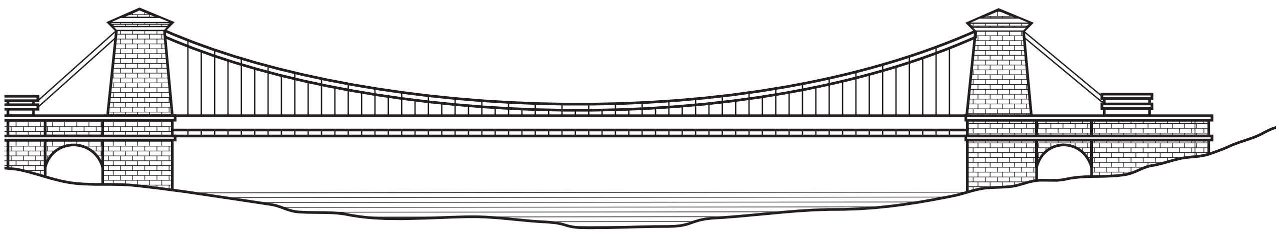
高知工科大学
Kochi University of Technology

基　礎　数　学
2

（2006年度版）



指数・対数・三角関数・微分・積分

山﨑 和雄　著

< 指数の拡張 >

a を n 個掛け合わせたものを a の n 乗といい、a^n で表す。
このとき、n を a^n の**指数**という。

m, n が自然数のとき、次の指数法則が成り立つ。

$$a^m \times a^n = a^{m+n}, \qquad (a^m)^n = a^{mn}, \qquad (ab)^n = a^n b^n$$

問 1　次の計算をせよ。

(1) $x^3 \times x^4$　　(2) $x^2 \times x$　　(3) $(x^3)^4$

(4) $(x^2)^4$　　(5) $(ab)^3$　　(6) $(a^2b^3)^4$

指数が 0 や負の整数のとき a^n をどのように定めるかを考えてみる。

0 や負の整数について、次のように定める。

$a \neq 0$ とき、　$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

問 2　次の値を求めよ。

(1) 3^0　　(2) 5^{-1}

(3) 5^{-2}　　(4) 0.1^{-1}

(5) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$　　(6) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-1}$

問 3　次の計算を行い、結果を負の整数を用いないで表せ。

(1) $3x \times 5x^4$　　(2) $(-3x^2)^3$

(3) $x^3y \times yx^3$　　(4) $\left(\dfrac{1}{3}xy^2\right)^2 \times 27x^2y$

(5) $32x^2y^3 \times \left(-\dfrac{1}{2}x^2y\right)^3$　　(6) $(-3ab^2)^2 \times (-2a^2b)^3$

< 分数の指数 >

3 乗すると a となる正の数を $\sqrt[3]{a}$ と表した。
このとき,

$$(a^{\frac{1}{3}})^3 = a^{\frac{1}{3}\times 3} = a^1 = a$$

となるから,

$$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$$

となることがわかる。また,

$$a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}\times 2} = (a^{\frac{1}{3}})^2 = (\sqrt[3]{a})^2$$

$$a^{\frac{2}{3}} = a^{2\times\frac{1}{3}} = (a^2)^{\frac{1}{3}} = (\sqrt[3]{a^2})$$

したがって,

$$a^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{a})^2 = \sqrt[3]{a^2}$$

まとめると,

$a > 0, m$ が整数, n が整数のとき

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[n]{a^m})$$

また, 指数がどのような整数や分数 (有理数) であっても, 次の指数法則が成り立つ。

$a > 0,\ \ b > 0$ で, p, q が有理数のとき,

$$a^p \times a^q = a^{p+q} \qquad (a^p)^q = a^{pq} \qquad (ab)^p = a^p b^p$$

問 1　次の計算をせよ。(ただし, $a > 0,\ \ b > 0$ とする)

(1) $\sqrt{a} \times \sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[6]{a^5}$　　(2) $a\sqrt{a} \div \sqrt[3]{a}$

(3) $\sqrt{ab^3} \div \sqrt[3]{a^2 b}$　　(4) $\sqrt[6]{a^3 b} \times \sqrt[3]{ab} \div \sqrt[3]{ab^2}$

問 2　次の値を求めなさい。

(1) $4^{\frac{1}{2}}$　　(2) $27^{\frac{2}{3}}$　　(3) $8^{\frac{2}{3}}$　　(4) $\left(\dfrac{1}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$

(5) $(-4)^3$　　(6) $(-27)^{\frac{1}{3}}$　　(7) $9^{\frac{3}{2}}$　　(8) $16^{\frac{3}{4}}$

< 指数関数とそのグラフ >

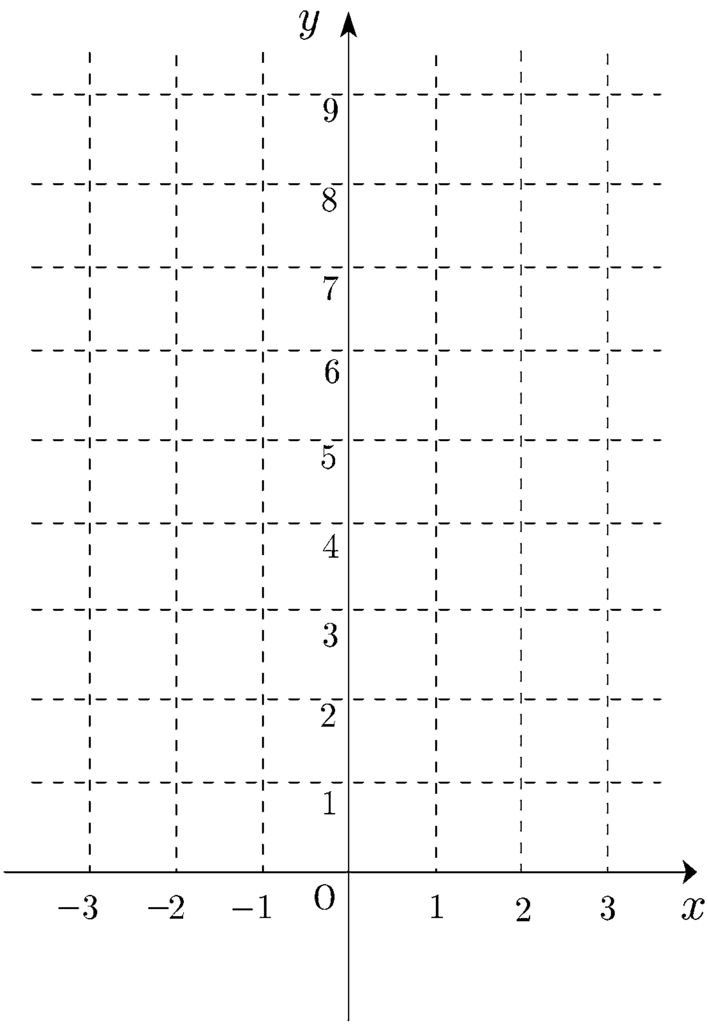
問 (1) $y = 2^x$ と, (2) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ のグラフを表を完成してからかきなさい。

(1) $y = 2^x$

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
y	$\cdots$								$\cdots$

(2) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
y	$\cdots$								$\cdots$

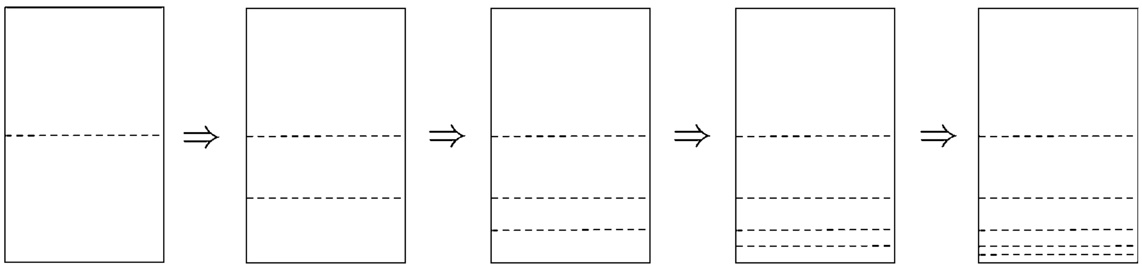


< $y = 2^x$ のグラフ >

$y = 2^x$ のグラフを A4 の用紙を使って描いてみよう

①

$1/2 = 2^{-1}$　　$1/4 = 2^{-2}$　　$1/8 = 2^{-3}$　　$1/16 = 2^{-4}$　　$1/32 = 2^{-5}$



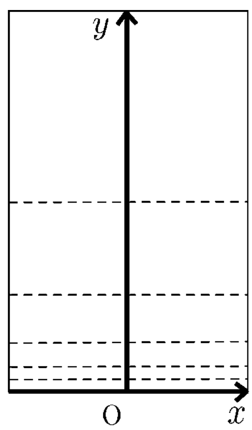
半分に折って折り目をつける ⇒ つづけて半分折る ⇒ さらに半分に折る ⇒ つづける ⇒ つづける

② 次に **A4** の用紙に

x 軸（用紙の下に描く）

y 軸（用紙の中心に描く）

それから、適正な目盛りをつける。



$y = 2^x$ のグラフ

③ 気がついたことを自由に書いてみよう。

< 常用対数 >

「$100 = 10^r$ となる r の値はいくらか」という問題の答えは 2 である。

このことを

$\log_{10} 100 = 2$　　　　(log はログと読む。)

と表す。

$\log_{10} 100$ ということは、「100 は 10 の何乗になるか」という意味である。

このことを、一般化すると、正の数 R に対して

$$R = 10^r$$

となるような数 r を、

$$\log_{10} R$$

と表す。$\log_{10} R$ を R の**常用対数**という。また 10 を**底**という。

100 は 10^2 である。これを $\log_{10} 100 = 2$ と表し、100 の常用対数は 2 であることを意味する。

つまり、対数という意味は「与えられた数に対する指数のこと」と考えるとよい。

問 1　次の式を $\log_{10}$ の記号を用いて表せ。

(1)　$1000 = 10^3$　　(2)　$1 = 10^0$

(3)　$0.01 = 10^{-2}$　　(4)　$\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}}$

問 2　次の値を求めよ。

(1)　$\log_5 125$　　(2)　$\log_{16} 4$

(3)　$\log_3 \sqrt{3}$　　(4)　$\log_{\frac{1}{2}} 16$

< 一般の対数 >

$8 = 2^3$ である。このことを

$$\log_2 8 = 3$$

と表して、これを

「2 を底とする 8 の対数は 3 である。」という。

一般に、$R = a^r$ のとき　　(a は 1 でない正の数とする)

$$\log_a R = r$$

と表し、

「a を底とする R の対数は r である」という。

つぎに、$\log_a M, \log_a N$ の値が与えられているとき、

1.　$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

の式が成り立つことを証明する。

$$\log_a M = m, \quad \log_a N = n$$

とおくと、

$$M = a^m, \quad N = a^n$$

となる。

$$MN = M \times N = a^m \times a^n = a^{m+n}$$

であるから

$$\log_a MN = m + n = \log_a M + \log_a N$$

となる。

問 1　指数法則

$$a^m \div a^n = a^{m-n}, (a^m)^n = a^{mn}$$

を利用して、次の性質を導け。

2.　$\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

3.　$\log_a M^n = n \log_a M$

問 2　次の式を簡単にせよ。

(1)　$\log_3 27$

(2)　$\log_{10} \dfrac{1}{10000}$

(3)　$\log_4 2 + \log_4 32$

(4)　$\log_3 \sqrt{54} - \log_3 \sqrt{6}$

(5)　$\log_2 \dfrac{8}{3} + \log_2 6$

(6)　$\log_5 75 - \log_5 3$

＜ 底の変換の公式 ＞

$a^0 = 1,\quad a^1 = a$ であるから、

$$\log_a 1 = 0, \qquad \log_a a = 1$$

が成り立つことがわかる。

次に、a を底とする対数 $\log_a b$ を、c を底とする対数で表してみよう。

$$\log_a b = p$$

とおくと

$$a^p = b$$

両辺に、c を底とする対数をとると

$$\log_c a^p = \log_c b \qquad p\log_c a = \log_c b$$

$a \neq 1$ であるから、$\log_c a \neq 0$

したがって

$$p = \frac{\log_c b}{\log_c a} \qquad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \text{(底の変換の公式)}$$

とくに

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

問　次の式を計算せよ。

(1)　$\log_{10} 60 + 2\log_{10}\sqrt{5} - \log_{10} 3$

(2)　$\log_2 4 - \log_2 3 + \log_2 6$

(3)　$\log_8 5 \cdot \log_{49} 16 \cdot \log_5 7$

(4)　$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a$

(5)　$\left(\log_3 \sqrt{2} + \log_9 \sqrt[3]{4}\right)\log_2 3$

(6)　$\dfrac{3}{2}\log_{10} 2 + \dfrac{1}{2}\log_{10}\dfrac{1}{6} - \log_{10}\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

