった。この日の入場者数は大人 , 子供それぞれ何人か。

問 3 ある高等学校の昨年度の生徒数は 600 人であった。本年度の男生徒数は昨年度の男生徒数に比べて 3 ％増加し , 女生徒数は 3 ％減少した。また全体としては 1 ％増加した。昨年度の男女生徒数および本年度の男女生徒数を求めよ。

＜連立１次方程式の応用２＞

例題 ある店で原価 80 円のノートと原価 170 円の手帳を何冊か仕入れ, ノートは 100 円 , 手帳は 200 円で売りつくした。ノートと手帳の仕入れ金額は 8400 円であり , 売上金は 10000 円であった。ノートと手帳はそれぞれ何冊仕入れたか。

(解) ノートを x 冊 , 手帳を y 冊仕入れたとする。

仕入れ金額 ： $80x + 170y = 8400 \quad \cdots$ ①

売り上げ金額 ： $100x + 200y = 10000 \quad \cdots$ ②

連立方程式① , ②を解くと $x = 20$, $y = 40$ より

(答) ノートを 20 冊 , 手帳を 40 冊仕入れた。

問１ ある果物店でりんごを原価 50 円 , みかんを原価 20 円で何個か仕入れ , リンゴは 100 円 , みかんは 50 円で売りつくした。リンゴとみかんの仕入れ金額は 2500 円であり , 売り上げ金額は 5500 円であった。リンゴとみかんはそれぞれ何個仕入れたか。

問２ ある文房具店の売り出しで , 鉛筆 10 本とノート 5 冊を組み合わせて 1250 円 , 鉛筆 12 本とノート 8 冊を組み合わせて 1760 円の値段がついていた。鉛筆 1 本およびノート 1 冊の値段はそれぞれいくらか。

問３ ケーキ屋でイチゴとチーズのショートケーキをあわせて 10 個買う。イチゴのショートケーキ 3 個とチーズケーキ 7 個では合計 1060 円であり , イチゴのケーキ 7 個とチーズケーキ 3 個では合計 1140 円である。イチゴケーキ 5 個とチーズケーキ 5 個では合計いくらになるか。

＜３元連立１次方程式＞

例題

ある店で、ケーキとプリンとドーナツを販売している。

ケーキ１個、プリン２個、ドーナツ３個では 390 円

ケーキ２個、プリン３個、ドーナツ１個では 460 円

ケーキ３個、プリン４個、ドーナツ２個では 680 円

であった。ケーキ、プリン、ドーナツはそれぞれ１個いくらになるか。

この問題を式で表すと、１組の方程式ができる。このような方程式の組を３元連立１次方程式という。この方程式を解くには、**順に一文字ずつ消去する**とよい。

問１　上の問題を解きなさい。

問２　100 円硬貨１枚、50 円硬貨１枚、１円硬貨１枚、の重さは 10g、

100 円硬貨２枚、50 円硬貨３枚、１円硬貨４枚、の重さは 26g、

100 円硬貨３枚、50 円硬貨１枚、１円硬貨２枚、の重さは 21g、

である。100 円硬貨、50 円硬貨、１円硬貨の重さは、それぞれいくらか。

< 省略記号の変更 >

1. 積の記号 $\times$ は省略する

文字式の場合、積の記号 $\times$ は未知数 x と混同しやすいので、積の記号 $\times$ を省略する。例えば $x+x=2\times x$ を $2x$ と略記する。また $x\times x$ は xx であるがこれは通常 x^2 と書く。

例　$x+x+x=3x$,　$2\times x+5\times x=7x$,　$a\times b\times c=abc$

$4\times x\times x-7\times x\times x=-3x^2$,　$a\times(a+b)=a^2+ab$

$5\times x\times x\times x\times 7\times y\times y=35x^3y^2$,　$a\times 2\times a\times 4\times a\times 5=40a^3$

(注)　(1) 数字と文字との積の場合は $40a^3$ のように数字を左側に書く。

(2) abc を答案用紙に書くとき、筆記体で abc のように続けて書いてはならない。$a\times b\times c$ の意味なので必ず一文字ずつくぎって $a\ b\ c$ と書く。

問 1　次の式を積の記号 $\times$ を省略して簡単にせよ。

(1) $3\times x+x+x$　　　(2) $2\times x\times x\times 3\times y\times y\times y\times y\times y$

(3) $a\times a\times(a-3\times b)$　　　(4) $3\times x\times x\times(x\times 4-3\times y)$

2. プラス記号は省略しない (帯分数は使わない)

帯分数の $1\dfrac{1}{2}$ は本来は $1+\dfrac{1}{2}$ という意味であるから、間のプラスが省略されている。積の記号を省略するので、まぎらわしいから、今後は帯分数を使用してはならない。$1\dfrac{1}{2}$ を表したいときは、$1+\dfrac{1}{2}$ かまたは仮分数 $\dfrac{3}{2}$ の形を使う。特に分数の積の場合は仮分数の方が便利である。たとえば

$$1\frac{1}{2}\times 2\frac{1}{3}=\frac{3}{2}\times\frac{7}{3}=\frac{7}{2}$$

ここで仮分数 $\dfrac{7}{2}$ を $3+\dfrac{1}{2}$ の形になおす必要はない。仮分数の方が場所をとらないので、整数+分数の形にしない方がよい。

問 2　次の帯分数を仮分数になおせ。

(1) $1\dfrac{1}{3}$　　　(2) $3\dfrac{3}{4}$　　　(3) $4\dfrac{1}{5}$　　　(4) $6\dfrac{2}{3}$

< 文字式のきまり >

数のかわりに文字を用いて計算するとき、その計算式を**文字式**という。文字式は前ページのようなきまりがある。さらに文字式では割り算を分数で表す。たとえば

$$a \div b = \frac{a}{b}$$

と書く。文字式では割り算の記号 $\div$ 使わない。このようなきまりをまとめると

〈文字式のきまり〉	1. 文字式では積の記号×は省略する。 2. 数と文字の積は数を左側、文字を右側に書く。 3. 同じ文字の積は指数を使う。 4. 文字式では割り算を分数で表す。 5. $+, -$ より $\times, \div$ を優先する。

となる。

(注) 1. 積の記号 $\times$ は通常は省略するが、$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$ のような素因数分解の場合は省略しない。ただし文字式の計算では $a \times a \times a \times a \times b \times b \times c = a^4 \times b^2 \times c = a^4b^2c$ のように $\times$ を全て省略する。

2. アルファベットの積は a^4b^2c のようにアルファベットの順に a , b , c $\cdots$, x , y , z に従って左側から書いていく。

3. 積の記号 $\times$ のかわりに文字と文字の間に点を打って $a \times b = a \cdot b$ のように書く場合もあるが

$$2 \cdot 3 = 2 \times 3 = 6 \quad , \quad 2.3 = 2 + 0.3$$

のように小数点と混同するので使用しない方が良い。

4. 数の計算と同様に文字の計算でも和 $(+)$, 差 $(-)$ より, 積 $(\times)$ や商 $(\div)$ を優先する。たとえば

$$a \times b + c - d \div e \times f = (a \times b) + c - (d \div e \times f) = ab + c - \frac{df}{e}$$

例 1 $5 \times (2 \times x + 3 \times y) - 4 \times (x - 2 \times y) = 10x + 15y - 4x + 8y = 6x + 23y$

(注) 最後の式 $6x + 23y$ はこれ以上簡単にはできない。これが数の計算とちがうところである。たとえば $x = 7$, $y = 9$ のときは最後まで計算する。

$$5 \times (2 \times 7 + 3 \times 9) - 4 \times (7 - 2 \times 9) = 6 \times 7 + 23 \times 9 = 249$$

例 2 $(4a^2b) \div (6ab^2) = \dfrac{4a^2b}{6ab^2} = \dfrac{4 \times a \times a \times b}{6 \times a \times b \times b} = \dfrac{2a}{3b}$

(注) 最後の式 $\dfrac{2a}{3b}$ はこれ以上簡単にできない。

問 次の式をできるだけ簡単にせよ。

(1) $3 \times a \times b \times x \times a \times b \times 2 \times b$

(2) $5(x - y) - 3(y + 2x) + x(2 + y)$

(3) $6 \times x \times y \times y \div (x \times y \times 5 \times x \times 3)$

(4) $21ab^3 \div 28a^2b$

(5) $(5xy^2) \times (9x^3y^2) \div (15x^2y^3)$

(6) $(3ab^2c) \div (2a^2bc^3) \times (6abc^2)$

< 等式の変形 >

等号 (=) で結ばれる文字式を**等式**という。等式は次の法則がある。

⊙ $A = B$ ならば $A + C = B + C$, $A - C = B - C$

⊙ $A = B$ ならば $AC = BC$, $\dfrac{A}{C} = \dfrac{B}{C}$ $(C \neq 0)$

例 等式 $2x = 4a + 3b - 5 \quad \cdots (1)$

を考える。両辺を 2 で割ると

$$x = \frac{4a + 3b - 5}{2} \quad \cdots (2)$$

また，(1) 式の両辺に $5 - 3b$ を足して 4 で割り，左辺と右辺を入れかえると

$$a = \frac{2x + 5 - 3b}{4} \quad \cdots (3)$$

(1) 式から (2) 式の形にすることを「x について解く」といい，(1) 式から (3) 式の形にすることを「a について解く」という。

問 次の等式を指定された形になおせ。

(1) $E = IR$, $R =$

(2) $V = \dfrac{2\pi R}{P}$, $P =$

(3) $H = KA\dfrac{T_2 - T_1}{L}$,

$T_1 =$

(4) $P = \dfrac{TN}{9.74 \times 10^5}$,

$N =$

(5) $\sigma = \alpha E(t - \tau)$,

$\alpha =$

(6) $G = \dfrac{E}{2(1 + \mu)}$,

$E =$

(7) $\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{\psi} - \dfrac{1}{\omega}$,

$\psi =$

(8) $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma}$,

$R =$

(9) $\dfrac{m_1^2 v^2}{2(m_1 + m_2)} = (m_1 + m_2)gh$,

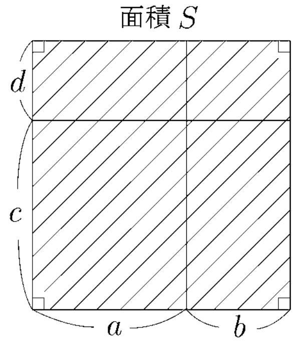
$v =$

(10) $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$,

$x =$

＜文字式の展開 1＞

例題 図 1 の斜線部分の面積 S を a，b，c，d を用いて表せ。



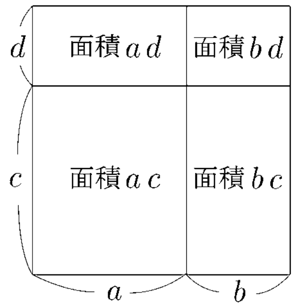
(図1)

(解 1)　2 辺の長さが $a+b$ と $c+d$ の長方形だから

(答) $S=(a+b)(c+d)$

(解 2)　図 2 より

(答) $S=ac+ad+bc+bd$



(図2)