< 対数関数とそのグラフ >

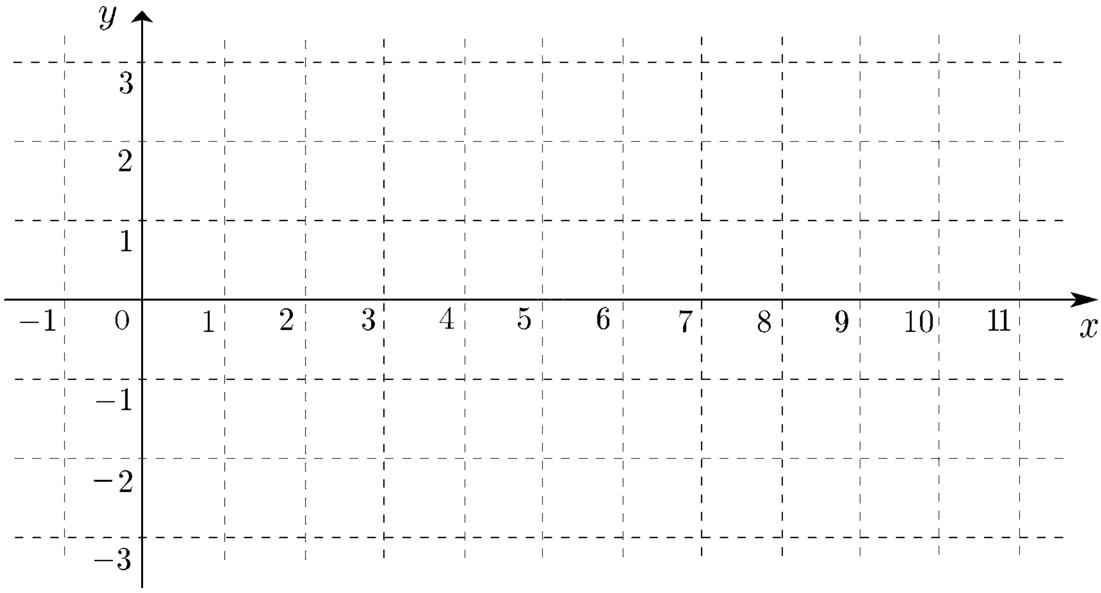
問 (1) $y = \log_2 x$ と, (2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフを表を完成してからかきなさい。

(1) $y = \log_2 x$

x	$\cdots$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	$\cdots$
y										

(2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

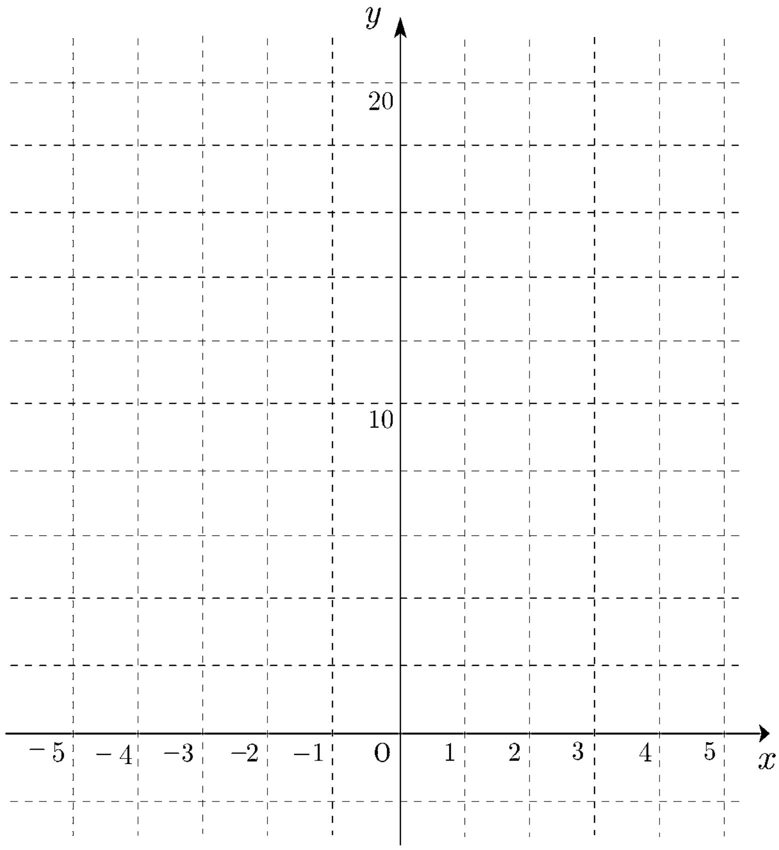
x	$\cdots$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	$\cdots$
y										



< 関数のグラフ >

問 1　次の関数のグラフを同じ座標平面上にかけ。

1. $y = x^2$
2. $y = x$
3. $y = 2^x$
4. $y = 2^{-x}$



問 2　1. $y = x$ と $y = x^2$ の交点の座標を求めよ。

2. $x \geqq 0$ のとき、$y = x^2$ と $y = 2^x$ の交点の座標を求めよ。

3. $x \leqq 0$ のとき、$y = x^2$ と $y = 2^{-x}$ の交点の座標を求めよ。

＜ 指数関数と対数関数の比較 ＞

指数関数 $y = 2^x$　　　対数関数 $y = \log_2 x$

1. 定義

真数 $M > 0$

$$a^p = M \iff p = \log_a M$$

底 $a > 0$, $a \neq 1$

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1$$

2. 指数法則

① $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\longleftrightarrow$ $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

② $a^m \div a^n = a^{m-n}$ $\longleftrightarrow$ $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

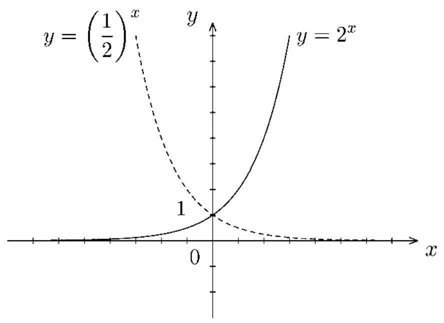
③ $(a^m)^n = a^{mn}$ $\longleftrightarrow$ $\log_a M^k = k \log_a M$

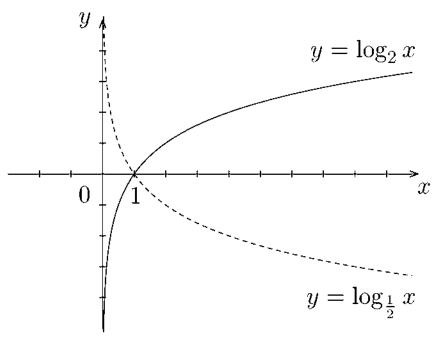
④ $(ab)^n = a^n b^n$　　$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ (底の変換の公式)

(条件. $a > 0$, $b > 0$, m , n は有理数)

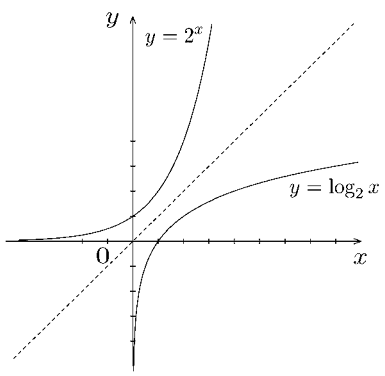
(条件. $a > 0$, $a \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$, k は実数)
$b > 0$, $b \neq 1$, $c > 0$, $c \neq 1$,

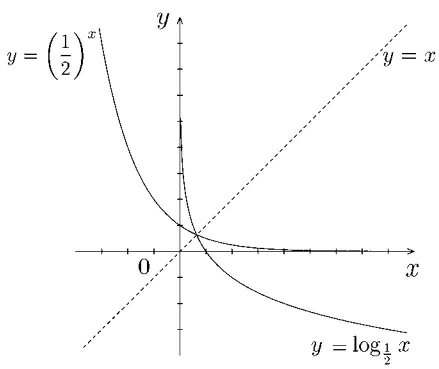
3. グラフ





4. グラフ





5. わかったことを書きなさい。

1.

2.

< 指数・対数の練習 A >

1. 次の計算をせよ。

(1) $a^5 \times a^{-3}$ (2) $(a^{-3})^2$ (3) $(a^2b^{-1})^2$ (4) $(ab^{-2})^{-2}$

(5) $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a^2}$ (6) $a^2 \div a^{-3}$ (7) $a^{-\frac{1}{2}} \times a^{\frac{5}{6}} \div a^{\frac{1}{3}}$

2. 次の値を求めよ。

(1) $\sqrt[3]{125}$ (2) $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9}$ (3) $\sqrt[4]{16}$ (4) $\sqrt[3]{-8}$

(5) $(0.1)^{-1}$ (6) $27^{\frac{2}{3}}$ (7) $3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{3}{2}}$ (8) $\sqrt[4]{25} \times \sqrt[6]{125}$

3. 次の関数のグラフをかけ。

(1) $y = 3^x$ (2) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

4. 次の値を計算せよ。

(1) $\log_{10} 1$ (2) $\log_{10} 10$ (3) $\log_{10} 100$ (4) $\log_{10} 0.1$

(5) $\log_{10} \dfrac{1}{100}$ (6) $\log_2 4$ (7) $\log_6 4 + \log_6 9$ (8) $\log_3 15 - \log_3 5$

(9) $\dfrac{1}{2} \log_7 49$ (10) $(\log_2 3) \times (\log_3 2)$

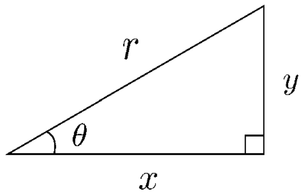
5. 次の関数のグラフをかけ。

(1) $y = \log_3 x$ (2) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

6. 次の方程式を解け。

(1) $2^{x+2} = 16$ (2) $\log_5 x - \log_5 2 = 2$

< 三角比 (1) >



右の図のように，直角三角形の鋭角のひとつを θ とする。

斜辺の長さを r，他の辺の長さを x, y とするとき，

$$\frac{y}{r}, \qquad \frac{x}{r}, \qquad \frac{y}{x},$$

の値は，三角形の大きさに関係なく，角 θ の大きさだけで決まる。

これらを，それぞれ θ の

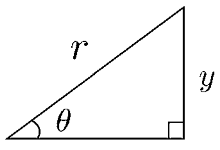
正弦 (sine),　**余弦** (cosine),　**正接** (tangent)

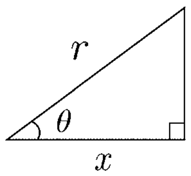
といい，$\sin\theta$,　$\cos\theta$,　$\tan\theta$ と表す。すなわち

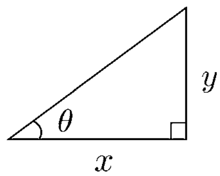
$$\sin\theta = \frac{y}{r}, \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

となる。

三角比の定義





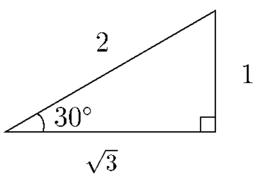


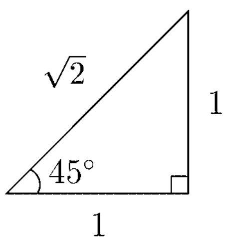
$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

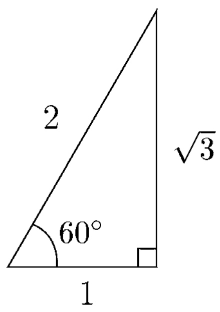
この定義により，辺の長さは，次のように表せる。

$$y = r\sin\theta \qquad x = r\cos\theta \qquad y = x\tan\theta$$

30°,　45°,　60° の三角比は，下の図から求められる。







$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \qquad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

問　下の表を完成せよ。

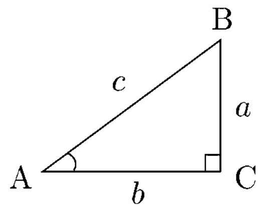
θ	30°	45°	60°
$\sin\theta$			
$\cos\theta$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$\tan\theta$			

$<$ 三角比 (2) $>$

右の直角三角形 ABC で,

$$a = c \sin A$$

$$b = c \cos A$$



$* \ \frac{a}{c} = \sin A$ より
$a = c \sin A$

$* \ \frac{b}{c} = \cos A$ より
$b = c \cos A$

であるから,

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{c \sin A}{c \cos A} = \frac{\sin A}{\cos A}$$

となる。したがって,

$$\boxed{\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \qquad (1)}$$

また, 三平方の定理から,

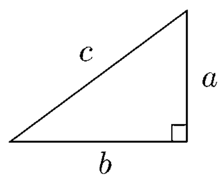
$$a^2 + b^2 = c^2$$

うえの式に, $a = c \sin A$ と, $b = c \cos A$ を代入して

$$(c \sin A)^2 + (c \cos A)^2 = c^2$$

$$c^2(\sin A)^2 + c^2(\cos A)^2 = c^2$$

$*$ 三平方の定理



$a^2 + b^2 = c^2$

両辺を, c^2 で割ると

$$(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1$$

$(\sin A)^2 = \sin^2 A$, $(\cos A)^2 = \cos^2 A$ と表すと, 次の式が成り立つ。

$$\boxed{\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \qquad (2)}$$

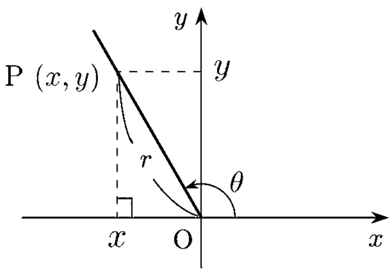
(1), (2) の式を使うと,$\sin A, \cos A, \tan A$ のうち, どれかひとつがわかると残りのふたつの値を求めることができる。

問　$\sin A = \dfrac{2}{3}$ のとき、$\cos A, \tan A$ の値を求めよ。

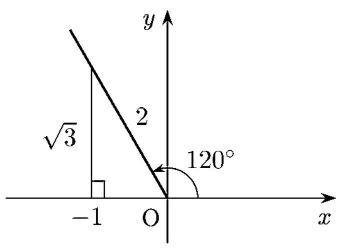
＜ 三角比と座標 ＞

0°〜360° まで角の範囲を拡張して, その三角比を座標を用いて表してみよう。

下の図のように原点 O から, x 軸の正の部分 $(x \geqq 0)$ となす角が θ の半直線を引き, その上に, $OP = r$ となる点 $P = (x, y)$ をとる。



例



$$* \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$* \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$
$$* \tan 120^\circ = -\sqrt{3}$$