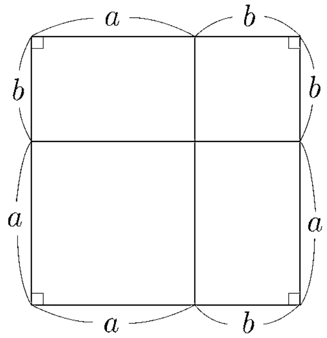
(注)　解 1 と解 2 はどちらも正しい。
すなわち

$$\boxed{(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd}$$

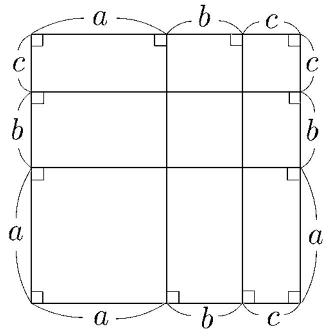
が成り立つ。

問 1 次の正方形の面積 S を 2 通りに表せ。

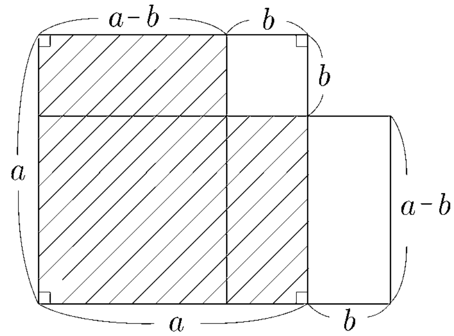
(1)



(2)



問 2 次の斜線部分の面積 S を a，b を用いて、2 通りに表せ。



< 文字式の展開 2 >

例 1 $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

を計算で示すには

$$(a+b)\times(c+d)=a\times(c+d)+b\times(c+d)$$
$$=a\times c+a\times d+b\times c+b\times d$$
$$=ac+ad+bc+bd$$

とすればよい。

このようにカッコのついた積の式をカッコのつかない式になおすことを**展開する**という。

例 2 $(a+b)^2$ を展開する。

$$(a+b)^2=(a+b)\times(a+b)=a\times(a+b)+b\times(a+b)$$
$$=a\times a+a\times b+b\times a+b\times b$$
$$=a^2+2ab+b^2$$

例 3 $(a+b)(a-b)=a\times(a-b)+b\times(a-b)$
$$=a\times a-a\times b+b\times a-b\times b$$
$$=a^2-b^2$$

問 次の式を展開せよ。

(1) $(a-b)^2$

(2) $(a+b)(a+c)$

(3) $(a+b)(a-c)$

(4) $(a-b)(a-c)$

(5) $(a+b)(-a+b)$

(6) $(a+b+c)^2$

(7) $(a+b-c)^2$

(8) $(a-b-c)^2$

< 文字式の展開 3 >

例 1 $(a-b)\,(a^2+ab+b^2)$

$$= a \times (a^2+ab+b^2) - b \times (a^2+ab+b^2)$$

$$= a \times a^2 + a \times ab + a \times b^2 - b \times a^2 - b \times ab - b \times b^2$$

$$= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3$$

$$= a^3 - b^3$$

例 2 $(a+b)^3 = (a+b) \times (a+b) \times (a+b) = (a+b) \times (a+b)^2$

$$= (a+b) \times (a^2+2ab+b^2)$$

$$= a \times (a^2+2ab+b^2) + b \times (a^2+2ab+b^2)$$

$$\begin{aligned} &= a \times a^2 + a \times 2ab + a \times b^2 \\ &\qquad + b \times a^2 + b \times 2ab + b \times b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ &\quad + a^2b + 2ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

問 次の式を展開せよ。

(1) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$

(2) $(a-b)^3$

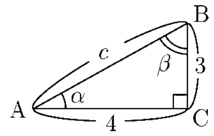
(3) $(a-b)(a+b)^2$

(4) $(a^2-b^2)(a^2+b^2)$

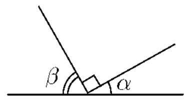
(5) $(a-b)^2(a+b)^2$

＜ピタゴラスの定理１＞

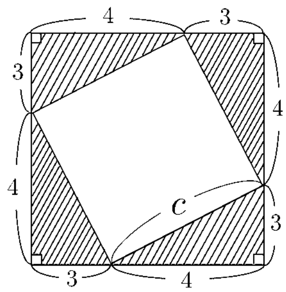
例 図 1 のような底辺 4(cm)、高さ 3(cm) の直角三角形 ABC の斜辺の長さ c を求めたい。∠BAC=α、∠ABC=β とおくと三角形の内角の和は 180° より $\alpha+\beta=90°$ となる。従って図 2 のように直線上に角 α と角 β をおけば残った角度は 90° となる。そこで図 1 の三角形 ABC を 4 個用意して、図 3 のようにおく。図 3 の大きい正方形 (一辺 $3+4$ の正方形) から斜線部分を除いた部分は (図 2 の性質より) 一辺 c の正方形になる。よって図 3 の面積を斜線部分とそれ以外に分けると



(図1)



(図2)



(図3)

$$\underbrace{(3\times 4)^2}_{\text{全体の面積}}=\underbrace{\left(\frac{1}{2}\times 3\times 4\right)\times 4}_{\text{斜線部分の面積}}+c^2$$

これから

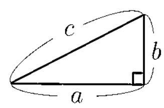
$$c^2=(3+4)^2-\left(\frac{1}{2}\times 3\times 4\right)\times 4=3^2+2\times 3\times 4+4^2-2\times 3\times 4=3^2+4^2=25$$

よって $c=5$ (cm) である。

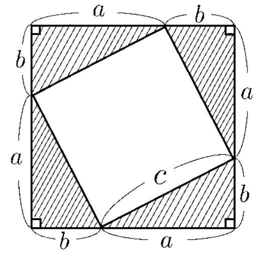
問 底辺 a、高さ b の直角三角形の斜辺の長さを c とする (図 4)。例を参考にして

$$\boxed{c^2=a^2+b^2}$$

であることを証明せよ。この関係式を **ピタゴラスの定理**または**三平方の定理**という。
(ヒント $\cdots$ 21 ページ 例 2)

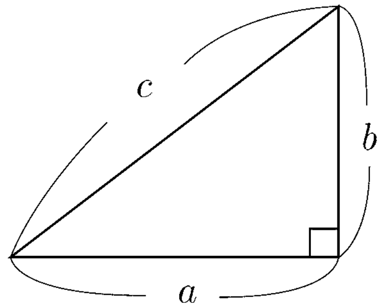


(図4)



(図5)

＜ピタゴラスの定理 2＞



右図のような直角三角形に対し　前ページより

$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$ (三平方の定理 = ピタゴラスの定理)

が成り立つ。

例　直角三角形の三辺の長さ a , b , c (c は斜辺の長さ) が

$$a = 8 \quad , \quad c = 10$$

であるとき b の長さは

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = c^2 - a^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36 = 6^2$$

より $\underline{b = 6}$ である。

問　直角三角形の三辺の長さ a , b , c (c は斜辺の長さ) が次の各場合に，
残りの辺の長さを求めよ。

(1)　$a = 12$, $b = 5$, $c =$

(2)　$a = 16$, $c = 20$, $b =$

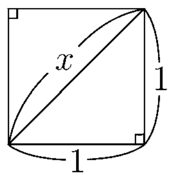
(3)　$b = 15$, $c = 17$, $a =$

(4)　$a = 16$, $c = 34$, $b =$

(5)　$b = 60$, $c = 61$, $a =$

＜ 平方根 1 ＞

例 1 一辺の長さが 1 の正方形の対角線の長さを x とすると、ピタゴラスの定理より



$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

となる。この長さを測ってみると

$$x = 1.41421356\cdots$$

となって小数が限りなく続き、しかも不規則である。この数 x は 2 つの整数の比 (*ratio*) で表されないことが発見され、当時の人はこの秘密を他へ口外することを禁じた。今日ではこのような数は**無理数** (*irrational number*) と呼ばれている。

又、この場合の x は 2 乗すれば 2 になる数であり、2 の**平方根**と呼ばれ、

$$x = \sqrt{2}$$

という記号で表される。

一般に正の数 a に対し、2 乗して a になる正の数を a の平方根と呼び $\sqrt{a}$ で表す。この記号 $\sqrt{}$ を**根号**という。

例 2 平方根は常に無理数とは限らない。例えば

$$\sqrt{4} = 2 \quad , \quad \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

などは無理数ではない。

問 1 次の平方根は全て無理数ではない。根号を使わずに表せ。

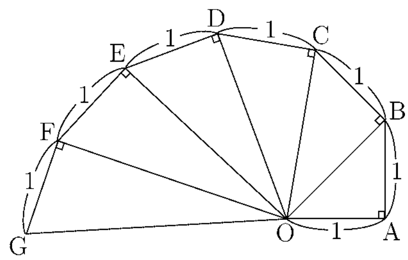
(1) $\sqrt{16}$　　(2) $\sqrt{256}$

(3) $\sqrt{\dfrac{36}{49}}$　　(4) $\sqrt{0.25}$

例 3 右図において OB の長さは $\sqrt{2}$ である。三平方の定理より

$$(\mathrm{OC})^2 = (\mathrm{OB})^2 + (\mathrm{BC})^2 = (\sqrt{2})^2 + 1 = 2 + 1 = 3$$

であるから OC= $\sqrt{3}$ である。



問 2 右図で OD,OE,OF,OG の長さを求めよ。(単位不要)

＜平方根 2＞

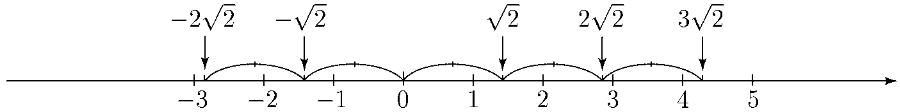
$\sqrt{2}$ と同様に $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$ などもすべて無理数で、その値は約

$$\sqrt{3} \fallingdotseq 1.7320508 \quad , \quad \sqrt{5} \fallingdotseq 2.2360679 \quad , \quad \sqrt{6} \fallingdotseq 2.44949$$

である。また文字式と同様に

$$3 \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \quad , \ (-1) \times \sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

と表し、これらはそれ以上簡単にできない無理数である。$3\sqrt{2}$ や $-\sqrt{2}$ 等の数値は数直線上の位置関係で理解する。



例 1 文字式の計算で

$$2a + 3b - 4a + 7b = (2a - 4a) + (3b + 7b) = -2a + 10b$$

と同様に

$$2\sqrt{3} + 3\sqrt{5} - 4\sqrt{3} + 7\sqrt{5} = (2\sqrt{3} - 4\sqrt{3}) + (3\sqrt{5} + 7\sqrt{5}) = -2\sqrt{3} + 10\sqrt{5}$$

と計算する。最後の式 $-2\sqrt{3} + 10\sqrt{5}$ はこれ以上簡単にできない。

問 1 次式を計算せよ。

(1) $(6\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) + (3\sqrt{2} - 5\sqrt{3})$　　(2) $(5\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) - (3\sqrt{3} - \sqrt{2})$

(3) $3(\sqrt{5} + 2\sqrt{3}) + 2(2\sqrt{5} - 3\sqrt{3})$　　(4) $5(\sqrt{5} + \sqrt{3}) - 3(2\sqrt{5} - \sqrt{2})$

例 2 (1) $(-\sqrt{7})^2 \ = \ (\sqrt{7})^2 \ = \ 7$

(2) $\sqrt{(-7)^2} \ = \ \sqrt{49} \ = \ 7$

問 2 次を計算せよ。

(1) $(-\sqrt{11})^2$　　(2) $\sqrt{(-5)^2}$　　(3) $\left(-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)^2$　　(4) $\sqrt{(-0.12)^2}$