このとき, 三角比を次のように定義する。

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

問　次の表を完成せよ。

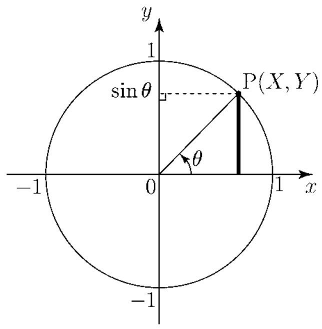
θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$									
$\cos\theta$			$\frac{\sqrt{2}}{2}$						
$\tan\theta$					╳				

θ	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin\theta$								
$\cos\theta$								
$\tan\theta$				╳				

< 三角関数のグラフ (1) >

$y = \sin\theta$ のグラフ

原点を中心とする半径 1 の円を単位円という。

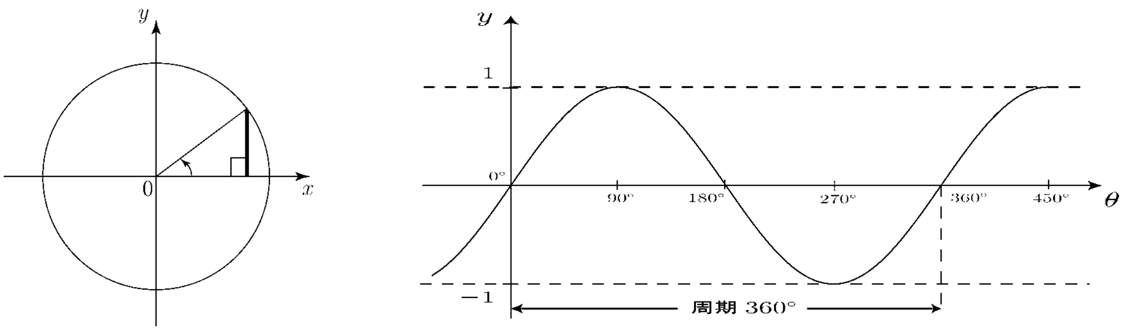


単位円上の点 P の座標は $(\cos\theta, \sin\theta)$ である。

すなわち, 点 P の y 座標が $\sin\theta$ であるから

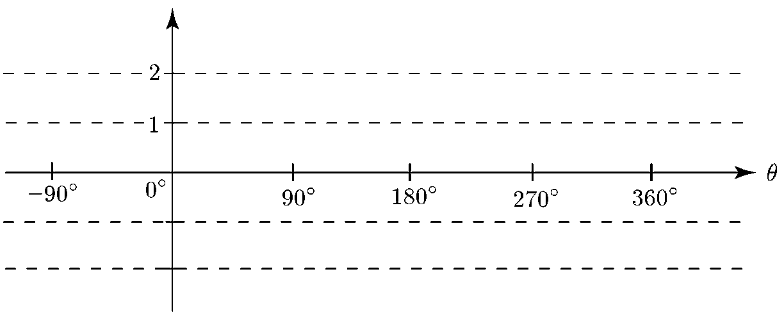
$$y = \sin\theta$$

のグラフは, 次のようになる。

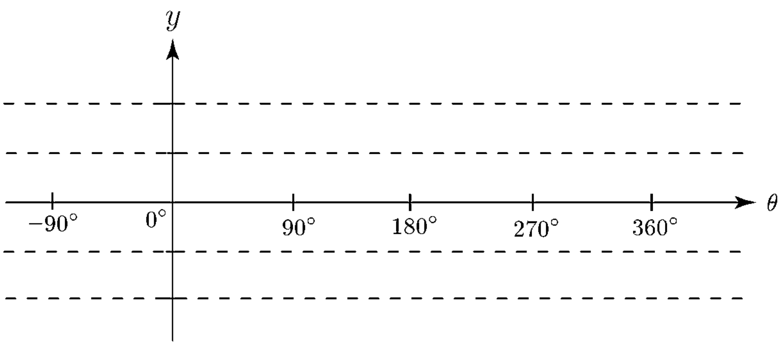


$y = \sin\theta$ のグラフは, 360° ごとに同じ形となっている。
このことを, $y = \sin\theta$ は 360° を周期とする周期関数であるという。

問 1　$y = 2\sin\theta$ のグラフをかけ。



問 2　$y = \sin 2\theta$ のグラフをかけ。

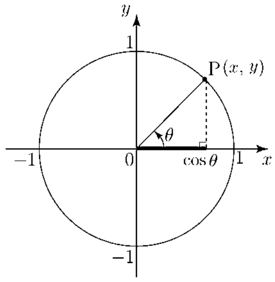


< 三角関数のグラフ (2) >

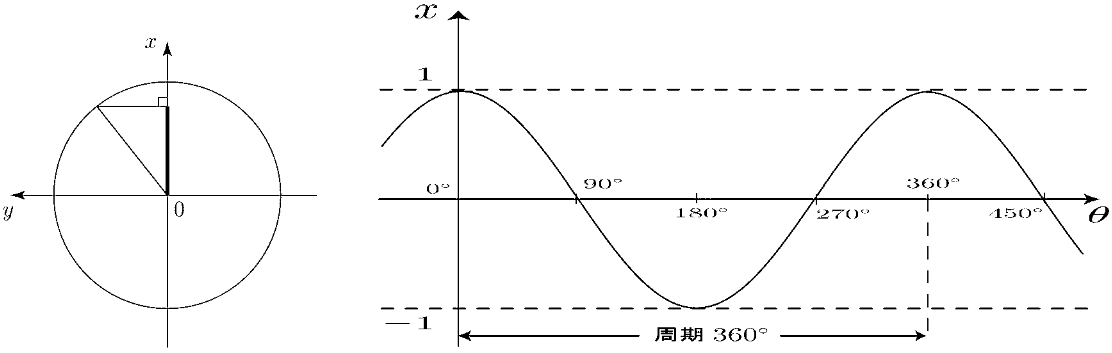
$y = \cos\theta$ のグラフ

$y = \sin\theta$ のグラフと同様に考えると, 点 P の x 座標は $\cos\theta$ であるから

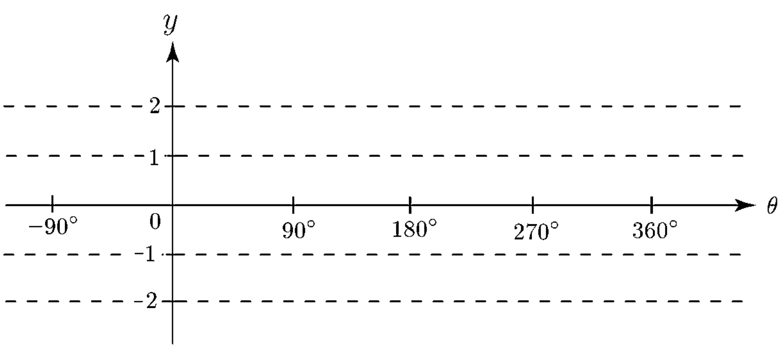
$$x = \cos\theta$$



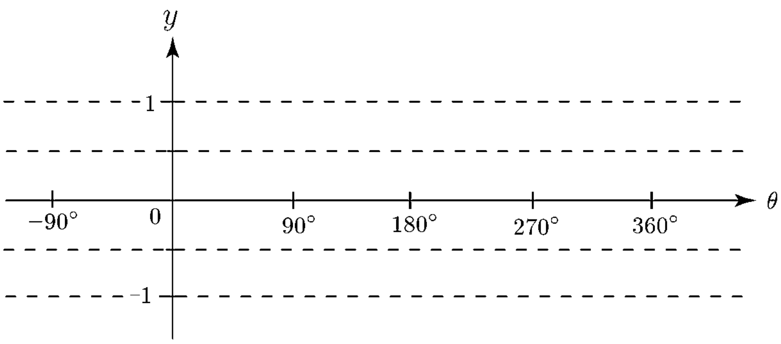
のグラフは, 次のようになる。



問 1　$y = 2\cos\theta$ のグラフをかけ。

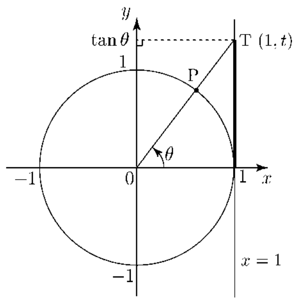


問 2　$y = \cos\dfrac{1}{2}\theta$ のグラフをかけ。



< 三角関数のグラフ (3) >

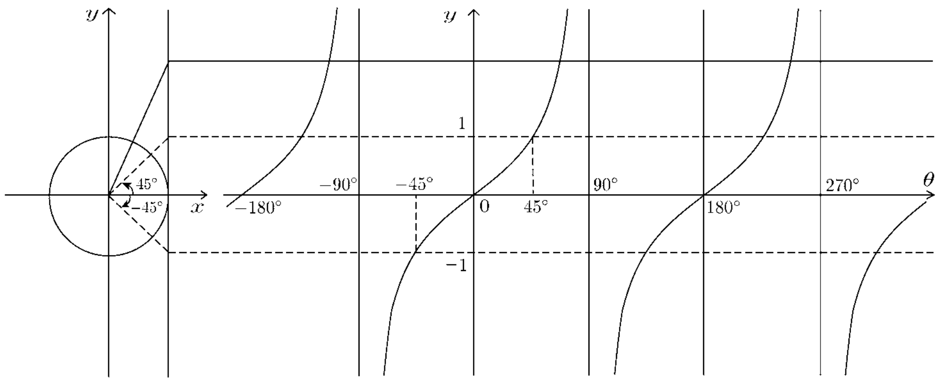
$\boldsymbol{y = \tan\theta}$ のグラフ



右の図で, 直線 OP と
直線 $x = 1$ の交点を $T(1, t)$
とすると,

$$\tan\theta = \frac{t}{1} = t$$

となって, 点 T の y 座標が $\tan\theta$ に等しくなる。
これを利用して, $y = \tan\theta$ のグラフをかく。



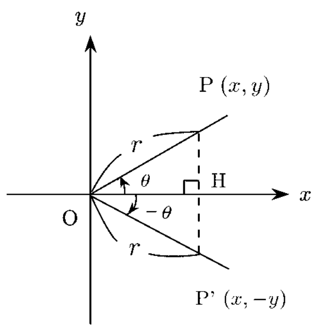
*　$y = \tan\theta$ は 180° を周期とする周期関数である。

*　$\theta = -90^\circ, \theta = 90^\circ, \theta = 270^\circ$ などの直線は,
　$y = \tan\theta$ のグラフの漸近線となっている。

問　漸近線をもつ関数を 2 つあげよ。そして, それを図示せよ。

＜ 三角比の公式 (1) ＞

右の図から



$$\sin(-\theta) = \frac{-y}{r} = -\frac{y}{r} = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \frac{x}{r} = \cos\theta$$

となるから

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

である。

同様にして

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$

$$\sin(-45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

まとめると

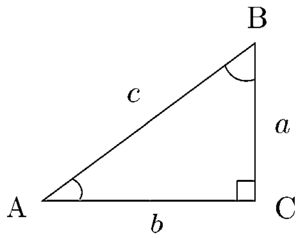
$$\boxed{\begin{aligned} \sin(-\theta) &= -\sin\theta \\ \cos(-\theta) &= \cos\theta \\ \tan(-\theta) &= -\tan\theta \end{aligned}}$$

問　$\tan(-45^\circ)$, $\tan(-60^\circ)$ を求めよ。

< 三角比の公式 (2) >

右の図の直角三角形において

$$\cos B = \frac{a}{c} = \sin A = \sin(90° - B)$$



より

$$\sin(90° - B) = \cos B$$

さらに

$$\sin B = \frac{b}{c} = \cos A = \cos(90° - B)$$

より

$$\cos(90° - B) = \sin B$$

例 $\sin 75° = \sin(90° - 15°) = \cos 15°$

$\cos 65° = \cos(90° - 25°) = \sin 25°$ $\quad *$ sin と cos が入れ替わる

また, 右図のように P, P', Q, Q' をきめると

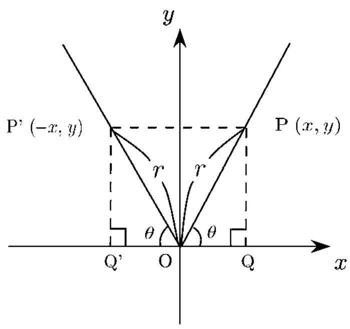
Δ OPQ と Δ OP'Q' が合同

になるから

$$\sin(180° - \theta) = \frac{y}{r} = \sin\theta$$

$$\cos(180° - \theta) = \frac{-x}{r} = -\frac{x}{r} = -\cos\theta$$

$$\tan(180° - \theta) = \frac{y}{-x} = -\frac{y}{x} = -\tan\theta$$



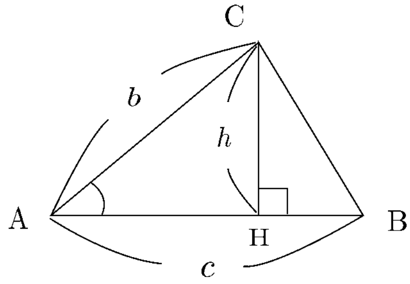
まとめると

$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$ $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$	$\sin(180° - \theta) = \sin\theta$ $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$ $\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$

問 $\tan(90° - \theta)$ のとき, どうなるか答えよ。

< 三角形の面積 >

三角形の面積 $S = \dfrac{1}{2} \times (\text{底辺}) \times (\text{高さ})$ であるから, 右の図で Δ ABC の高さを h とすると



$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2} \times c \times h \\
&= \frac{1}{2} \times c \times b \sin A \\
&= \frac{1}{2}\ b\ c \sin A
\end{aligned}
$$

同様にして

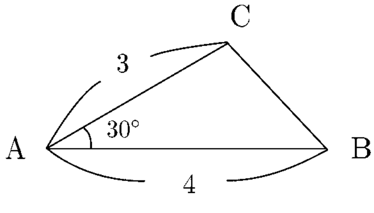
$$S = \frac{1}{2}\ c\ a \sin B = \frac{1}{2}\ a\ b \sin C$$