例 3 $\sqrt{3} \times \sqrt{5}$ を求めたい。その 2 乗を計算すると

$$(\sqrt{3} \times \sqrt{5})^2 = (\sqrt{3})^2 \times (\sqrt{5})^2 = 3 \times 5 = 15$$

であるから $\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{15} = \sqrt{3 \times 5}$

問 3 次を計算せよ。

(1) $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$　　(2) $\sqrt{5} \times \sqrt{7}$　　(3) $\sqrt{4} \times \sqrt{11}$　　(4) $\sqrt{3} \times \sqrt{12}$

＜ 平方根 3 ＞

前ページ例 3 から一般に正の数 a と b に対して、

$$\boxed{\sqrt{a} \times \sqrt{b} \;=\; \sqrt{ab}}$$

が成り立つ。

例 1 (1) $\sqrt{12} \;=\; \sqrt{4 \times 3} \;=\; \sqrt{4} \times \sqrt{3} \;=\; 2 \times \sqrt{3} \;=\; 2\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{45} \;=\; \sqrt{9 \times 5} \;=\; \sqrt{9} \times \sqrt{5} \;=\; 3 \times \sqrt{5} \;=\; 3\sqrt{5}$

問 1 次の平方根を例 1 のようになおせ。

(1) $\sqrt{18}$　(2) $\sqrt{40}$　(3) $\sqrt{75}$　(4) $\sqrt{80}$　(5) $\sqrt{147}$

例 2 $\sqrt{8} \times \sqrt{18} \;=\; \sqrt{8 \times 18} \;=\; \sqrt{144} \;=\; 12$

(別解)

$$\sqrt{8} \times \sqrt{18} \;=\; (2\sqrt{2}) \times (3\sqrt{2}) \;=\; 6 \times (\sqrt{2})^2 \;=\; 6 \times 2 \;=\; 12$$

問 2 次の値を求めよ。

(1) $\sqrt{5} \times \sqrt{20}$　(2) $\sqrt{7} \times \sqrt{63}$　(3) $\sqrt{21} \times \sqrt{84}$

例 3 $x = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ とおくと $x^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^2 = \dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2} = \dfrac{3}{5}$

より $x = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$　よって $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$ がなりたつ。

一般に正の数 a と b に対して、

$$\boxed{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \;=\; \sqrt{\frac{a}{b}}}$$

が成り立つ。

例 4 $\dfrac{\sqrt{54}}{\sqrt{3}} \;=\; \sqrt{\dfrac{54}{3}} \;=\; \sqrt{18} \;=\; 3\sqrt{2}$

問 3 次を簡単にせよ。

(1) $\dfrac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}}$　(2) $\dfrac{\sqrt{405}}{\sqrt{15}}$　(3) $\dfrac{\sqrt{3} \times \sqrt{18}}{\sqrt{2}}$

＜ 平方根 4 ＞

例 1 $\left(\sqrt{5}+\sqrt{10}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 + 2\times\sqrt{5}\times\sqrt{10} + \left(\sqrt{10}\right)^2$

$= 5 + 2\sqrt{50} + 10$

$= 15 + 2\times 5\sqrt{2} = 15 + 10\sqrt{2}$

(注) ここで文字式の展開式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ を用いた。

問 1 21 ページを参考にして次の計算をせよ。

(1) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2$　(2) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2$　(3) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$

(4) $\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)^2$　(5) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$　(6) $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)$

例 2 (1) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$ ，(2) $\dfrac{6}{\sqrt{3}} = \dfrac{6\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \dfrac{6\times\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

このように変形することを「分母を**有理化**する」という。

問 2 次の分数の分母を有理化せよ。

(1) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(3) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$　(4) $\dfrac{4}{\sqrt{12}}$　(5) $\dfrac{2}{\sqrt{18}}$

例 3 $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ の分母を有理化したい。分母と分子に $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ をかけると

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{1 \times (\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})\times(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$$

(注) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ を用いた。

問 3 次の分母を有理化せよ。

(1) $\dfrac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

(3) $\dfrac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$　(4) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

＜数の表示 1＞

十進法以外にも数の表現のしかたがある。時計は 60 進法であり、
コンピューターは 2 進法で計算する。ここでは 8 進法を紹介する。
10 進法で 3 桁の整数は、たとえば

$$457 = 400 + 50 + 7 = 4 \times 10^2 + 5 \times 10 + 7$$

であり、10 進法の数 (=**10 進数**という）であることを明記するため

$$(457)_{10} = 4 \times 10^2 + 5 \times 10 + 7$$

と書く。これに対し 8 進法で三桁目が 4, 二桁目が 5, 一桁目が 7 である数を

$$(457)_8 = 4 \times 8^2 + 5 \times 8 + 7$$

と書く。8 進法で表される数を **8 進数**という。$4 \times 8^2 + 5 \times 8 + 7 = 303$ より

$$(457)_8 = (303)_{10}$$

である。

例 1 ① $(10)_8 = 1 \times 8 + 0 = (8)_{10}$

② $(45)_8 = 4 \times 8 + 5 = 32 + 5 = (37)_{10}$

③ $(356)_8 = 3 \times 8^2 + 5 \times 8 + 6 = 192 + 40 + 6 = (238)_{10}$

④ $(1057)_8 = 1 \times 8^3 + 0 \times 8^2 + 5 \times 8 + 7 = (559)_{10}$

問 1 次の 8 進数を 10 進数になおせ。

① $(12)_8$ ② $(33)_8$ ③ $(234)_8$ ④ $(707)_8$ ⑤ $(2001)_8$

例 2 ① $51 = 6 \times 8 + 3$ より $(51)_{10} = (63)_8$

② $215 = 3 \times 64 + 23 = 3 \times 8^2 + 2 \times 8 + 7$ より $(215)_{10} = (327)_8$

問 2 次の 10 進数を 8 進数になおせ。

① $(21)_{10}$ ② $(45)_{10}$ ③ $(79)_{10}$ ④ $(156)_{10}$

例 3 ① $(2.39)_{10} = 2 + 0.3 + 0.09 = 2 + \dfrac{3}{10} + \dfrac{9}{10^2}$

② $(4.57)_8 = 4 + \dfrac{5}{8} + \dfrac{7}{8^2}$

問 3 次の小数を例 3 のように分数で表せ。

① $(3.14)_{10}$ ② $(1.5)_8$ ③ $(5.73)_8$

＜数の表示 2＞

例題 3 桁の 10 進数で各桁の数の和が 9 の倍数になっているもの、たとえば

$(162)_{10}$, $(414)_{10}$, $(738)_{10}$

等はいずれも 9 の倍数である。一般に 3 桁の 10 進数

$$(abc)_{10} = a \times 10^2 + b \times 10 + c$$

に対して

$$a + b + c = 9 \text{ の倍数}$$

であれば $(abc)_{10}$ は 9 の倍数であることを証明せよ。

(証明) $a + b + c$ は 9 の倍数だから $a + b + c = 9n$(n は自然数) とおく。

$$(abc)_{10} = 100a + 10b + c = 99a + 9b + a + b + c$$
$$= 9\,(11a + b) + 9n = 9\,(11a + b + n)$$

より $(abc)_{10} = 9 \times (11a + b + n)$ は 9 の倍数になる。(証明終)

問 1 3 桁の 10 進数 $(abc)_{10} = a \times 10^2 + b \times 10 + c$ に対して

$$a + b + c = 3 \text{ の倍数}$$

であれば $(abc)_{10}$ は 3 の倍数であることを証明せよ。

(証明)

問 2 3 桁の x 進数 $(abc)_x = a \times x^2 + b \times x + c$ に対して

$$a + b + c = (x - 1) \text{ の倍数}$$

であれば $(abc)_x$ は $(x - 1)$ の倍数であることを証明せよ。

＜整式 1＞

10 進法で 2 桁、3 桁の整数は

$$2\text{桁}\cdots(ab)_{10} = a \times 10 + b \quad , \ 3\text{桁}\cdots(abc)_{10} = a \times 10^2 + b \times 10 + c$$

となる。一般に x 進法で 2 桁、3 桁の整数は

$$2\text{桁}\cdots(ab)_x = ax + b \quad , \ 3\text{桁}\cdots(abc)_x = ax^2 + bx + c$$

となる。このように x 進法で整数を表す式を「x に関する**整式**」という。
これに対し、$(2.37)_{10} = 2 + \dfrac{3}{10} + \dfrac{7}{10^2}$ のような小数

$$(2.37)_x = 2 + \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}$$

を表す x の式を「x に関する**分数式**」という。

問 x 進法で 4 桁の整数 $(abcd)_x$ を x の式で表せ。

$(abcd)_x =$

10 進法で百 , 十 , 一をそれぞれ図 1 のような四角形で表すと , 243 は図 2 のように表せる。

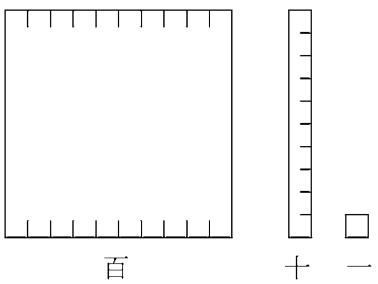


図 1

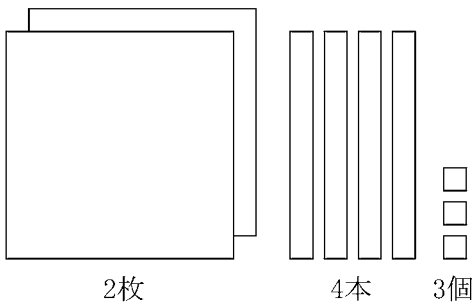


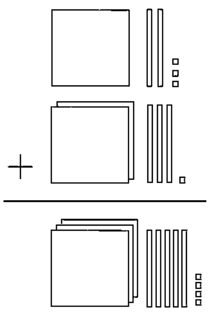
図 2

x に関する整式の計算は x 進法の計算と考えれば良い。

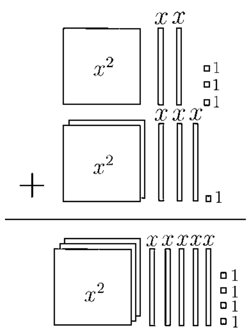
例 $(x^2 + 2x + 3) + (2x^2 + 3x + 1) = 3x^2 + 5x + 4$

数の足し算

$$\begin{array}{r} 123 \\ +\ 231 \\ \hline 354 \end{array}$$



整式の足し算



$$\begin{array}{r} x^2 + 2x + 3 \\ +\ \ 2x^2 + 3x + 1 \\ \hline 3x^2 + 5x + 4 \end{array}$$

< 整式 2 >

整式は式の形で区別する。

x に関する 1 次式 $\cdots ax+b$ の形

x に関する 2 次式 $\cdots ax^2+bx+c$ の形

x に関する 3 次式 $\cdots ax^3+bx^2+cx+d$ の形

x に関する整式では、x 以外の文字 $(a, b, c, d$ 等$)$ を**定数**という。

ax^3 の a, bx^2 の b, cx の c のように x との積になっている定数を**係数**という。

(注 1) x の整式は "x 進法" よりもっと広い意味で使われる。a, b, c 等の定数は小数や分数または負の数や無理数でもよい。

(注 2) $2x+7-5x^2+6x^3=6x^3-5x^2+2x+7$ のように x の整式は x の次式 (指数) の大きい順に並べる。このことを「**降べきの順**に並べる」という。