となる。

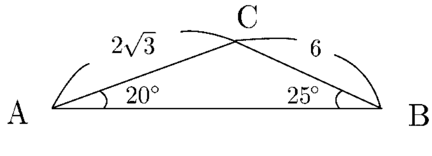
> 三角形の面積は
>
> $$S = \frac{1}{2}\ a\ b \sin C = \frac{1}{2}\ b\ c \sin A = \frac{1}{2}\ c\ a \sin B$$
>
> $\dfrac{1}{2} \times (2\,\text{辺の積}) \times (\text{その}\ 2\,\text{辺の間の角のサイン})$

問　次の Δ ABC の面積を求めよ。

(1)



(2)



< 正弦定理 >

右の図より

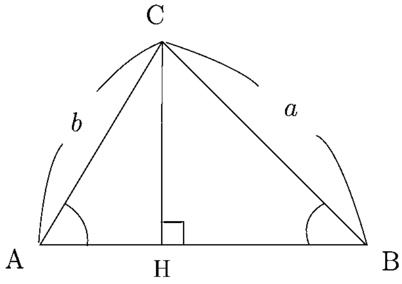
Δ ACH において

$CH = b\sin A$

Δ BCH において

$CH = a\sin B$

であるから



$a\sin B = b\sin A$

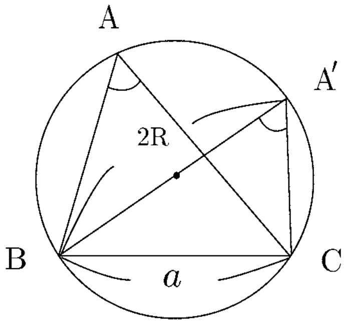
両辺を $\sin A \cdot \sin B$ でわると

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

同様にして

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

つぎに, Δ ABC の外接円の半径を R とすると



$A = A'$ ($\overset{\frown}{BC}$ の円周角から)

$\angle BCA' = 90°$ ($A'B$ は直径から)

より

$$\sin A' = \frac{a}{2R} = \sin A$$

であるから

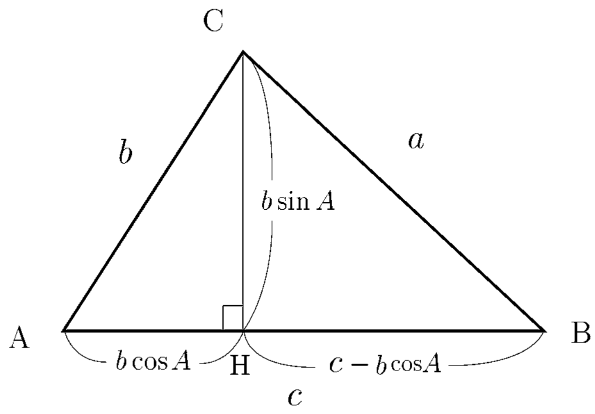
$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

まとめると

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \qquad \text{正弦定理}}$$

問　外接円, 内接円とは, どのような円か説明せよ。

< 余弦定理 >



上の図から, △ＢＣＨに三平方の定理を用いると

$$a^2 = (b\sin A)^2 + (c - b\cos A)^2$$

$$= b^2\sin^2 A + c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A$$

$$= b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc\cos A$$

したがって

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \qquad (\ \sin^2 A + \cos^2 A = 1 \text{ より }\ )$$

同じようにして

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

この３つの式をまとめて, **余弦定理**という。

以上まとめると,

すべての三角形は３つの辺と３つの角で作られている図形である。

どの三角形についても, 辺と角の関係は正弦定理と余弦定理で表される。

この理由で, 三角形の辺と角を求めるには, 正弦定理, または余弦定理の

どちらかを使用すればよいことがわかる。

問　余弦定理は, 鈍角三角形のときも成り立つ。そのことを証明しなさい。

< 加法定理 >

２つの角 α, β について , $\alpha + \beta$ の三角比は

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

が成り立つことが知られている。

この式を用いて次の重要な式が導かれる。

(1) $\sin(90^\circ + \theta) = \sin 90^\circ \cos\theta + \cos 90^\circ \sin\theta = 1 \times \cos\theta + 0 \times \sin\theta = \cos\theta$

$$\sin(90^\circ + \theta) = \cos\theta$$

(2) $\sin(180^\circ + \theta) = \sin 180^\circ \cos\theta + \cos 180^\circ \sin\theta = 0 \times \cos\theta + (-1) \times \sin\theta = -\sin\theta$

$$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin\theta$$

(3) $\sin(\alpha - \beta) = \sin\{\alpha + (-\beta)\} = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

(4) $\sin 2\theta = \sin(\theta + \theta) = \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

問　加法定理を用いて、次の重要な式を導きなさい。

(1) $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$

(2) $\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$

(3) $\cos(90^\circ + \theta) = -\sin\theta$

(4) $\cos(180^\circ + \theta) = -\cos\theta$

(5) $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$

(6) $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$

(7) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

(8) $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$

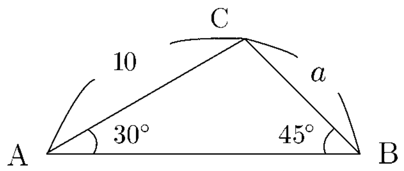
(9) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

(10) $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

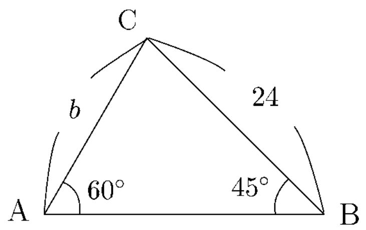
(11) $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

< 三角比の問題 >

1. Δ ABC において, $b = 10$, $A = 30^\circ$, $B = 45^\circ$ のとき, 辺 BC の長さ a を求めよ。



2. Δ ABC において, $a = 24$, $A = 60^\circ$, $B = 45^\circ$ のとき, 辺 AC の長さ b を求めよ。



3. Δ ABC において, $a = 10$, $A = 30^\circ$, $C = 120^\circ$ のとき, 辺 AB の長さ c を求めよ。

4. Δ ABC において, $a = 6$, $b = \sqrt{2}$, $C = 45^\circ$ のとき, 辺 AB の長さ c を求めよ。

5. Δ ABC において, $b = 1$, $c = 2$, $A = 30^\circ$ のとき, 辺 BC の長さ a を求めよ。

6. Δ ABC において, $a = 3$, $b = 5$, $c = 7$ とする。

(1)　$\cos C$ を求めよ。

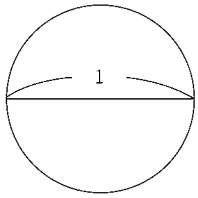
(2)　C を求めよ。

＜ π の話 ＞

π の定義（ π とは？ ）

＊ 直径 1 の円周の長さを π と定義する。

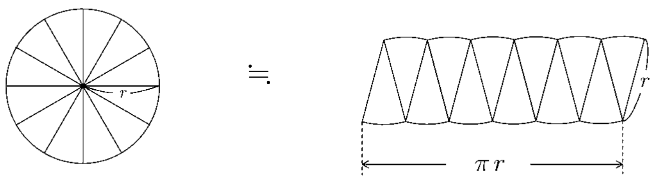
＊ （円周の長さ）÷（直径の長さ）＝ π



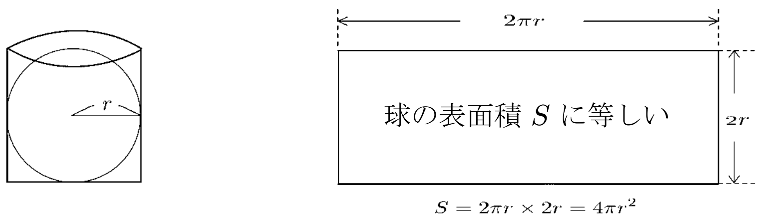
＊ $\dfrac{\text{円周の長さ}}{\text{直径の長さ}} = \pi$

① 半径 r の円周の長さ l は $\boxed{\boldsymbol{l = 2\pi r}}$

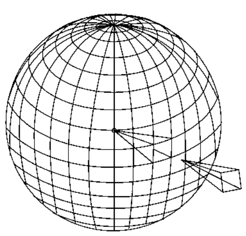
② 円の面積 S_1 は $\boxed{\boldsymbol{S_1 = \pi r^2}}$

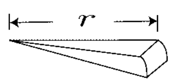


③ 球の表面積 S_2 は $\boxed{\boldsymbol{S_2 = 4\pi r^2}}$



④ 球の体積 V は $\boxed{\boldsymbol{V = \frac{4}{3}\pi r^3}}$





の面積は $\dfrac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times r$

であるから

$$V = \frac{1}{3} \times 4\pi r^2 \times r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

⑤ 参考式

$$S_1 = \int_0^r 2\pi x dx \qquad V = \int_0^r S_2 dx = \int_0^r 4\pi x^2 dx$$

＜ 弧度法 (1) ＞

① 三角比

今まで, 角の大きさを表すときに, 直角の $\dfrac{1}{90}$ の角の大きさを 1 度として用いてきた。すなわち

$$\text{直角の } \frac{1}{90} \text{ を 1 度} \quad , \quad \text{1 度の } \frac{1}{60} \text{ を 1 分} \quad , \quad \text{1 分の } \frac{1}{60} \text{ を 1 秒}$$

このような表し方を**度数法**という。

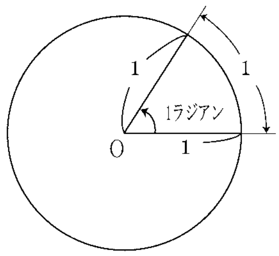
これに対して, これからは角の大きさの新しい表し方として, **弧度法**を考える。

右図のように, 半径 1 の円の弧の長さが 1 のとき,

その角の大きさを

1 ラジアン（$radian$）

ときめる。

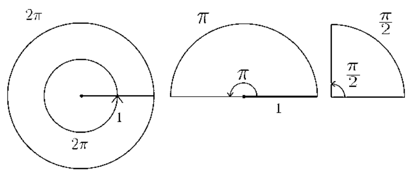


したがって, 半径 1 の円周の長さは、2π であるから

$$2\pi \text{（ラジアン）} = 360^\circ$$

$$\pi \text{（ラジアン）} = 180^\circ$$

$$1 \text{（ラジアン）} = \frac{180^\circ}{\pi}$$



となる。

問 1　次の表を完成させよ。

度数法	0°	30°	45°	90°	120°	135°	180°	225°	270°	360°
弧度法										

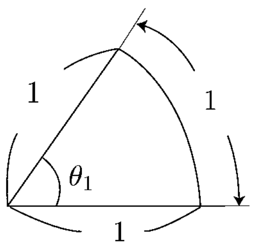
問 2　次の値を求めよ。

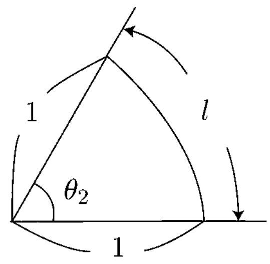
(1)　$\sin\dfrac{\pi}{6}$　　　(2)　$\cos\dfrac{\pi}{3}$

(3)　$\tan\dfrac{\pi}{4}$　　　(4)　$\sin\dfrac{\pi}{2}$

< 弧度法 (2) >

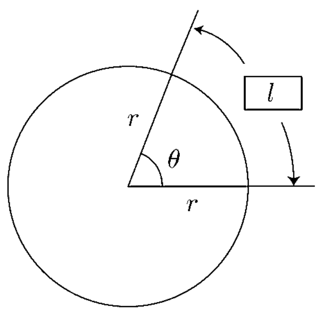
① 角の大きさ





$\theta_1 = 1$ ラジアン　　$\theta_2 = l$ ラジアン

② 弧の長さ



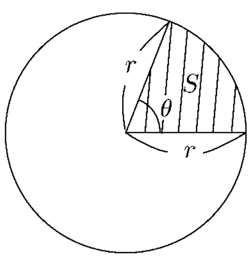
$2\pi r : l = 2\pi : \theta$ より

$2\pi l = 2\pi r\theta$

$$\boxed{\boldsymbol{l = r\theta}}$$

③ 面積

扇形の面積を S とする



$\pi r^2 : S = 2\pi : \theta$

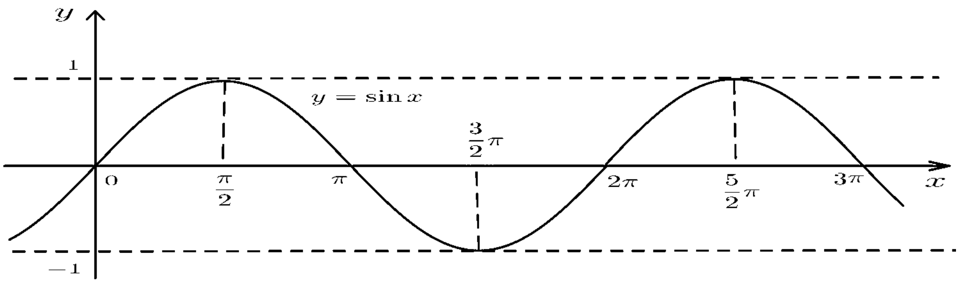
$2\pi S = \pi r^2\theta$

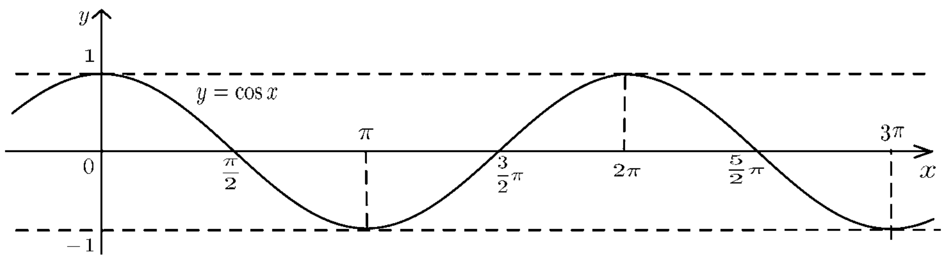
$$\boxed{\boldsymbol{S = \frac{1}{2}r^2\theta}}$$

問　なぜ角の大きさを表すときに, 度数法と弧度法という 2 つの方法があると思いますか。

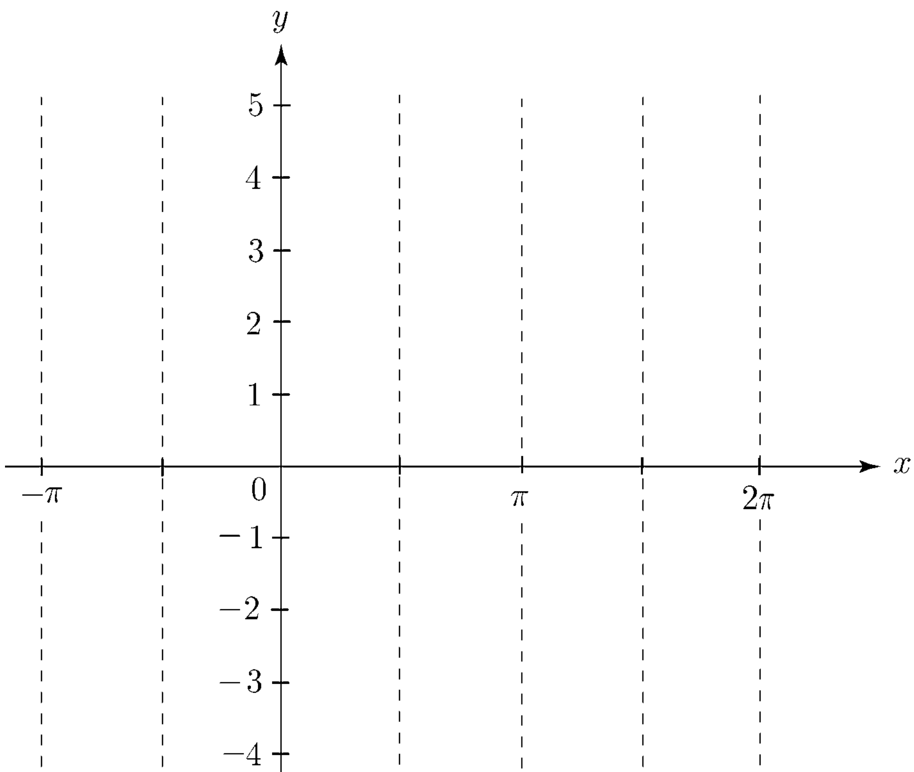
< 弧度法 (3) >

関数 $y = \sin x$, $y = \cos x$ のグラフは, 次のようになる。





問　関数 $y = \tan x$, $(-\pi \leqq x \leqq 2\pi)$ のグラフをかけ。



< $a\sin\theta + b\cos\theta = r\sin(\theta+\alpha)$ に変形 >

加法定理を用いて，$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$ を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形してみよう。

$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta = r\sin(\theta+\alpha)$ とおいて　r，α を求める

① 計算力で求める

$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta = r\sin(\theta+\alpha)$ とおくと，

$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta = r\sin\theta\cos\alpha + r\cos\theta\sin\alpha$

左辺と右辺を比較して

$$\begin{cases}\sqrt{3} = r\cos\alpha \\ 1 = r\sin\alpha\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = r^2\cos^2\alpha\cdots(1) \\ 1 = r^2\sin^2\alpha\cdots(2)\end{cases}$$

(1) + (2) より

$3+1=r^2$，$r=2$，$(r>0)$

また,

$\sqrt{3} = 2\cos\alpha$，$\alpha = 30^\circ$

であるから

$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta = 2\sin(\theta+30^\circ)$

② 暗記力で求める

$a\sin\theta+b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$ とおき，

$r=\sqrt{a^2+b^2}$

を覚える

$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = \sqrt{3+1} = 2$

より

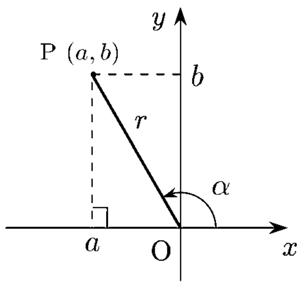
$$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta\right)$$

$= 2(\cos 30^\circ\sin\theta + \sin 30^\circ\cos\theta)$

したがって,

$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta = 2\sin(\theta+30^\circ)$

参照図



$*\ r=\sqrt{a^2+\ b^2}$

$*\ \sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+\ b^2}}$

$*\ \cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+\ b^2}}$

①の方法は、長期間忘れない。

②の方法は、テスト前には有効である。

なお、この $2\sin(\theta+30^\circ)$ のグラフは、$y=2\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に -30° だけ平行移動したものである。

問　(1) と (2) は ①の方法，(3) は ②の方法で $r\sin(\theta+\alpha)$ に変形せよ。

(1)　$\sin\theta+\cos\theta$

(2)　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\dfrac{1}{2}\cos\theta$

(3)　$-\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$

< 三角関数の練習問題 >

1. 次の θ について $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ の値をそれぞれ求めよ。

(1) $\theta = \dfrac{2}{3}\pi$　　(2) $\theta = -\dfrac{3}{4}\pi$

2. 次の値を求めよ。

(1) $\sin\dfrac{\pi}{4}\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}\cdot\tan\dfrac{\pi}{4}$　　(2) $\cos\dfrac{\pi}{6}\cdot\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\cdot\tan\dfrac{4}{3}\pi$

3. θ は第 1 象限の角 $(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2})$ $\sin\theta = \dfrac{1}{5}$ である。$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

4. 次の方程式を解け。ただし $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ とする。

(1) $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$　　(2) $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(3) $\tan\theta = -\sqrt{3}$

5. 次の方程式を解け。ただし $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ とする。

(1) $\sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2) $\cos 3\theta = -\dfrac{1}{2}$　　(3) $\tan 2\theta = -\sqrt{3}$

6. 次の値を求めよ。

(1) $\sin 75^\circ$　　(2) $\cos 165^\circ$　　(3) $\tan 15^\circ$

7. 加法定理を使って次の式の値を求めよ。

(1) $\sin\theta + \sin(\theta + \dfrac{2}{3}\pi) + \sin(\theta + \dfrac{4}{3}\pi)$

8. 次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に表わせ。ただし r は正, $-\pi < \alpha \leqq \pi$ とする。

(1) $-\sin\theta + \cos\theta$　　(2) $\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta$

9. 次の関数のグラフをかけ。

(1) $y = -\sin x + \cos x$　　(2) $y = \sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta$

< 平均変化率 >

関数 $y=f(x)$ において，x の値が a から b まで変化するとき，

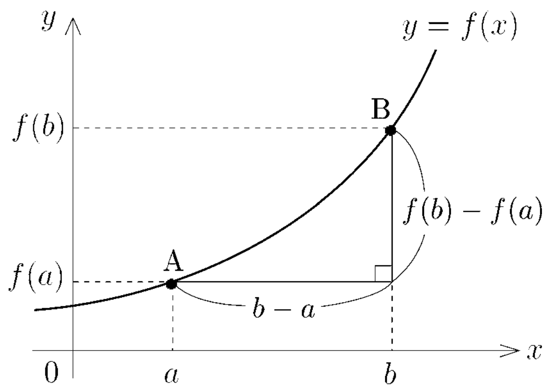
x の変化量は　　$b-a$

y の変化量は　　$f(b)-f(a)$

である。このとき

$$\frac{y\text{ の変化量}}{x\text{ の変化量}}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

を，x の値が a から b まで変化するときの $f(x)$ の**平均変化率**という。



この値は，曲線 $y=f(x)$ 上の 2 点 $\mathrm{A}(a,f(a))$，$\mathrm{B}(b,f(b))$ を通る直線の傾きを表している。

問　関数 $f(x)=x^2$ において，x の値が次のように変化するときの平均変化率を求めよ。

(1)　1 から 3 まで

(2)　-1 から -3 まで

< 極限値 >

関数 $f(x)$ について，x を a と異なる値をとりながら，a に限りなく近づけたとき，$f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくとする。そのことを

$$x \longrightarrow a \text{ のとき } f(x) \longrightarrow \alpha \qquad \text{または} \qquad \lim_{x\to a} f(x) = \alpha$$

と表す。そして，この値 α を，$f(x)$ の**極限値**という。

例　$f(x) = 2x + 3$ とする

$x \longrightarrow 1$ のとき，$f(x) \longrightarrow 2 \times 1 + 3 = 5$　　これを　$\lim_{x\to 1}(2x+3) = 5$ と表す

$x \longrightarrow -1$ のとき，$f(x) \longrightarrow 2 \times (-1) + 3 = 1$　　これを　$\lim_{x\to -1}(2x+3) = 1$ と表す

問　次の値を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(2+x)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(5-2x)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1}(2+x)$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to -1}(5-2x)$

(5) $\displaystyle\lim_{h\to 0}(3+h+h^2)$　　(6) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{5-2h}{3+2h}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 3}(x^2+1)(x-2)$　　(8) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3}{x-1}$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{3x-12}{x^2-16}$　　(10) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1}$

< 微分係数 >

関数 $y = f(x)$ につい，x の値が a から $a+h$ まで変化するとき

x の変化量は　　$a + h - a = h$

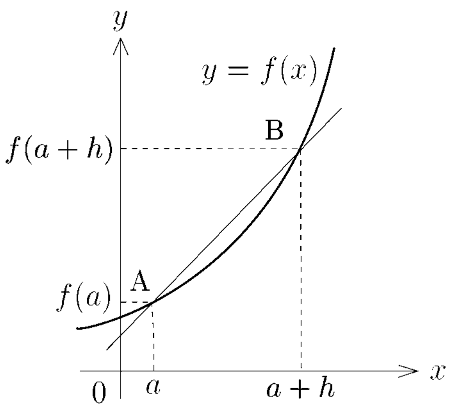
y の変化量は　　$f(a+h) - f(a)$

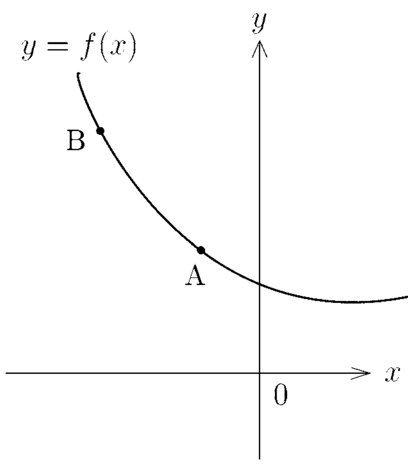
である。このとき，平均変化率の

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

の式で，h を限りなく 0 に近づけたときの値が定まるとき，この値を関数 $y = f(x)$ の $x = a$ のおける**微分係数**といい，$\boldsymbol{f'(a)}$ で表す。

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad \text{微分係数の定義}}$$





問　関数 $f(x) = x^2$ において，

(1) $x = 1$　　　(2) $x = -1$

の微分係数を求めよ。さらに，その関係を図示せよ。

< 導関数 (1) >

微分係数を求める式 において，a を変数とみれば $f'(a)$ は微分係数を定める関数となる。そこで a の代わりに文字 x を用いて，$f'(x)$ という新しい関数を考える。すなわち

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

となる関数を考える。この関数 $f'(x)$ は**導関数**とよばれ，導関数を求めることを**微分する**という。

x が時刻，$f(x)$ が距離を表している場合，$f'(x)$ は速度を表す関数となる。
また，x が時刻，$f'(x)$ が速度を表している場合，$f''(x)$ は加速度を表す関数となる。

問 1　次の関数の (　) 内に示した x の値における微分係数を求めよ。

(1) $f(x) = 3x^2 + 5x - 1$　　$(x = 2)$

(2) $f(x) = -x^2 - 7x + 3$　　$(x = 3)$

(3) $f(x) = 2x^2 - 8x$　　$(x = -1)$

問 2　次の関数を微分せよ。

(1) $f(x) = 15$

(2) $f(x) = -7x - 17$

(3) $f(x) = x^3$

< 導関数 (2) >

関数 $y = f(x)$ の導関数を表すには，$f'(x)$ のほかに

$$y' \qquad \{f(x)\}' \qquad \frac{dy}{dx}$$

などの記号も用いられる。

次に $(x)' = 1$，$(x^2)' = 2x$，$(x^3) = 3x^2$ であるから，一般に次の公式が成り立つことが予想される。

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

さらに，定数 k ついて，

$$\{kf(x)\}' = kf'(x)$$

$$\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$$

$$\{f(x) - g(x)\}' = f'(x) - g'(x)$$

が，成り立つ。

問　次の関数を微分せよ。

(1) $f(x) = 3x^2 + 5x - 1$

(2) $f(x) = -x^2 - 7x + 3$

(3) $f(x) = 2x^2 - 8x$

< 接線の方程式 >

点 (x_1, y_1) を通り，傾き m の直線の方程式は

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

である。

そして，**曲線 $\boldsymbol{y = f(x)}$ 上にある点 $\boldsymbol{(a, f(a))}$ における接線の傾きは $\boldsymbol{f'(a)}$** である。

したがって，曲線 $y = f(x)$ 上にある点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

問　曲線 $y = x^2$ 上の次の点における接線の方程式を求めよ。また，それらを一つの座標軸に図示せよ。

(1) 点 $(1, 1)$

(2) 点 $(2, 4)$

(3) 点 $(3, 9)$

(4) 点 $(-1, 1)$

(5) 点 $(-2, 4)$

(6) 点 $(-3, 9)$

(7) 点 $(0, 0)$

< 微分の問題 (1) >

1 関数 $f(x) = 3x^2 - 4x$ について，x の値が次のように変化するときの平均変化率を求めよ。

(1) 1 から 3

(2) -1 から $-1+h$

2 次の値を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}(5 - 3h + h^2 + 2h^3)$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}(\frac{1}{3} + 3h - h^2 + \frac{1}{3}h^5)$