(注 3) 整式の計算 (和, 差, 積 等) は文字式の計算と同様であり、最後に降べきの順に並べる。

例 (1) $(3-x+2x^2)+(4x+5+3x^2)$

$=(2x^2-x+3)+(3x^2+4x+5)$

$=(2x^2+3x^2)+(-x+4x)+(3+5)$

$=5x^2+3x+8$

筆算では

$$\begin{array}{rr} & 2x^2-\ \ x+3 \\ +) & 3x^2+4x+5 \\ \hline & 5x^2+3x+8 \end{array}$$

(2) $(-4x+3+5x^2)-(7-2x)$

$=(5x^2-4x+3)-(-2x+7)$

$=5x^2+(-4x-(-2x))+(3-7)$

$=5x^2-2x-4$

筆算では

$$\begin{array}{rr} & 5x^2-4x+3 \\ -) & -2x+7 \\ \hline & 5x^2-2x-4 \end{array}$$

(3) $(2x-3)(4x+5)$

$=(2x-3)\times 4x+(2x-3)\times 5$

$=8x^2-12x+10x-15$

$=8x^2-2x-15$

筆算では

$$\begin{array}{rrl} & 2x-\ \ 3 & \\ \times) & 4x+\ \ 5 & \\ \hline & 10x-15 & \cdots\cdots (2x-3)\times 5 \\ +) & 8x^2-12x\qquad & \cdots\cdots (2x-3)\times 4x \\ \hline & 8x^2-\ \ 2x-15 & \end{array}$$

(注) 整式の計算は必ず降べきの順に並べて答える。

問 次の計算をせよ。

(1) $(3x-x^2+4)+(2x^2-1+2x)$

(2) $(1-x^2)-(4+x^2-3x)$

(3) $(x-3)(2+x)$

(4) $(4x-3)(6-5x)$

＜ 整式 3 ＞

例 1　$(3+2x)(4-x) = 3(4-x) + 2x(4-x) = 12 - 3x + 8x - 2x^2$

$$= -2x^2 + 5x + 12$$

問 1　次式を計算せよ。

(1)　$2(3x - 4x^2 + 1) + 3(x - 5 + 2x^2)$

(2)　$(3x-1)(4-5x)$

例 2　$(x+a)(x+b) = x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a+b)x + ab$

(注) x の係数 $a+b$ は 1 つにまとめる。

例 3　$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x + abc$

問 2　次式を展開せよ。

(1)　$(x+a)^2$

(2)　$(x-a)^2$

(3)　$(x+a)(x-a)$

(4)　$(x-a)(x-b)$

(5)　$(x-a)(x^2+ax+a^2)$

(6)　$(x+a)^3$

＜整式の除法 1＞

数の割り算 $679 \div 32$ について考えてみよう。

整式の割り算 $(6x^2+7x+9)\div(3x+2)$ について考えてみよう。

$$\begin{array}{rl} & 2 \\ 32\,) & \overline{679} \end{array}$$

立てる

$$\begin{array}{rl} & 2x \\ 3x+2\,) & \overline{6x^2+7x+9} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & 2 \\ 32\,) & \overline{679} \\ & 64 \end{array}$$

掛ける

$$\begin{array}{rl} & 2x \\ 3x+2\,) & \overline{6x^2+7x+9} \\ & 6x^2+4x \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & 2 \\ 32\,) & \overline{679} \\ & \underline{64} \\ & 3 \end{array}$$

引く

$$\begin{array}{rl} & 2x \\ 3x+2\,) & \overline{6x^2+7x+9} \\ & \underline{6x^2+4x} \\ & 3x \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & 2 \\ 32\,) & \overline{679} \\ & \underline{64} \\ & 39 \end{array}$$

下ろす

$$\begin{array}{rl} & 2x \\ 3x+2\,) & \overline{6x^2+7x+9} \\ & \underline{6x^2+4x} \\ & 3x+9 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & 21 \\ 32\,) & \overline{679} \\ & \underline{64} \\ & 39 \end{array}$$

立てる

$$\begin{array}{rl} & 2x+1 \\ 3x+2\,) & \overline{6x^2+7x+9} \\ & \underline{6x^2+4x} \\ & 3x+9 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & 21 \\ 32\,) & \overline{679} \\ & \underline{64} \\ & 39 \\ & 32 \end{array}$$

掛ける

$$\begin{array}{rl} & 2x+1 \\ 3x+2\,) & \overline{6x^2+7x+9} \\ & \underline{6x^2+4x} \\ & 3x+9 \\ & 3x+2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & 21 \\ 32\,) & \overline{679} \\ & \underline{64} \\ & 39 \\ & \underline{32} \\ & 7 \end{array}$$

引く

$$\begin{array}{rl} & 2x+1 \\ 3x+2\,) & \overline{6x^2+7x+9} \\ & \underline{6x^2+4x} \\ & 3x+9 \\ & \underline{3x+2} \\ & 7 \end{array}$$

$$679 = 32\times 21+7$$

$$6x^2+7x+9=(3x+2)(2x+1)+7$$

＜整式の除法 2＞

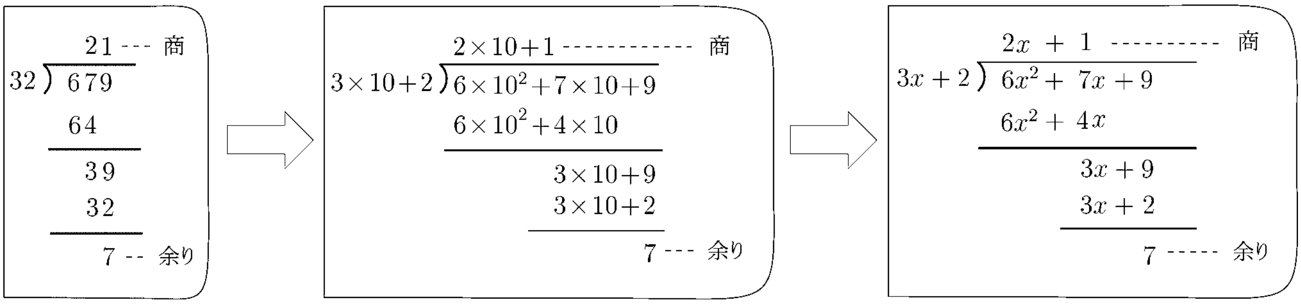
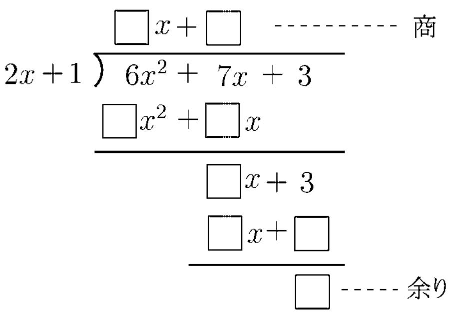


図1　$679 \div 32$　　　図2　　　図3　$(6x^2+7x+9)\div(3x+2)$

多項式 A を多項式 B で割ったとき、商が Q で余りが R となったとすると、$A = BQ + R$ がなりたつ。このとき、**R の次数は必ず B の次数より低くなる**ことに注意する。

また、多項式の割り算は整数のときと同じように、「商を立てる」、「掛ける」、「引く」、「下ろす」の４種類の計算を繰り返して求めることができる。ただ、整数の計算と違って、係数が分数であってもよい。

問 1　下の□のなかに適当な数を入れて、 $(6x^2+7x+3)\div(2x+1)$ を計算せよ。



問 2　次の割り算を行い、商と余りを求めよ。

(1) $(x^2+5x+9)\div(x+2)$

(2) $(3x^2+5x+7)\div(x+2)$

(3) $(2x^3+3x^2+5x+7)\div(2x+1)$

(4) $(2x^3+5x^2-2x+1)\div(x^2-x+2)$

(5) $(x^3-8)\div(x-2)$

＜ 整式の除法 3 ＞

例 1　136 を 11 で割ると商が 12 で余り 4 である。
これを式で書くと

$$136 = 12 \times 11 + 4$$

かまたは

$$\frac{136}{11} = 12 + \frac{4}{11}$$

$$\begin{array}{r@{\,)\,}l} & 12 \\ \cline{2-2} 11 & 136 \\ & 11 \\ \cline{2-2} & 26 \\ & 22 \\ \cline{2-2} & 4 \end{array}$$

となる。整式の除法も同様で
$x^2 + 3x + 6$ を $x + 1$ で割ると商が
$x + 2$ で余りが 4 である。これを式で書くと

$$x^2 + 3x + 6 = (x + 2)(x + 1) + 4$$

かまたは

$$\frac{x^2 + 3x + 6}{x + 1} = x + 2 + \frac{4}{x + 1}$$

となる。

$$\begin{array}{rrl} & x + 2 & \\ \cline{2-2} x + 1 \;) & x^2 + 3x + 6 & \\ & x^2 + x\phantom{{}+6} & \cdots\ (x+1) \times x \\ \cline{2-2} & 2x + 6 & \\ & 2x + 2 & \cdots\ (x+1) \times 2 \\ \cline{2-2} & 4 & \end{array}$$

例 2　右の筆算より

$$\frac{4x^3 - 2x^2 + 6x - 1}{2x + 3} = 2x^2 - 4x + 9 - \frac{28}{2x + 3}$$

$$\begin{array}{rrl} & 2x^2 - 4x + 9 & \\ \cline{2-2} 2x + 3 \;) & 4x^3 - 2x^2 + 6x - 1 & \\ & 4x^3 + 6x^2\phantom{{}+6x-1} & \cdots\ (2x+3) \times 2x^2 \\ \cline{2-2} & -8x^2 + 6x\phantom{{}-1} & \\ & -8x^2 - 12x\phantom{{}-1} & \cdots\ (2x+3) \times (-4x) \\ \cline{2-2} & 18x - 1 & \\ & 18x + 27 & \cdots\ (2x+3) \times 9 \\ \cline{2-2} & -28 & \end{array}$$

問　次の割り算を実行し、例の分数式の右辺の形にせよ。

(1) $\dfrac{x^2 + 3x}{x + 1}$

(2) $\dfrac{x^2 + 3x + 5}{x - 2}$

(3) $\dfrac{2x^2 - 3x - 1}{x - 1}$

(4) $\dfrac{x^3 - 5x^2 + 7x - 2}{x - 3}$

< 方程式と恒等式 >

文字 x に関する等式には 2 種類ある。

例 1 (1) 等式 $3x-10=2$ を満たす数 x は $x=4$ だけである。

(2) 等式 $x^2-9=0$ を満たす数 x は $x=3$ または $x=-3$ の 2 個しかない。

例 2 (1) 等式 $2(x-1)+3(x+4)=5x+10$ は x がどんな数でも成り立つ。

(2) 等式 $(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$ は x がどんな数でも成り立つ。

例 1 のように x が特別な数でしか等式が成立しない式を**方程式**という。例 1 の (1) を未知数 x に関する 1 次方程式、例 1 の (2) を未知数 x に関する 2 次方程式という。

これに対し、例 2 は x がどのような数でも等式が成立する。このような等式を（常に成り立つ等式という意味で）**恒等式**（こうとう）という。例 2 の (2) のような展開によってできる等式は必ず恒等式である。

問 1 例 2 の (2) を確かめたい。以下の x の値を代入して、$(x+2)\times(x+3)$ と x^2+5x+6 の式の値をそれぞれ求めよ。

(1) $x=0$ のとき $(x+2)(x+3)=$, $x^2+5x+6=$

(2) $x=1$ のとき $(x+2)(x+3)=$, $x^2+5x+6=$

(3) $x=2$ のとき $(x+2)(x+3)=$, $x^2+5x+6=$

(4) $x=3$ のとき $(x+2)(x+3)=$, $x^2+5x+6=$

(5) $x=4$ のとき $(x+2)(x+3)=$, $x^2+5x+6=$

問 2 次の式を展開せよ。

(1) $(x+\alpha)^2$　　(2) $(x-\alpha)^2$

(3) $(x+\alpha)(x-\alpha)$　　(4) $(x+\alpha)(x+\beta)$

(5) $(x-\alpha)(x-\beta)$　　(6) $(x+\alpha)(x-\beta)$

問 3 次の等式は恒等式か方程式か判定せよ。

(1) $3x-1=2(2x-1)+x$　　(2) $3(x+1)-1=2(x+1)+x$

(3) $(x+3)(x+1)=x^2+4x+3$　　(4) $(x-2)(x-1)=x^2-4x-3$

< 因数分解 1 >

例 169 を素因数分解すると $169 = 13^2$ となる。この式は次のようにも書ける。

$$169 = 10^2 + 6 \times 10 + 9 = (10+3)^2$$

この式と同様な式がいくつも作れる。

$$1^2 + 6 \times 1 + 9 = (1+3)^2$$
$$2^2 + 6 \times 2 + 9 = (2+3)^2$$
$$3^2 + 6 \times 3 + 9 = (3+3)^2$$
$$4^2 + 6 \times 4 + 9 = (4+3)^2$$
$$5^2 + 6 \times 5 + 9 = (5+3)^2$$

実はこのような式は無限に多く作れる。一般に任意の数 x に対して

$$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2 \qquad \cdots\cdots(1)$$

が成り立つ。すなわち (1) は恒等式である。

問 以下の式に共通する関係式を例の (1) 式のように x を使って表せ。

(1) $1^2 + 4 \times 1 + 4 = (1+2)^2$
$2^2 + 4 \times 2 + 4 = (2+2)^2$
$3^2 + 4 \times 3 + 4 = (3+2)^2$
$4^2 + 4 \times 4 + 4 = (4+2)^2$

(2) $2^2 - 10 \times 2 + 25 = (2-5)^2$
$4^2 - 10 \times 4 + 25 = (4-5)^2$
$6^2 - 10 \times 6 + 25 = (6-5)^2$
$8^2 - 10 \times 8 + 25 = (8-5)^2$

(3) $5^2 - 9 = (5+3) \times (5-3)$
$6^2 - 9 = (6+3) \times (6-3)$
$7^2 - 9 = (7+3) \times (7-3)$
$8^2 - 9 = (8+3) \times (8-3)$

(4) $1^2+5\times1+6 = (1+2)\times(1+3)$
$2^2+5\times2+6 = (2+2)\times(2+3)$
$3^2+5\times3+6 = (3+2)\times(3+3)$
$4^2+5\times4+6 = (4+2)\times(4+3)$

＜因数分解 2＞

前ページより

$$
\begin{aligned}
&x^2+6x+9=(x+3)^2\\
&x^2+4x+4=(x+2)^2\\
&x^2-10x+25=(x-5)^2\\
&x^2-9=(x+3)(x-3)\\
&x^2+5x+6=(x+2)(x+3)
\end{aligned}
$$

等がわかる。これらの等式は x がどんな数でも成り立つ。すなわち恒等式である。それを確かめるには右辺を展開して左辺になればよい。
たとえば、最後の式は

$$
\begin{aligned}
\text{右辺}=(x+2)(x+3)&=(x+2)\times x+(x+2)\times 3\\
&=x^2+2x+3x+6\\
&=x^2+5x+6\\
&=\text{左辺}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rrl}
 & x+2 & \\
\times) & x+3 & \\
\hline
 & 3x+6 & \cdots\ (x+2)\times 3\\
+) & x^2+2x & \cdots\ (x+2)\times x\\
\hline
 & x^2+5x+6 &
\end{array}
$$

となる。この x はどんな数でも成り立つ。それは文字式の計算が数の計算と同じ規則によって行われるからである。たとえば $x=10$ のときは

$$
\begin{aligned}
\text{右辺}&=(10+2)(10+3)\\
&=(10+2)\times 10+(10+2)\times 3\\
&=10^2+2\times 10+3\times 10+2\times 3\\
&=10^2+5\times 10+6=\text{左辺}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rrl}
 & 12 & \\
\times) & 13 & \\
\hline
 & 36 & \cdots\ 12\times 3\\
+) & 120 & \cdots\ 12\times 10\\
\hline
 & 156 &
\end{array}
$$

より等しい。右側に書いた筆算でも同じであることがわかる。
この式を

$$\text{左辺}=x^2+(2+3)x+2\times 3=(x+2)(x+3)=\text{右辺}$$

と考え、2 と 3 のかわりに一般の数 α と β で置き換えても成り立つ。
すなわち

$$\boxed{x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=(x+\alpha)(x+\beta)}$$

が成り立つ。このように整式を積の形に表すことを**因数分解**という。

問 36 ページの問 2 を参考にして、次を因数分解せよ。

(1) $x^2+2\alpha x+\alpha^2$

(2) $x^2-2\alpha x+\alpha^2$

(3) $x^2-\alpha^2$

(4) $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$

(5) $x^2+(\alpha-\beta)x-\alpha\beta$

＜ 因数分解 3 ＞

前ページの結果から任意の数 $\alpha,\ \beta$ に対して次の因数分解の公式が得られた。

(Ⅰ) $x^2+2\alpha x+\alpha^2=(x+\alpha)^2$

(Ⅱ) $x^2-2\alpha x+\alpha^2=(x-\alpha)^2$

(Ⅲ) $x^2-\alpha^2=(x+\alpha)(x-\alpha)$

(Ⅳ) $x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=(x+\alpha)(x+\beta)$

例 1 上の公式 (Ⅰ), (Ⅱ) の例をあげる。

(1) $x^2+10x+25=x^2+2\times5\times x+5^2=(x+5)^2$

(2) $x^2-12x+36=x^2-2\times6\times x+6^2=(x-6)^2$

例 2 上の公式 (Ⅲ) の例をあげる。

(1) $x^2-16=x^2-4^2=(x+4)(x-4)$

(2) $x^2-3=x^2-(\sqrt{3})^2=(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

例 3 上の公式 (Ⅳ) の例をあげる。

(1) $x^2+4x+3=x^2+(3+1)x+3\times1=(x+3)(x+1)$

(2) $x^2+7x+10=x^2+(5+2)x+5\times2=(x+5)(x+2)$

問 次式を因数分解せよ。

(1) x^2+6x+9

(2) $x^2-10x+25$

(3) $x^2+12x+36$

(4) x^2-9

(5) x^2-8

(6) x^2-1

(7) x^2+3x+2

(8) x^2+5x+6

(9) $x^2+7x+10$

(10) $x^2+7x+12$

＜ 因数分解 4 ＞

多項式の積 $(x+3)(x+4)$ を展開すると、

$$x^2+7x+12$$

となる。逆に $x^2+7x+12$ は

$$(x+3)(x+4)$$

と表されることがわかる。このように、1 つの多項式をいくつかの多項式の積で表すことを**因数分解する**という。ここで、 $x+3$ と $x+4$ を $x^2+7x+12$ の**因数**という。

例 1 $x^2+14x+45$ を因数分解せよ。

$$x^2+14x+45=(x+\bigcirc)(x+\square)$$

としたい。
右辺を展開すると $x^2+(\bigcirc+\square)x+\bigcirc\times\square$
となる。両辺を比較して、

$$\bigcirc+\square=14$$
$$\bigcirc\times\square=45$$

となる○と□を見つければよいことがわかる。
○を 5、□を 9 にすれば、和が 14、積が 45 となるから、

$$x^2+14x+45=(x+5)(x+9).$$

問 1 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2+8x+15$ (2) x^2+6x+5

(3) $x^2+10x+21$ (4) $x^2-11x+24$

(5) $x^2+2x-15$ (6) x^2-6x-7

次に、$2x^2+11x+15$ のように、x^2 の係数が 1 以外の 2 次式の因数分解を考えてみる。

$$2x^2+11x+15=(x+\bigcirc)(2x+\square)$$

とおくと

$$2\times\bigcirc+\square=11$$
$$\bigcirc\times\square=15$$

となる。
○と□は図-1 のような図式で見つけることができる。

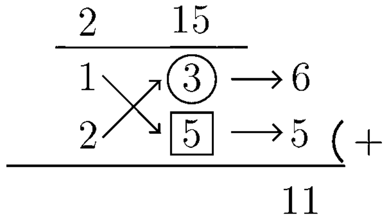


図-1 ○と□を見つける

問 2 次の式を因数分解せよ。

(1) $2x^2+5x+2$ (2) $4x^2+16x+15$

(3) $2x^2-5x-3$ (4) $3x^2-4x-4$

(5) $3x^2-10x+3$ (6) $6x^2-x-2$

＜ 因数分解 5 ＞

$m(a+b)$ を展開すると、$ma+mb$ になる。したがって、
$ma+mb$ は $m(a+b)$ と因数分解される。
すなわち、多項式の中に共通の因数があれば、それを括弧（カッコ）の外にくくり出すことによって因数分解ができる。

例 1　$3xy^2+6x^2y$ を因数分解せよ。
$3xy$ が共通の因数であるので、これをくくり出して

$$3xy^2+6x^2y=3xy(y+2x)$$

と因数分解できる。

例 2　$x(3a+5)-y(3a+5)$ を因数分解せよ。
$(3a+5)$ が共通の因数であるので、これをくくり出して

$$x(3a+5)-y(3a+5)=(3a+5)(x-y)$$

と因数分解できる。

次に、a^2-b^2 は $(a+b)(a-b)$ と因数分解される。
すなわち、多項式が 2 乗の差の形をしている場合は、和と差の積として因数分解できる。

問 1　次の式を因数分解せよ。

(1) $3ax^2-27a$

(2) $2a^3-18ab^2$

(3) $(x-y)a+(y-x)b$

(4) $ax^2-5ax+6a$

(5) $(a-b)x^2-(a-b)y^2$

(6) $11x^2-99$

問 2　次の式を因数分解せよ。

(1) $2x^2y+6xy^2$

(2) $(a+2b)^2-3(a+2b)$

(3) $9x^2-49$

(4) $(x+y)a-(x+y)b$

(5) $3a^2-75b^2$

(6) $1-9x^2$

＜ 2 次方程式の解の公式 ＞

$\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$ の解を求める。以下の①〜⑥の順に式変形せよ。

① x^2 の係数を 1 にするために、両辺を a で割ると

② 定数項を右辺に移項すると

③ 両辺に、x の係数の半分の 2 乗を加えると

④ 左辺を平方の形 $(x+\square)^2$ にすると

⑤ 両辺の平方根をとると

⑥ 解は

問 解の公式を使って次の方程式を解け。

(1) $x^2+x-1=0$ (2) $2x^2+2x-1=0$

＜2次方程式＞

2次方程式

$$x^2 = 1, \qquad x^2 + 2x + 1 = 0, \qquad 3x^2 - 5x = 1$$

のように x^2 を含む方程式を2次方程式といい、x のように未知の値を表す文字を**未知数**という。

次に、未知数 x の値を**解**といい、**解を求めることを方程式を解く**という。

(1)　因数分解による方法

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

左辺を因数分解すると

$$(x+3)(2x-1) = 0$$

となるから

$$x + 3 = 0 \quad \text{または} \quad 2x - 1 = 0$$

したがって

$$x = -3 \quad \text{または} \quad x = \frac{1}{2}$$

(2) 解の公式による方法

$ax^2 + bx + c = 0$ の解は,

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \ \text{と}\ x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