3 次の関数を微分せよ。

(1) $y = 5x^3 - 3x^2 + 2$

(2) $y = -2x^2 + 3x - 1$

(3) $y = (3x-2)^2$

(4) $y = (x-2)(x^2+3x-1)$

4 次の関数について，与えられた x の値における微分係数を求めよ。

(1) $f(x) = x^2 - x - 3$　　　$(x = -2)$

(2) $f(x) = -x^3 + x^2 + x$　　　$(x = 2)$

5 次の曲線について，与えられた曲線上の点における接線の方程式を求めよ。

(1) $y = x^2 - 3x + 2$　　　$(2, 0)$

(2) $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$　　　$(-1, -8)$

< 関数の増減 (1) >

関数 $y = f(x)$ のグラフについて，その導関数の図形的な意味を考えてみよう。一般に，関数 $y = f(x)$ について，$f'(x)$ は図 1 のような関数 $y = f(x)$ のグラフ上の点 $P(x, f(x))$ における接線の傾きである。

そこで，関数のグラフ上の点における接線の傾きと導関数との関係から関数の増減，減少について考えよう。いま

$$f(x) = x^2$$

のグラフを例にとってみる。この関数の導関数は

$$f'(x) = 2x$$

であった。

x の値が増加しているとき，$f'(x)$ の符号を調べてみると図 2 のようになる。

図をみると，x の値が増えるにしたがって，

Ⅰ　$f'(x) < 0$ のときは，$f(x)$ の値は減少,

Ⅱ　$f'(x) > 0$ のときは，$f(x)$ の値は増加

となっている。

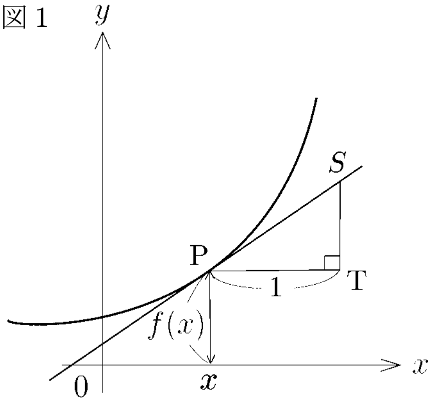
以上のことは，$f(x)$ が一般の関数であっても成り立っていて，x の値が増えるにしたがって，つねに

$f'(x) > 0$ のときは，$f(x)$ の値は増加,

$f'(x) < 0$ のときは，$f(x)$ の値は減少

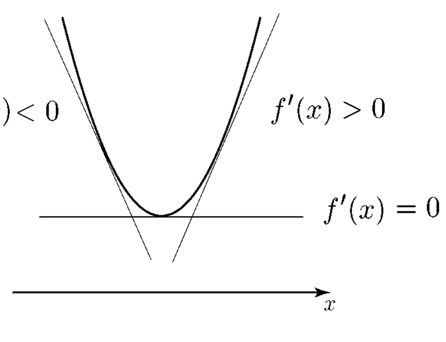
となっている。

図 1



点
$P(x, f(x))$

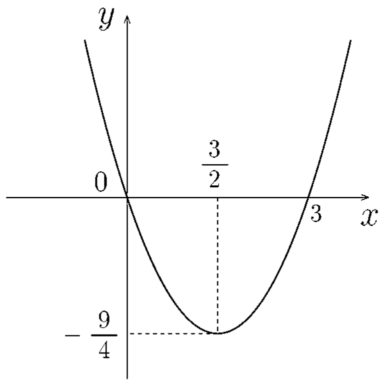
$f'(x) = ST$



問　次の関数の増減を調べてグラフをかけ。

(1) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x$　　(2) $f(x) = x^2 - 3x$

< 関数の増減 (2) >



関数 $f(x) = x^2 - 3x$ を微分すると

$$f'(x) = 2x - 3 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$f'(x) = 0$ を解くと、$x = \dfrac{3}{2}$ であるから

$x < \dfrac{3}{2}$ のとき　　$f'(x) < 0$

$x > \dfrac{3}{2}$ のとき　　$f'(x) > 0$

となる。このことを表にまとめると、次のようになる。

x	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{9}{4}$	$\nearrow$

$$* \ f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{9}{4}$$

したがって、関数 $f(x) = x^2 - 3x$ は

$x < \dfrac{3}{2}$ のとき減少する　　$x > \dfrac{3}{2}$ のとき増加する

上のような表を**増減表**という。

問　次の関数の増減を調べてグラフをかけ。

(1) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2$

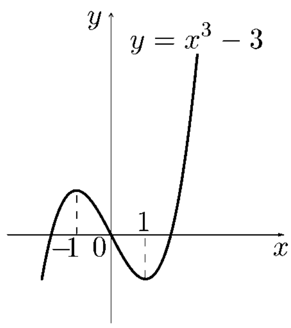
(2) $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x$

(3) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

(4) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

(5) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

< 関数の極大・極小 >



関数 $y = x^3 - 3x$ のグラフは右図のようになる。

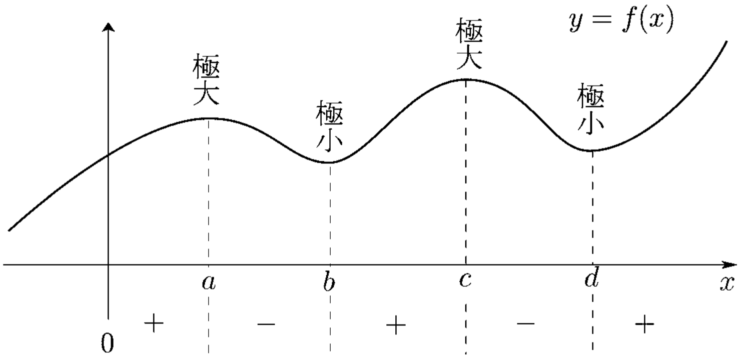
関数 y の値は，$x = -1$ の前後で増加から減少へと変化している。

こうしたとき，関数 y は $x = -1$ において，**極大になる**といい，そのときの y の値を**極大値**という。

同じように，関数 y の値は，$x = 1$ の前後で減少から増加へと変化している。

こうしたとき，関数 y は $x = -1$ において，**極小になる**といい，そのときの y の値を**極小値**という。

極大値と極小値をまとめて**極値**という。



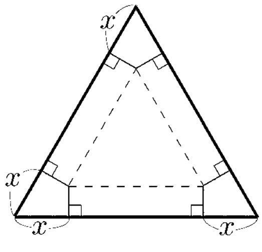
問 1　次の関数の極値を求めよ。

(1) $y = x^3 + 3x^2 + 5$

(2) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 15$

問 2　1 辺の長さが $6cm$ の正方形の厚紙がある。その 4 すみから同じ形の正方形を切ってふたのない箱を作る。その箱の容積が最大になるには，切り落とす正方形の 1 辺の長さをどのようにすればよいか。

問 3　1 辺の長さが $12cm$ の正三角形のベニヤ板の 3 すみから，図のように四角形を切り取って箱を作る。この箱の容積を最大にするには，x の長さをいくらにすればよいか。



< 微分の問題 (2) >

1　次の関数の増減を調べよ。

(1) $f(x) = x^2 - 2x + 3$

(2) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2$

2　次の関数の極値を求めよ。

(1) $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$

(2) $y = -x^3 + 3x$

3　次の関数の極値を求め，グラフを描け。

(1) $y = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$

(2) $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}$

< 不定積分 (1) >

導関数 $f'(x)$ は，関数 $f(x)$ を微分することによって求めることができる。

逆に，関数 $f(x)$ を，導関数 $f'(x)$ から求めることについて考えてみよう。

たとえば

$$(x^2)' = 2x$$

$$(x^2+1)' = 2x$$

$$(x^2-1)' = 2x$$

のように，微分すると $2x$ となる関数は無数にある。しかし，どれをとっても

$$x^2 + C \qquad\qquad (C \text{ は定数})$$

の形になっている。この x^2+C を $2x$ の**不定積分**といい

$$\int 2x dx = x^2 + C \qquad\qquad (c \text{ は定数})$$

で表す。

$$\begin{tikzcd} x^2 + C \arrow[rr, bend left, "\text{微分する}"] & & 2x \arrow[ll, bend left, "\text{積分する}"] \end{tikzcd}$$

一般に，関数 $f(x)$ に対し，関数 $F(x)$ が

$$F'(x) = f(x)$$

となるとき，関数 $f(x)$ の不定積分は

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad\qquad (C \text{ を積分定数という})$$

と表される。

そして，関数 $f(x)$ の不定積分を求めることを $f(x)$ を**積分する**という。

$$\begin{tikzcd} F(x) + C \arrow[rr, bend left, "\text{微分する}"] & & f(x) \arrow[ll, bend left, "\text{積分する}"] \end{tikzcd}$$

不定積分の演算は微分の演算の逆であることがわかる。　　$\cdots\cdot$ (1)

問 (1) を示す具体的な例をかきなさい

< 不定積分 (2) >

$$(x)' = 1 \text{ より}, \qquad \int 1dx = x + C$$

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x \text{ より}, \qquad \int xdx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2 \text{ より}, \qquad \int x^2dx = \frac{x^3}{3}x + C \qquad (C \text{ は積分定数})$$

より，次の式が成り立つことがわかる。

$n = 0, 1, 2$ のとき

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (C \text{ は積分定数})$$

さらに，n を自然数とすると

$$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' = \frac{1}{n+1}(x^{n+1})' = \frac{1}{n+1}(n+1)x^n = x^n$$

であるから，上の式は n が自然数としても成り立つ。

問　次の不定積分を求めよ。

(1) $\int 3dx$　　(2) $\int 10dx$

(3) $\int \frac{4}{7}dx$　　(4) $\int 3xdx$

(5) $\int \frac{x}{3}dx$　　(6) $\int (-5x)dx$

(7) $\int (-x^2)dx$　　(8) $\int \frac{x^2}{3}dx$

(9) $\int 3x^3dx$　　(10) $\int \left(-\frac{7}{3}x^3\right)dx$

< 不定積分 (3) >

関数 $f(x)$、$g(x)$ に対し、関数 $F(x)$、$G(x)$ が $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$ を満たすとき

$$\{kF(x)\}' = k\{F(x)\}' = kf(x) \qquad (k \text{ は定数})$$
$$\{F(x) + G(x)\}' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$$
$$\{F(x) - G(x)\}' = F'(x) - G'(x) = f(x) - g(x)$$

したがって、次の公式が成り立つ。

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

$$\int \{f(x) + g(x)\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int \{f(x) - g(x)\}dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (4x + 3)dx$

(2) $\displaystyle\int (x^2 - 3x + 1)dx$

(3) $\displaystyle\int (-10x - 9)dx$

(4) $\displaystyle\int (-3x^2 + 2x - 3)dx$

(5) $\displaystyle\int (x + 1)(x - 2)dx$

(6) $\displaystyle\int (2x - 3)(x + 1)dx$

(7) $\displaystyle\int (x - 2)^2 dx$

(8) $\displaystyle\int (3x + 2)^2 dx$

< 定積分 (1) >

関数 $f(x)$ の不定積分を $F(x)$ とすると，２つの実数 a, b に対して，
$F(b) - F(a)$ を $f(x)$ の a から b までの**定積分**といい

$$\int_a^b f(x)dx$$

で表す。このとき，a を**下端**，b を**上端**という。

また，$F(b) - F(a)$ を $\Big[F(x)\Big]_a^b$ で表す。

$F'(x) = f(x)$ のとき

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

問　次の定積分を求めよ。

(1)　$\displaystyle\int_0^2 4x dx$

(2)　$\displaystyle\int_1^3 dx$

(3)　$\displaystyle\int_{-1}^1 3x^2 dx$

(4)　$\displaystyle\int_0^3 x^3 dx$

(5)　$\displaystyle\int_{-1}^1 x^3 dx$

< 定積分 (2) >

定積分についても不定積分と同様に，次の公式が成り立つ。

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \qquad \text{(k は定数)}$$

$$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

問 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^3 (3x^2+2x-3)dx$

(2) $\displaystyle\int_0^2 (x^2-2x-4)dx$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^2 (-x^2+2x-3)dx$

(4) $\displaystyle\int_{-2}^2 (x+2)^2dx$

(5) $\displaystyle\int_{-2}^1 (x+3)^2dx$

< 定積分 (3) >

定積分の上端，下端についての性質として，次のことが成り立つ。

1 $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$

2 $\displaystyle\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

3 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

問 上の性質 **1 2 3** が成り立つことを示せ。

1

2

3

< $f(t)$ の定積分 >

t を変数とするとき，関数の定積分は

$$\int_a^b f(t)dt = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

となるから，次の式が成り立つ。

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx$$

したがって，定積分の値は変数が異なっても同じ値となる。

また，$f(t)$ の定積分

$$\int_a^x f(t)dt = \Big[F(t)\Big]_a^x = F(x) - F(a)$$

は，x の関数である。右辺の式を x で微分すると

$$F'(x) = f(x)$$

となる。まとめると

a を定数とするとき，

x の関数 $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ の導関数は $f(x)$ である

x の関数 $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ の導関数を $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt$ で表すときもある。

したがって

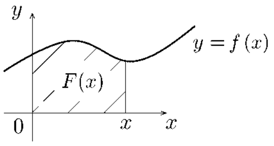
$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

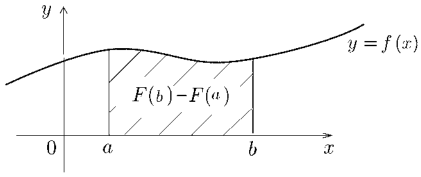
問　等式 $\displaystyle\int_a^x f(t)dt = x^2 + x - 2$ が，任意の x に対して成り立つとき，