の2つである。これを解の公式という。

問　次の方程式を解け。

(1) $(x+2)(3x-4) = 0$

(2) $x(x+7) = 0$

(3) $x^2 + 2x - 15 = 0$

(4) $x^2 - 6x + 8 = 0$

(5) $x^2 = 12$

(6) $(x+3)^2 = 2$

(7) $x^2 + 5x + 1 = 0$

(8) $3x^2 - 7x + 3 = 0$

(9) $12x - 4 = x^2$

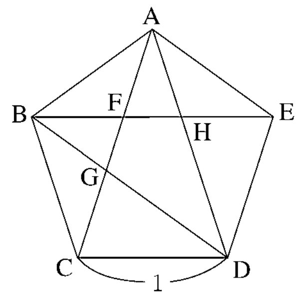
(10) $x^2 - 9 = 8x$

＜ 2 次方程式の応用 1 ＞

問 1　2 つの正の整数があり , その差は 4 で , 積が 96 である。この 2 数を求めよ。

問 2　n 角形の対角線は $\dfrac{n(n-3)}{2}$ 本ある。対角線が 20 本ある対角線は何角形か。

問 3　一辺の長さが 1 である正五角形の対角線の長さ x を求めたい。



(1)　AC = AD = BD = BE = x である。
線分 BE と CD は平行であり,
線分 AC と DE も平行である。
次の長さを数字またはxを用いて表せ。

① FE =　　② BF =　　③ EH =

④ FH =　　⑤ FG =

(2)　三角形 ACD と三角形 BFG は相似だから

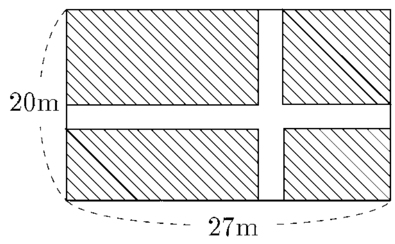
$$\mathrm{AD} : \mathrm{CD} = \mathrm{BF} : \mathrm{FG}$$

より x に関する 2 次方程式を導き、 x を求めよ。

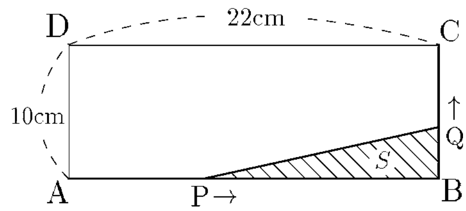
＜ 2 次方程式の応用 2 ＞

問 1 周囲の長さが 40cm で，面積が 96cm^2 の長方形を作りたい。この長方形の 2 辺の長さをどれだけにすればよいか。

問 2 縦が 20m，横が 27m の長方形の畑がある。これに右図のように，縦と横に同じ幅の道をつくり，残った畑の面積が 450m^2 になるようにしたい。道幅を何 m にすればよいか。



問 3 AB = 22cm，BC = 10cm の長方形 ABCD がある。点 P は，辺 AB 上を A から B まで毎秒 2cm の速さで動く。同時に，点 Q は，辺 BC 上を B から C まで毎秒 1cm の速さで動く。



(1) x 秒後の△ PBQ の面積 S を x で表せ。

(2) $S = 28\text{cm}^2$ となるのは何秒後か。

問 4 速さ 60m/s で，物体を真上に投げ上げるとき，始めから t 秒後の高さを h m とすると，およそ

$$h = 60t - 5t^2$$

となる。

(1) 6 秒後の高さを求めよ。

(2) この物体の高さが 175m となるのは何秒後か。

(3) もとの位置にもどってくるのは何秒後か。

＜ 2 次方程式と因数分解 ＞

前ページの例のように 2 次方程式の解と因数分解の関係は

$$x^2 + \square x + \triangle = 0 \text{ の解が } \alpha \text{ と } \beta \iff x^2 + \square x + \triangle = (x-\alpha)(x-\beta)$$

となる。

例 1 $x^2 + 2x - 3 = 0$ の解は $\underline{x = -3 \text{ と } x = 1}$ であるから

$$x^2 + 2x - 3 = \bigl(x - (-3)\bigr)(x-1) = (x+3)(x-1)$$

と因数分解できる。

例 2 $x^2 - x - 1 = 0$ の解は $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ であるから

$$x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

と因数分解できるはずである。

問 1 次を展開せよ。(途中式も書くこと)

$$\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

例 3 $2x^2 + 4x - 6 = 2\left(x^2 + 2x - 3\right) = 2(x+3)(x-1)$

この式は例 1 の結果を使った。

(注) $2x^2 + 4x - 6 = 0$ の解と $x^2 + 2x - 3 = 0$ の解は同じ。

一般に

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \text{ の解が } x = \alpha \text{ または } x = \beta} \cdots (1)$$

であれば

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)} \cdots (2)$$

と因数分解できる。逆に (2) であれば (1) がわかる。

問 2 次式を因数分解せよ。

(1) $x^2 - 2x - 3$

(2) $x^2 + 3x - 4$

(3) $x^2 - 3$

(4) $x^2 - x - 4$

(5) $2x^2 - 6x - 20$

(6) $3x^2 + 3x - 18$

(7) $9x^2 + 6x + 1$

(8) $3x^2 - 5x - 2$

＜因数定理＞

例1 2 次式 $f(x)=x^2-7x+10$ を因数分解したい。$x=2$ を代入すると

$$f(2)=2^2-7\times2+10=0$$

である。もし

$$f(x)=(x-2)\times(x+\square)$$

の形であれば $f(2)=0$ となる。そこで $x-2$ で割ると右の筆算より

$$\frac{f(x)}{x-2}=\frac{x^2-7x+10}{x-2}=x-5$$

となるから

$$\underline{f(x)=x^2-7x+10=(x-2)\times(x-5)}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & x-5 \\ \hline
x-2 & x^2-7x+10 \\
 & x^2-2x \\ \hline
 & \quad -5x+10 \\
 & \quad -5x+10 \\ \hline
 & \qquad 0
\end{array}$$

例2 3 次式 $f(x)=x^3-9x^2+23x-15$ を因数分解したい。$x=1$ を代入する。

$$f(1)=1^3-9\times1^2+23\times1-15=1-9+23-15=0$$

である。もし

$$f(x)=(x-1)(x^2+\triangle\,x+\square)$$

の形であれば $f(1)=0$ となる。そこで $x-1$ で割ると右の筆算より

$$\frac{f(x)}{x-1}=\frac{x^3-9x^2+23x-15}{x-1}=x^2-8x+15$$

より

$$f(x)=x^3-9x^2+23x-15=(x-1)\times(x^2-8x+15)$$

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2-8x+15 \\ \hline
x-1 & x^3-9x^2+23x-15 \\
 & x^3-x^2 \\ \hline
 & \quad -8x^2+23x \\
 & \quad -8x^2+8x \\ \hline
 & \qquad 15x-15 \\
 & \qquad 15x-15 \\ \hline
 & \qquad\quad 0
\end{array}$$

となる。2 次式 $x^2-8x+15$ をさらに因数分解すると $(x-3)(x-5)$ となるから

$$\underline{x^3-9x^2+23x-15=(x-1)(x-3)(x-5)}$$

一般に関数 $f(x)$ が n 次の整式のとき、$x=a$ を代入して $f(a)=0$ となれば $f(x)$ は $x-a$ で割り切れる。すなわち

$$\boxed{f(a)=0 \quad\Rightarrow\quad f(x)=(x-a)\times\Big((n-1)\text{ 次の整式}\Big)} \qquad \text{(因数定理)}$$

と表される。これを**因数定理**という。

問　次の 3 次式を因数分解せよ。

(1) x^3-3x^2-x+3

(2) x^3-6x+5

＜ 3 次方程式 ＞

例 1　3 次方程式

$$x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0 \qquad \cdots \qquad (1)$$

を考える。前ページより因数分解すると

$$(x-1)(x-3)(x-5) = 0$$

より (1) の解は $\underline{x = 1 \text{ または } x = 3 \text{ または } x = 5}$ である。

例 2　3 次方程式

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0 \qquad \cdots \qquad (2)$$

を考える。因数定理を用いて因数分解すると

$$(x-1)(x-2)^2 = 0$$

より (2) の解は $\underline{x = 1 \text{ または } x = 2}$ である。

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 4x + 4 \\
\hline
x-1 & x^3 - 5x^2 + 8x - 4 \\
 & x^3 - x^2 \\
\cline{2-2}
 & -4x^2 + 8x \\
 & -4x^2 + 4x \\
\cline{2-2}
 & 4x - 4 \\
 & 4x - 4 \\
\cline{2-2}
 & 0
\end{array}$$

例 3　3 次方程式

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \qquad \cdots \qquad (3)$$

を考える。因数定理を用いて因数分解すると

$$(x-2)^3 = 0$$

より (3) の解は $\underline{x = 2}$ である。

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 4x + 4 \\
\hline
x-2 & x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \\
 & x^3 - 2x^2 \\
\cline{2-2}
 & -4x^2 + 12x \\
 & -4x^2 + 8x \\
\cline{2-2}
 & 4x - 8 \\
 & 4x - 8 \\
\cline{2-2}
 & 0
\end{array}$$

問　次の 3 次方程式の解を求めよ。

(1) $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$　　　(2) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$

(3) $x^3 - 3x + 2 = 0$　　　(4) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$

＜解答 1 〜 7 ＞

＜ 1 ページ. 割合 ＞

問 1 の解答

(1) 7 割 3 分 , 73%　　(2) 4 割 2 分 5 厘 , 42.5%

問 2 の解答

(1) $\frac{5}{6}$　(2) $\frac{2}{3}$　(3) $\frac{2}{5}$　(4) $\frac{3}{5}$　(5) $\frac{1}{2}$

＜ 2 ページ. 比と比列配分 ＞

問 1 の解答

$3 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5} = 1.2\ (\mathrm{cm})$

問 2 の解答

$\mathrm{DE} = 4 \times \frac{4}{7} = \frac{16}{7}$

$\mathrm{AE} = 5 \times \frac{4}{7} = \frac{20}{7}$

問 3 の解答

$6000 \times \frac{5}{8} = \frac{300000}{8} = 37500$

＜ 3 ページ. 累乗 ＞

問 1 の解答

(1) 10^3　(2) 7^5　(3) $(-2)^3 \times 3^4$

問 2 の解答

(1)1　(2) − 1　(3)1　(4) − 1

(5) − 16　(6)16　(7) − 25　(8) − 48

(9)81000　(10)200　(11)729　(12)4

＜ 4 ページ. 素因数分解 ＞

問 1 の解答

(1) 1 , 2 , 3 , 6 , 9 , 18

(2) 1 , 2 , 3 , 4 , 6 , 8 , 12 , 24

問 2 の解答

23 , 29 , 31 , 37 41 , 43 , 47

問 3 の解答

(1)$2^2 \times 17$　(2)$2^2 \times 3^3$　(3)$2^2 \times 5 \times 7$

(4)$2^4 \times 3^2$　(5)$2^2 \times 3 \times 13$　(6)$2^2 \times 7^2$

(7)$3^2 \times 5^2$　(8)$2^2 \times 3^4$　(9)2^9

(10)2^{10}　(11)$2^4 \times 3^4$　(12)$2^9 \times 3$

＜ 5 ページ. 分数と少数 1 ＞

問 1 の解答

(1)$\frac{2}{10} \times \frac{13}{10} = 0.26$

(2) $\frac{4}{10} \times \frac{15}{100} = 0.06$

(3) $\frac{3}{100} \times \frac{104}{100} = 0.0312$

問 2 の解答

(1) $\frac{6}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{8}{5}$　,　検算： $\frac{8}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{5}$

(2) $\frac{5}{12} \div \frac{8}{3} = \frac{5}{32}$　,　検算： $\frac{5}{32} \times \frac{8}{3} = \frac{5}{12}$

(3) $\frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{24}$　,　検算： $\frac{5}{24} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{8}$

(4) $\frac{\frac{3}{10}}{\frac{7}{12}} = \frac{18}{35}$　,　検算： $\frac{18}{35} \times \frac{7}{12} = \frac{3}{10}$

＜ 6 ページ. 分数と少数 2 ＞

問 1 の解答

(1) $\frac{1}{2} = 0.50$, $\frac{1}{3} = 0.33$, $\frac{5}{6} = 0.83$, $\frac{2}{5} = 0.40$

(2) $\frac{3}{4} = 0.75$, $\frac{5}{6} = 0.83$, $\frac{8}{10} = 0.80$, $\frac{19}{12} = 1.58$

(3) $\frac{1}{6} = 0.16$, $\frac{1}{2} = 0.50$, $\frac{2}{8} = 0.25$, $\frac{2}{3} = 0.66$

(4) $\frac{11}{12} = 0.91$, $\frac{1}{4} = 0.25$, $\frac{12}{16} = 0.75$, $\frac{7}{6} = 1.16$

問 2 の解答

(1)$\frac{5}{6}$　(2)$\frac{19}{12}$　(3)$\frac{1}{6}$　(4)$\frac{7}{24}$

(5)$\frac{29}{12}$　(6)$\frac{65}{24}$　(7)$\frac{11}{10}$　(8)$\frac{11}{24}$

(9)$\frac{5}{3}$　(10)2　(11)$\frac{2.5}{8} = \frac{5}{16}$　(12)$\frac{1}{3}$

＜ 7 ページ. 分数と少数 3 ＞

問の解答

(1) $\frac{1}{7} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3} < 0.2$

(2) $\frac{3}{2} + \frac{1}{3} < \frac{17}{9} < 1.9$

(3) $-\frac{3}{4} - \frac{2}{5} < -1.13 < -\frac{9}{8}$

(4) $\frac{1}{3} < 0.34 < \frac{3}{4} - \frac{2}{5}$

(5) $-\frac{1}{6} - \frac{3}{4} < -\frac{8}{9} < -\frac{7}{8}$

(6) $\frac{5}{6} + \frac{3}{2} < \frac{25}{8} - \frac{3}{4} < \frac{12}{5}$

< 解答 8 〜 14 >

< 8 ページ. 通分 >

問の解答

(1) $\frac{7}{24}$　(2) $\frac{23}{36}$　(3) $\frac{3}{8}$

(4) $\frac{2x+3y}{6}$　(5) $\frac{2a-3b}{24}$　(6) $\frac{3x+y}{6}$

(7) $\frac{3y-ax}{3x}$　(8) $\frac{bc+ad}{ac}$　(9) $\frac{yz+xz+xy}{xyz}$

< 9 ページ. 分数の簡略化 >

問の解答

(1) $\frac{5}{7}$　(2) $\frac{3}{2}$　(3) $\frac{1}{7}$

(4) $\frac{12}{13}$　(5) $\frac{ad}{bc}$　(6) $\frac{xy}{zw}$

(7) $\frac{xz}{yz+xw}$　(8) $\frac{1}{bc-ad}$　(9) $\frac{abc}{bc+ac+ab}$

< 10 ページ. 数としての文字 >

問 1 の解答

$y=5,\ z=10,\ w=2$

問 2 の解答

(1) $\begin{cases} x=5 \\ y=6 \\ z=1 \\ w=2 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x=7 \\ y=6 \\ z=8 \\ w=1 \end{cases}$

問 3 の解答

(1) $\begin{cases} x=12 \\ y=9 \\ z=4 \end{cases}$

< 11 ページ.1 次方程式 >

問の解答

(1) $x=\frac{1}{3}$　(2) $x=-6$　(3) $x=6$

(4) $x=\frac{7}{3}$　(5) $x=1$　(6) $x=\frac{12}{7}$

(7) $x=-2$　(8) $x=\frac{9}{10}$　(9) $x=-11$

(10) $x=\frac{23}{3}$　(11) $x=2$　(12) $x=-1$

(13) $x=7$　(14) $x=\frac{3}{2}$

< 12 ページ.1 次方程式の応用 >

問 1 の解答

リンゴ 1 個 80 円

(答) みかん 1 個 60 円

問 2 の解答

本 : x 円

A の残金 :
$$\begin{aligned} 4800-x&=2(3600-x) \\ 4800-x&=7200-2x \\ x&=7200-4800=2400 \end{aligned}$$

(答) 2400 円

問 3 の解答

部屋数 : x 円

A の残金 :
$$\begin{aligned} 7x+6&=8(x-1)+5 \\ 7x+6&=8x-3 \\ x&=9 \end{aligned}$$

部屋数 9 室

(答) 生徒数 69 人

< 13 ページ. 連立 1 次方程式 >

問の解答

(1) $x=2$, $y=3$　(2) $x=4$, $y=-2$

(3) $x=-2$, $y=3$　(4) $x=5$, $y=4$

< 14 ページ. 連立 1 次方程式の応用 1 >

問 1 の解答

A4 ノート 7 冊

(答) B5 ノート 13 冊

問 2 の解答

大人 60 人

(答) 子供 40 人

問 3 の解答

昨年度男生徒 : x 人

昨年度女生徒 : y 人

$$x+y=600$$
$$1.03x+0.97y=606$$

昨年度男生徒 400 人

昨年度女生徒 200 人

今年男生徒 412 人

(答) 今年女生徒 194 人

＜ 解答 15 〜 21 ＞

＜ 15 ページ. 連立 1 次方程式の応用 2 ＞

問 1 の解答

リンゴ 30 個

(答) みかん 50 個

問 2 の解答

鉛筆 1 本 60 円

(答) ノート 1 冊 130 円

問 3 の解答

(答) 1100 円

＜ 16 ページ.3 元連立 1 次方程式 ＞

問 1 の解答

ケーキ x (円) , プリン y (円) , ドーナッツ z (円) とすると

$$x+2y+3z=390$$
$$2x+3y+z=460$$
$$3x+4y+2z=680$$

これを解くと， $x=100$, $y=70$, $z=50$

(答) ケーキ 100 (円) ， プリン 70 (円) ， ドーナッツ 50 (円)

問 2 の解答

100 円硬貨 x (g) ,50 円硬貨 y (g) ,1 円硬貨 z (g) とすると

$$x+y+z=10$$
$$2x+3y+4z=26$$
$$3x+y+2z=21$$

これを解くと， $x=5$, $y=4$, $z=1$

(答) 100 円硬貨は 5 (g) ， 50 円硬貨は 4 (g) ， 1 円硬貨は 1 (g)

＜ 17 ページ. 省略記号の変更 ＞

問 1 の解答

(1) $5x$ (2) $6x^2y^5$

(3) a^3-3a^2b (4) $12x^3-9x^2y$

問 2 の解答

(1) $\frac{4}{3}$ (2) $\frac{15}{4}$ (3) $\frac{21}{5}$ (4) $\frac{20}{3}$

＜ 18 ページ. 文字式のきまり ＞

問の解答

(1) $6a^2b^3x$ (2) $x-8y+xy$

(3) $\frac{2y}{5x}$ (4) $\frac{3b^2}{4a}$

(5) $3x^2y$ (6) $9b^2$

＜ 19 ページ. 等式の変形 ＞

問の解答

(1) $R=\frac{E}{I}$

(2) $P=\frac{2\pi R}{V}$

(3) $T_1=T_2-\frac{LH}{KA}$

(4) $N=9.74\times 10^5\frac{P}{T}$

(5) $\alpha=\frac{\sigma}{E(t-\tau)}$

(6) $E=2(1+\mu)G$

(7) $\psi=\frac{\lambda\omega}{\lambda+\omega}$

(8) $R=\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}$

(9) $v=\frac{m_1+m_2}{m_1}\sqrt{2gh}$

(10) $x=x_0+\frac{v^2-v_0^2}{2a}$

＜ 20 ページ. 文字式の展開 1 ＞

問 1 の解答

(1) $S=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

(2) $S=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

問 2 の解答

$$S=a^2-b^2$$
$$=(a+b)(a-b)$$

＜ 21 ページ. 文字式の展開 2 ＞

問の解答

(1) $a^2-2ab+b^2$

(2) $a^2+ab+ac+bc$

(3) $a^2+ab-ac-bc$

(4) $a^2-ab-ac+bc$

(5) b^2-a^2

(6) $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

(7) $a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$

(8) $a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$

< 解答 22 〜 29 >

< 22 ページ. 文字式の展開 3 >

問の解答

(1)a^3+b^3 (2)$a^3+a^2b-ab^2-b^3$

(3)$a^3+a^2b-ab^2-b^3$ (4)a^4-b^4

(5)$a^4-2a^2b^2+b^4$

< 23 ページ. ピタゴラスの定理 1 >

問の解答

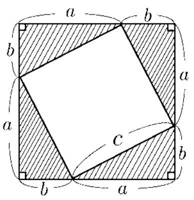
図 5 の全体の面積は $(a+b)^2$ であるがそれは斜線部分の 4 つの直角三角形 (面積 $\frac{ab}{2}\times 4$) と内部の正方形 (面積 c^2) の和であるから

$$\frac{ab}{2}\times 4+c^2=(a+b)^2$$

より移項して展開すると求める式が得られる。

$$\begin{aligned} c^2 &= (a+b)^2-\frac{ab}{2}\times 4 \\ &= a^2+2ab+b^2-2ab \\ &= a^2+b^2 \end{aligned}$$

(証明終)



(図5)