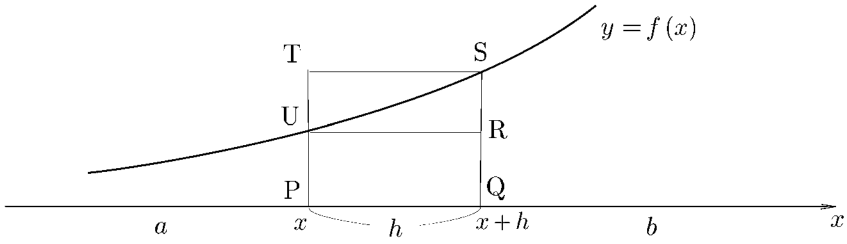
関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

< 定積分と面積 >

下の図のように、$F(x)$ を面積を表す関数とする。







上の図から

$$\text{長方形ＰＱＲＵの面積} \leqq F(x+h)-F(x) \leqq \text{長方形ＰＱＳＴの面積}$$

$$h \times f(x) \leqq F(x+h)-F(x) \leqq h \times f(x+h)$$

各辺をそれぞれ $h(h>0$ であるから）で割ると

$$f(x) \leqq \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leqq f(x+h)$$

各辺の極限をとると

$$\lim_{h\to 0} f(x) \leqq \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leqq \lim_{h\to 0} f(x+h)$$

$$f(x) \quad \leqq \qquad F'(x) \qquad \leqq \quad f(x)$$

$$F'(x) = f(x)$$

したがって

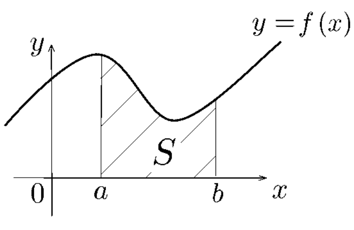
$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

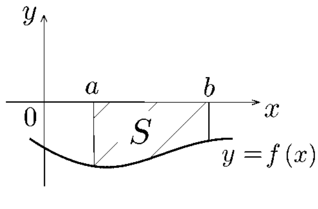
以上をまとめると

曲線 $y = f(x)(>0)$ と x 軸および 2 直線 $x = a, x = b$ で囲まれる部分の面積 S は次の式で与えられる。

$$S = \int_a^b f(x)dx$$



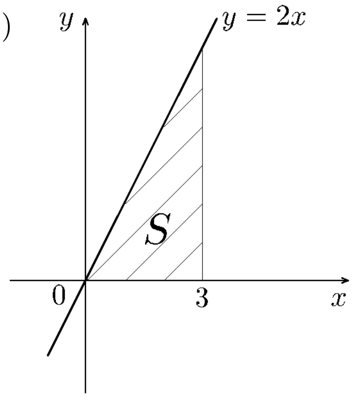
問　右下図の面積 S を $f(x)$ に関する定積分で表せ。



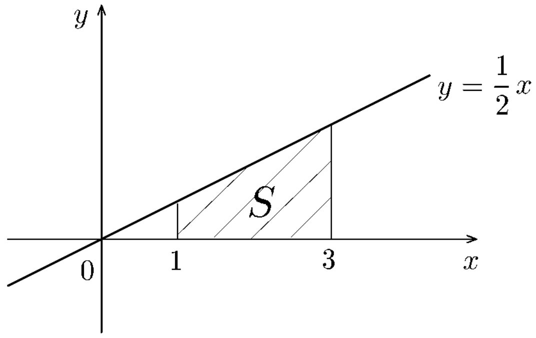
＜ 面積の問題 ＞

1　次の図形の面積 S を求めよ。

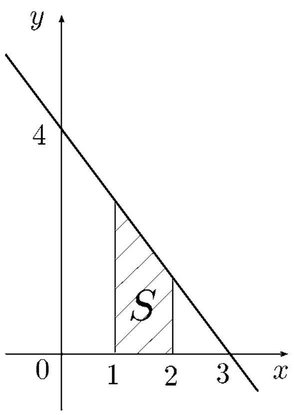
(1)



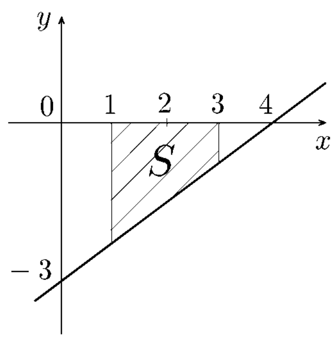
(2)



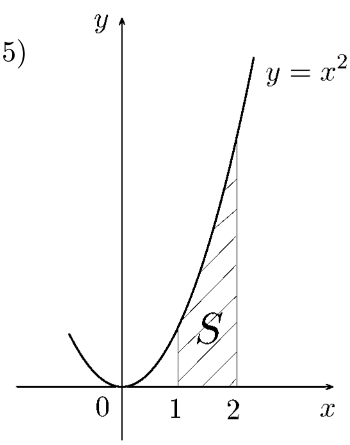
(3)



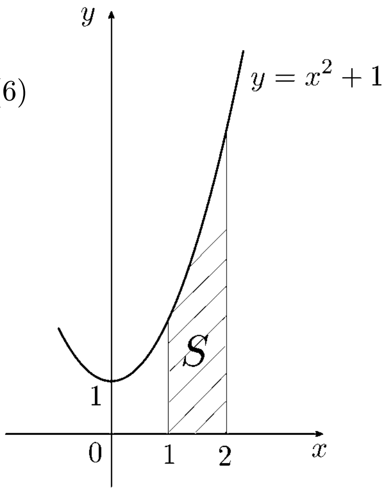
(4)



(5)

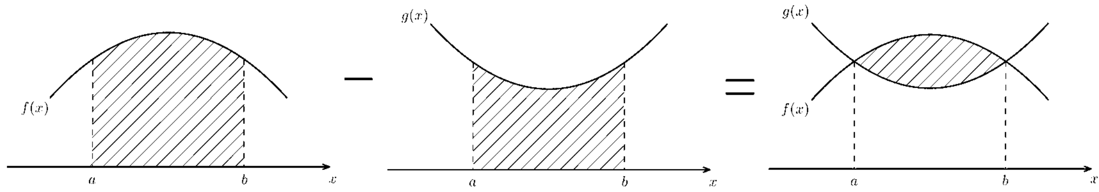


(6)



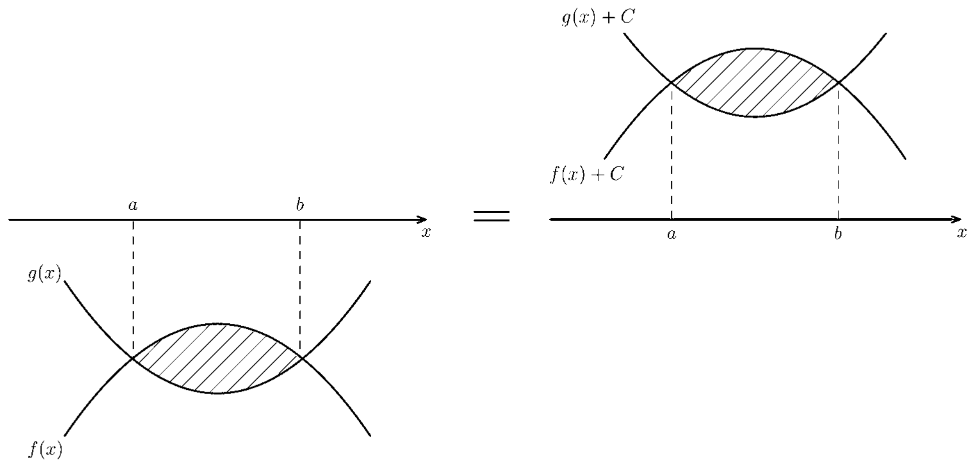
< 2 曲線で囲まれた面積 >

①



$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \Big\{f(x) - g(x)\Big\}dx$$

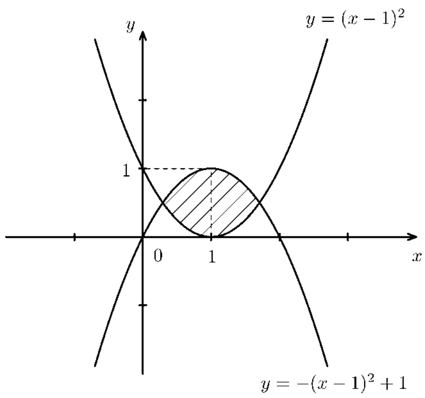
②



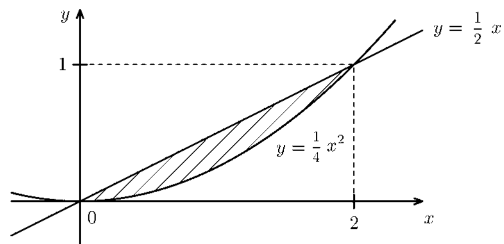
$$\int_a^b \Big\{f(x) - g(x)\Big\}dx = \int_a^b \Big[\Big\{f(x) + C\Big\} - \Big\{g(x) + C\Big\}\Big]dx$$

問　面積を求めよ。

(1)



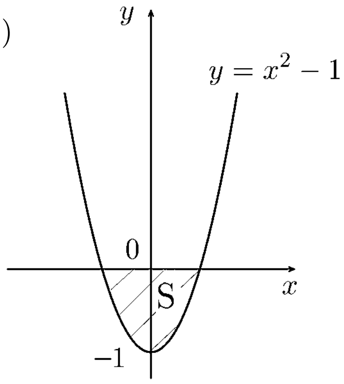
(2)



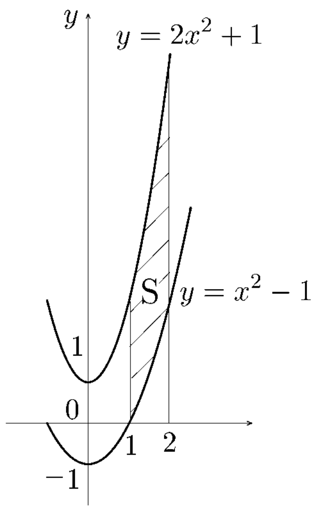
< 2 曲線で囲まれた面積の問題 >

1　次の図形の面積を求めよ。

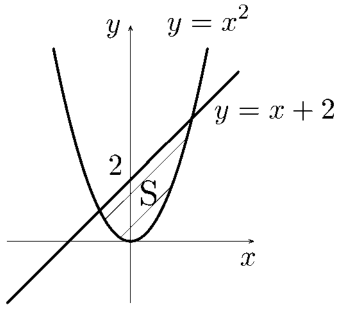
(1)



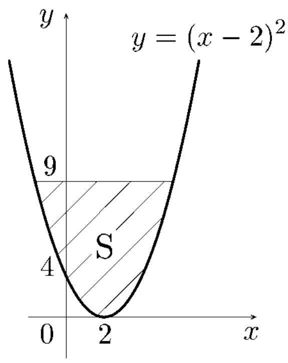
(2)



(3)



(4)



2　放物線 $y = x^2 - 3x$ と x 軸および 2 直線 $x = 1,\ x = 5$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和を求めよ。

< 放物線と x 軸で囲まれた面積 >

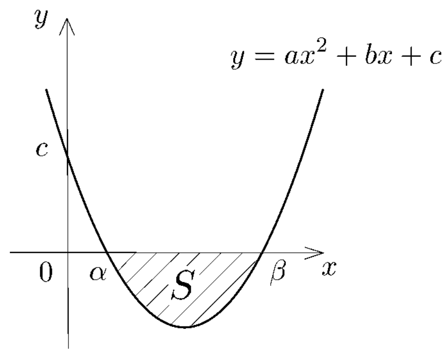
放物線 $y = ax^2 + bx + c$ について、$y = 0$ の解を α、β $(\alpha < \beta)$ とすると

$$ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$$

と表すことができる。

したがって、放物線と x 軸で囲まれた部分の面積 S は次の式で与えられる

$a > 0$



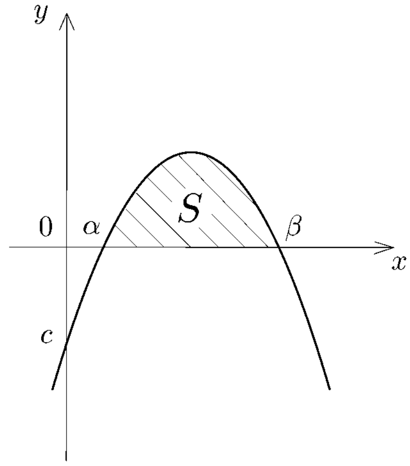
$$S = -\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

これを計算すると

$$S = -\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)dx = \frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$

となる。また

$a < 0$



$$\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3 \qquad (1)$$

が成り立つ。

問 (1) の式が成り立つことを確かめなさい。

< 積分の問題 >

1 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int(-2)dx$

(2) $\displaystyle\int(3x-2)dx$

(3) $\displaystyle\int 3(x-2)dx$

(4) $\displaystyle\int(x^3-1)dx$

(5) $\displaystyle\int(1-x+x^2)dx$

(6) $\displaystyle\int(x+2)(x-1)dx$

2 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1(2x-3)dx$

(2) $\displaystyle\int_1^2(x^2-x)dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 x(x-2)dx$

(4) $\displaystyle\int_1^3(x-1)(x-3)dx$

3 次の２つの曲線または直線で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1) $y=2x+3,\quad y=x^2$