< 24 ページ. ピタゴラスの定理 2 >

問の解答

(1)$c=13$ (2)$b=12$ (3)$a=8$

(4)$b=30$ (5)$a=11$

< 25 ページ. 平方根 1 >

問 1 の解答

(1) 4 (2) 16 (3) $\frac{6}{7}$ (4) $\frac{1}{2}$ $(=0.5)$

問 2 の解答

OD $=2$, OE$=\sqrt{5}$, OF$=\sqrt{6}$, OG $=\sqrt{7}$

< 26 ページ. 平方根 2 >

問 1 の解答

(1) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ (2) $6\sqrt{2}-5\sqrt{3}$

(3) $7\sqrt{5}$ (4) $-\sqrt{5}+5\sqrt{3}+3\sqrt{2}$

問 2 の解答

(1) 11 , (2) 5 , (3) $\frac{2}{3}$, (4) 0.12

問 3 の解答

(1) $\sqrt{6}$, (2) $\sqrt{35}$, (3) $2\sqrt{11}$, (4) 6

< 27 ページ. 平方根 3 >

問 1 の解答

(1) $3\sqrt{2}$ (2) $2\sqrt{10}$ (3) $5\sqrt{3}$

(4) $4\sqrt{5}$ (6) $7\sqrt{3}$

問 2 の解答

(1) 10 (2) 21 (3) 42

問 3 の解答

(1) 2 (2) $3\sqrt{3}$ (3) $3\sqrt{3}$

< 28 ページ. 平方根 4 >

問 1 の解答

(1)$7+2\sqrt{10}$ (2)$8+4\sqrt{3}$ (3)$5-2\sqrt{6}$

(4)$9-6\sqrt{2}$ (5)3 (6)1

問 2 の解答

(1) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $\sqrt{3}$ (4) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (5) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

問 3 の解答

(1) $3\sqrt{3}-3\sqrt{2}$ (2) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$

(3) $\frac{3(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$ (4) $5-2\sqrt{6}$

< 29 ページ. 数の表示 1 >

問 1 の解答

① $(10)_{10}$ ② $(27)_{10}$ ③ $(156)_{10}$

④ $(455)_{10}$ ⑤ $(1025)_{10}$

問 2 の解答

① $(25)_8$ ② $(55)_8$ ③ $(117)_8$ ④ $(234)_8$

問 3 の解答

① $3+\frac{1}{10}+\frac{4}{10^2}$ ② $1+\frac{5}{8}$ ③ $5+\frac{7}{8}+\frac{3}{8^2}$

＜ 解答 30 〜 37 ＞

＜ 30 ページ. 数の表示 2 ＞

問 1 の解答

$a+b+c=3n$ （n は自然数) とおく、

$(abc)_{10}=100a+10b+c$

$=99a+9b+(a+b+c)$

$=3(33a+3b)+3n=3(33a+3b+n)$

より $(abc)_{10}=3\times(33a+36+n)$ は 3 の倍数になる。

(証明終)

問 2 の解答

$a+b+c=(x-1)n$ 　(n は自然数) とおく、

$(abc)_x=ax^2+bx+c=a(x^2-1)+b(x-1)+a+b+c$

$=a(x-1)(x+1)+b(x-1)+(x-1)n$

$=(x-1)\{a(x+1)+b+n\}$

より $(abc)_x=(x-1)\{a(x+1)+b+n\}$ は

$(x-1)$ の倍数になる。 (証明終)

＜ 31 ページ. 整式 1 ＞

問の解答

$(abcd)_x=ax^3+bx^2+cx+d$

＜ 32 ページ. 整式 2 ＞

問の解答

(1) x^2+5x+3 　(2) $-2x^2+3x-3$

(3) x^2-x-6 　(4) $-20x^2+39x-18$

＜ 33 ページ. 整式 3 ＞

問 1 の解答

(1) $-2x^2+9x-13$ 　(2) $-15x^2+17x-4$

問 2 の解答

(1) $x^2+2ax+a^2$ 　(2) $x^2-2ax+a^2$

(3) x^2-a^2 　(4) $x^2-(a+b)x+ab$

(5) x^3-a^3 　(6) $x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$

＜ 35 ページ. 整式の除法 2 ＞

問 1 の解答

$$
\begin{array}{r|l}
 & \boxed{3}x+\boxed{2} \quad \text{---------- 商} \\
\hline
2x+1 & 6x^2+7x+3 \\
 & \boxed{6}x^2+\boxed{3}x \\
\hline
 & \quad\quad \boxed{4}x+3 \\
 & \quad\quad \boxed{4}x+\boxed{2} \\
\hline
 & \quad\quad\quad\quad \boxed{1} \quad \text{----- 余り}
\end{array}
$$

問 2 の解答

(1) 商 $x+3$, 　余り 3

(2) 商 $3x-1$, 　余り 9

(3) 商 x^2+x+2, 　余り 5

(4) 商 $2x+7$, 　余り $x-13$

(5) 商 x^2+2x+4, 　余り 0

＜ 36 ページ. 整式の除法 3 ＞

問の解答

(1) $x+2-\dfrac{2}{x+1}$ 　(2)$x+5+\dfrac{15}{x-2}$

(3) $2x-1-\dfrac{2}{x-1}$ 　(4) $x^2-2x+1+\dfrac{1}{x-3}$

＜ 37 ページ. 方程式と恒等式 ＞

問 1 の解答

(1) $x=0$ のとき 　$(x+2)(x+3)=6$ 　$x^2+5x+6=6$

(2) $x=1$ のとき 　$(x+2)(x+3)=12$ 　$x^2+5x+6=12$

(3) $x=2$ のとき 　$(x+2)(x+3)=20$ 　$x^2+5x+6=20$

(4) $x=3$ のとき 　$(x+2)(x+3)=30$ 　$x^2+5x+6=30$

(5) $x=4$ のとき 　$(x+2)(x+3)=42$ 　$x^2+5x+6=42$

問 2 の解答

(1) $x^2+2\alpha x+\alpha^2$ 　(2) $x^2-2\alpha x+\alpha^2$

(3) $x^2-\alpha^2$ 　(4) $x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$

(5) $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$ 　(6) $x^2+(\alpha-\beta)x-\alpha\beta$

問 3 の解答

(1) 方程式 　(2) 恒等式 　(3) 恒等式 　(4) 方程式

＜ 解答 38 ～ 44 ＞

＜ 38 ページ. 因数分解 1 ＞

問の解答

(1) $x^2+4x+4=(x+2)^2$

(2) $x^2-10x+25=(x-5)^2$

(3) $x^2-9=(x+3)(x-3)$

(4) $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$

＜ 39 ページ. 因数分解 2 ＞

問の解答

(1) $(x+\alpha)^2$　(2) $(x-\alpha)^2$

(3) $(x-\alpha)(x+\alpha)$　(4) $(x-\alpha)(x-\beta)$

(5) $(x+\alpha)(x-\beta)$

＜ 40 ページ. 因数分解 3 ＞

問の解答

(1) $(x+3)^2$　(2) $(x-5)^2$

(3) $(x+6)^2$　(4) $(x-3)(x+3)$

(5) $\left(x-2\sqrt{2}\right)\left(x+2\sqrt{2}\right)$　(6) $(x-1)(x+1)$

(7) $(x+1)(x+2)$　(8) $(x+2)(x+3)$

(9) $(x+2)(x+5)$　(10) $(x+3)(x+4)$

＜ 41 ページ. 因数分解 4 ＞

問 1 の解答

(1) $(x+3)(x+5)$　(2) $(x+1)(x+5)$

(3) $(x+3)(x+7)$　(4) $(x-3)(x-8)$

(5) $(x-3)(x+5)$　(6) $(x+1)(x-7)$

問 2 の解答

(1) $(2x+1)(x+2)$　(2) $(2x+3)(2x+5)$

(3) $(2x+1)(x-3)$　(4) $(x-2)(3x+2)$

(5) $(x-3)(3x-1)$　(6) $(2x+1)(3x-2)$

＜ 42 ページ. 因数分解 5 ＞

問 1 の解答

(1) $3a(x+3)(x-3)$　(2) $2a(a+3b)(a-3b)$

(3) $(x-y)(a-b)$　(4) $a(x-2)(x-3)$

(5) $(a-b)(x+y)(x-y)$　(6) $11(x+3)(x-3)$

問 2 の解答

(1) $2xy(x+3y)$　(2) $(a+2b)(a+2b-3)$

(3) $(3x+7)(3x-7)$　(4) $(x+y)(a-b)$

(5) $3(a+5b)(a-5b)$　(6) $(1+3x)(1-3x)$

＜ 43 ページ.2 次方程式の解の公式 ＞

① $x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0$

② $x^2+\dfrac{b}{a}x=-\dfrac{c}{a}$

③ $x^2+\dfrac{b}{a}x+\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2=-\dfrac{c}{a}+\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$

④ $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$

⑤ $x+\dfrac{b}{2a}=\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

⑥ $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

問の解答

(1) $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$　(2) $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

＜ 44 ページ.2 次方程式 ＞

問の解答

(1) $x=-2\,,\ \dfrac{4}{3}$　(2) $x=0\,,\ -7$

(3) $x=3\,,\ -5$　(4) $x=2\,,\ 4$

(5) $x=2\sqrt{3}\,,\ -2\sqrt{3}$　(6) $x=-3+\sqrt{2}\,,\ -3-\sqrt{2}$

(7) $\dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$　(8) $\dfrac{7\pm\sqrt{13}}{6}$

(9) $6\pm4\sqrt{2}$　(10) $x=-1\,,\ 9$

＜解答 46 〜 49＞

＜ 46 ページ.2 次方程式の応用 ＞

問 1 の解答

8cm と 12cm

問 2 の解答

道幅を x (m) とすると

$(20-x)(27-x)=450$

$x=45,\ 2$

$0<x<20$ より　　$\underline{x=2}$

問 3 の解答

4 秒後

問 4 の解答

(1) 180 (m)

(2) $\begin{cases} 5 \text{ 秒後} \\ 7 \text{ 秒後} \end{cases}$

(3) 12 秒後

＜ 47 ページ.2 次方程式と因数分解 ＞

問 1 の解答

$$x^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)x-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$=x^2-\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}x+\frac{(1+\sqrt{5})\times(1-\sqrt{5})}{2\times 2}$$

$$=x^2-\frac{2}{2}x+\frac{1^2-(\sqrt{5})^2}{4}=x^2-x-1$$

問 2 の解答

(1) $(x-3)(x+1)$　　(2) $(x+4)(x-1)$

(3) $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$　　(4) $\left(x-\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$

(5) $2(x-5)(x+2)$　　(6) $3(x+3)(x-2)$

(7) $(3x+1)^2=9\left(x+\frac{1}{3}\right)^2$　　(8) $(3x+1)(x-2)$

＜ 48 ページ. 因数定理 ＞

問の解答

(1) $(x^2-1)(x-3)=(x-3)(x-1)(x+1)$

(2) $(x-1)(x^2+x-5)$

$=(x-1)\left(x+\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{21}}{2}\right)$

$$\begin{array}{r|l} & x^2+x-5 \\ \hline x-1 & x^3\qquad -6x+5 \\ & x^3-x^2 \\ \hline & x^2-6x \\ & x^2-x \\ \hline & -5x+5 \\ & -5x+5 \\ \hline & 0 \end{array}$$

＜ 49 ページ.3 次方程式 ＞

問の解答

(1) $x=-3$　または　$x=-1$　または　$x=1$

(2) $x=-3$　または　$x=-1$　または　$x=2$

(3) $x=-2$　または　$x=1$

(4) $x=-1$