(2) $y=2x-1,\quad y=x^2-3x+5$

(3) $y=x^2-5x,\quad y=2-2x^2$

(4) $y=2x^2-6x+4,\quad y=-3x^2+9x-6$

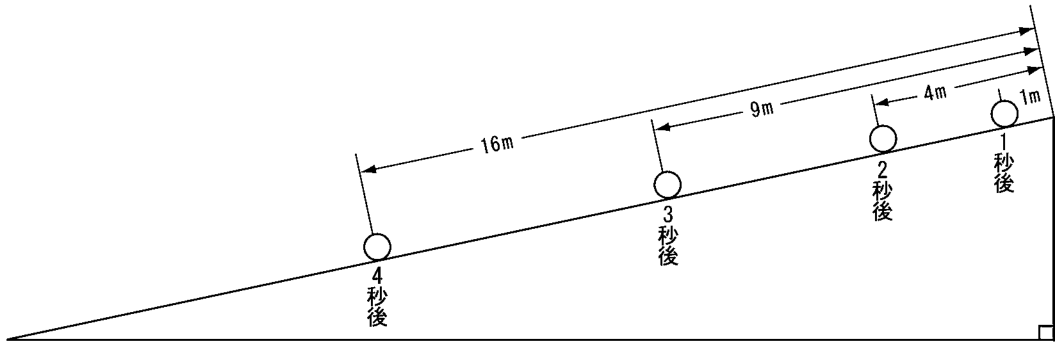
4 次の放物線と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1) $y=(x-3)(x+2)$

(2) $y=-x^2+3x$

＜ 付録 1 ＞　$\left[\dfrac{\Delta s}{\Delta t}\right.$ と $\dfrac{ds}{dt}$ の違いと使い方 (1)$\left.\right]$

下の図のように，斜面にボールを転がしてみる。転がりはじめてから t 秒間に動いた距離を ym とし，$y = x^2$ となったとする。ボールが転がりはじめてから 2 秒後という時刻の速度について考えてみよう。



$t = 2$ から $t = 4$ までの**平均の速度**は

$$\frac{\text{進んだ距離}}{\text{かかった時間}} = \frac{16-4}{4-2} = \frac{12}{2} = 6 \qquad (m/\text{秒})$$

この値は $t = 2$ の瞬間の速度とはいえない。そこで時間の幅をせまくするように工夫する。いま、$t = 2$ から $t = 2 + h$ までの平均の速度を求めてみると

$$\frac{(2+h)^2 - 2^2}{(2+h) - 2} = \frac{4h + h^2}{h} = 4 + h \qquad (m/\text{秒})$$

ここで，h を限りなく小さくしていくと $4 + h$ はだんだん 4 に近づいていく。この $4(m/\text{秒})$ を 2 秒後の**瞬間の速度**という。

さて，この平均の速度を $\dfrac{\Delta\ s}{\Delta\ t}$ と表してみると Δ s は進んだ距離、Δ t はかかった時間を表すことになる。また，**瞬間の速度**を $\dfrac{ds}{dt}$ と表してみると $\displaystyle\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$ と書くのは自然であろう。

一般に、t 秒後のある物体の位置を $f(t)$ とすると，時間 t が a から b まで経過したとき物体の位置も $f(a)$ から $f(b)$ まで移動する。そのとき $\Delta t = b - a$，$\Delta s = f(b) - f(a)$ であるから

平均の速度　$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

瞬間の速度　$$\frac{ds}{dt} = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

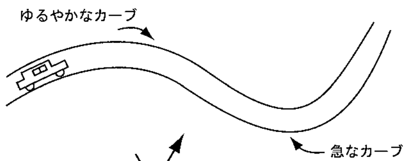
で表される。

＊ $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ **は分数**であるから，読み方はデルタティぶんのデルタエスとなる。

＊ $\dfrac{ds}{dt}$ **は極限値**であるから，読み方はデルタエス、デルタティとなる。

$\left[\dfrac{\Delta s}{\Delta t}\right.$ と $\dfrac{ds}{dt}$ の違いと使い方 (2)$\left.\right]$

車がゆるやかなカーブや急なカーブを通るとき，カーブの曲がる程度を数値化（式に代入して数値を求める）してみよう。



「車が円周上を動く場合」

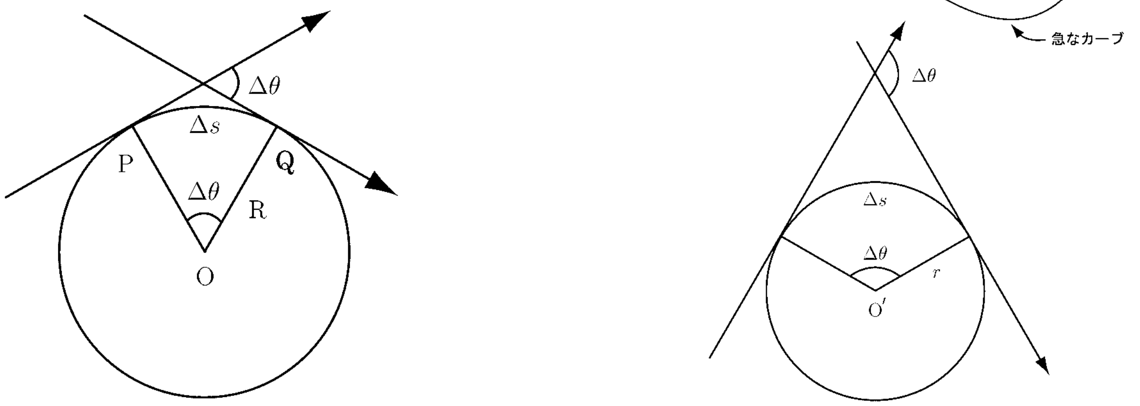


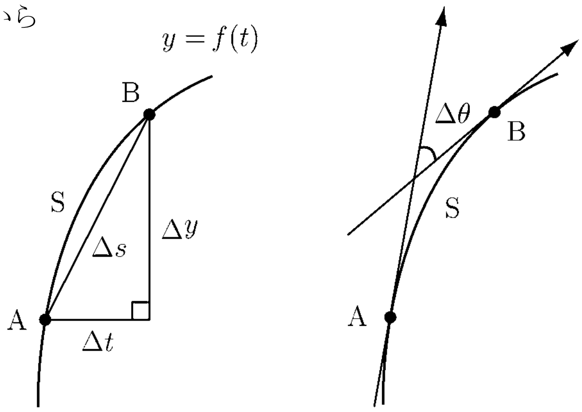
図 2

図 2 より，車が P から Q までの長さ Δ s だけ進んだとき，それに応じて接線の方向が $\Delta\theta$ だけ変化したとする。接線の方向の変化の割合は $\dfrac{\Delta\theta}{\Delta s}$ と考えられる。半径を R とすると θ はラディアンであるから，R $\Delta\theta = \Delta s$ である。ここで

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\frac{\Delta s}{R}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{1}{R} = \frac{1}{R}$$

となり，この k を曲率（曲がり方の度合）という。上の式から円の曲率は一定であり，大きい円の曲率は小さく，小さい円の曲率は大きいことがわかる。

次に，平面上の一般の曲線の曲率 k を求めてみよう。A から B までの曲線の長さを s とすると s が大変小さいとき $s = \Delta s$ とみなしてもよいから



$$\Delta s = \sqrt{(\Delta t)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta t)^2 \left\{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2\right\}}$$

となるから

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$$

ここで，$f'(t) = \tan\theta$ であり，θ は t の関数となるから，両辺を t で微分すると

$$f''(t) = \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{dt} = (1 + \tan^2\theta)\frac{d\theta}{dt} = \{(1 + (f'(t))^2\}\frac{d\theta}{dt}$$

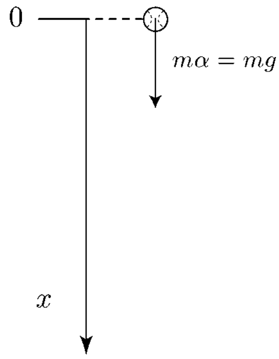
したがって

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\frac{\Delta\theta}{\Delta t}}{\frac{\Delta s}{\Delta t}} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\frac{f''(t)}{\{1+(f'(t))^2\}}}{\sqrt{1 + (\frac{\Delta y}{\Delta t})^2}} \qquad \text{ゆえに} \qquad k = \frac{f''(t)}{\left\{1 + \left(f'(t)\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

＜ **付録 2** ＞　　[ボールを落とす]

地球上で，つかんだボールをそっと離して落としたことについて考える。
ボールに働く重力の強さ f は，ボールの質量 m に比例するから，その比例定数を g とすると

$$f = mg$$



である。一方，ボールの加速度 $\alpha = g$ は

$$\alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = g \qquad (1)$$

と表される。

(1) を解くには，両辺を積分すると

$$v = \frac{dx}{dt} = gt + v_0$$

さらに，積分をすると

$$x = \frac{1}{g}t^2 + v_0 t + x_0$$

ボールを離す瞬間を $t = 0$ とし，そのときの高さを原点にすると，$v_0 = 0$, $x_0 = 0$ より，

$$x = \frac{1}{2}gt^2$$

となる。

g は重力加速度で，約 9.8(m/sec^2) である。

v_0 は，何を表しているのだろう？

x_0 は，何を表しているのだろう？

問　ボールの速さが，松阪投手の最高速度 150km/h に達するには何秒かかるか。
また，そのときボールは何 m 落ちるか。

＜ 付録 3 ＞　[ボールを投げる]

地球上で，ボールを真上に投げることについて考える。
投げ上げられたボールは，下向きに重力が働く。その大きさは mg で上向きに働く力をプラス，下向きに働く力をマイナスとすると，ボールに働く力 f は

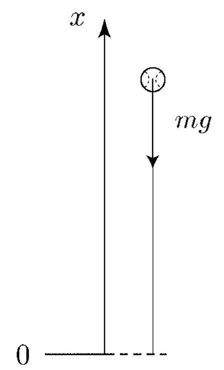
$$f = -mg$$

で表される。

一方，t 秒後の速度を v，高さを x とすると，ボールの加速度 $\alpha = g$ は

$$\alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -g$$

と表される。



両辺を，t で積分すると

$$v = \frac{dx}{dt} = -gt + v_0$$

さらに，積分をすると

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0$$

となる。

ボールを投げ上げた位置を原点とすると $x_0 = 0$ より，

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t$$

となる。

g は重力加速度で，約 9.8(m/sec^2) である。

$v_0 = 0$ は何を表しているのだろうか。

問　ボールを初速 150km/h で真上に投げ上げたとする。

(1) 何秒後に地上に落ちるか。

(2) ボールの最高の高さは何メートルか。

< 付録4 >

[ボールを目標にあてる (1)]

Monkey Hunting

図 1

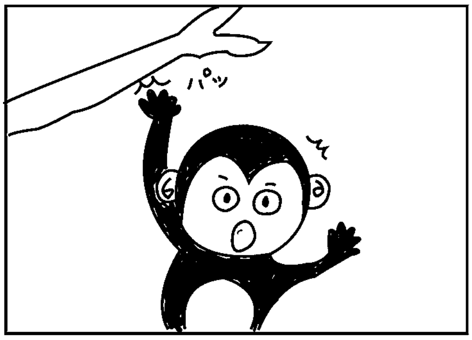


図 2

可愛い子ザルが，木の枝にぶらさがっている。それを見つけたいたずらっ子がボールをサルめがけて投げつけた。

その瞬間，それに気づいたサルは，枝から手を離した。浅はかなサル知恵であったかどうか，果たしてボールはサルに命中するのかどうか。

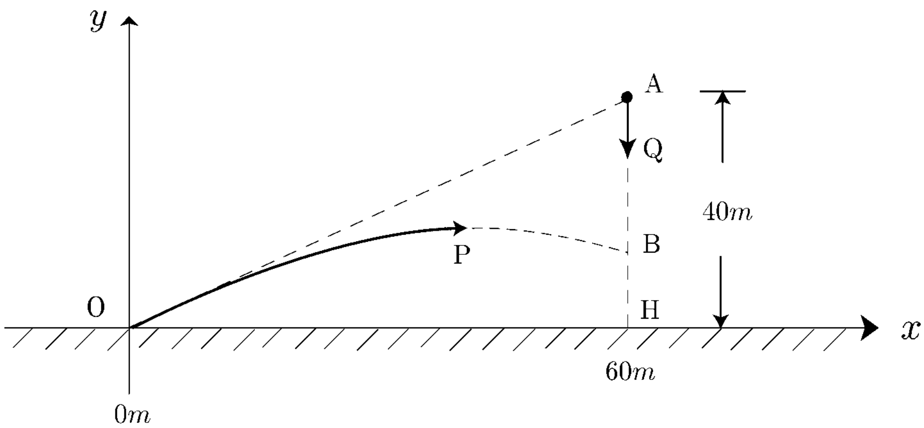


図１，図２のことを表したのは上の図である。

(1) O, A, B は，どのような位置を表しているか。

(2) P, Q は何を表しているか。

(3) サルに向かってボールを投げるとは数学（物理）上どのように対応すればよいか。

[ボールを目標にあてる (2)]

ボールの初速度を $v_0 = (30, 20)$ とすると，t 秒後の速度 $v = (v_x, v_y)$ は次のように表される。

$$v_x = 30 + \int_0^t 0\,dt = 30 \qquad (m/s)$$

$$v_y = 20 + \int_0^t (-g)\,dt = 20 - gt \qquad (m/s)$$

t 秒後のボールの位置 $P(x, y)$ は

$$x = \int_0^t 30\,dt = 30t \qquad (m)$$

$$y = \int_0^t (20 - gt)\,dt = 20t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (m) \qquad (1)$$

で表される。

同様にして，t 秒後のサルの位置 $Q(m, n)$ は,

$$m = OH = 60 \quad (m)$$

$$n = AH - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (2)$$

で表される。

したがって，ボールの位置を表す点 P が AH 上に達するのに要する時間は

$$30t = 60, \text{すなわち}\ t = 2 \quad (\text{秒})$$

このときのボールの高さは (1) より

$$y = 20 \times 2 - \frac{1}{2} \times 9.8 \times 2^2$$

また，サルの高さは (2) より

$$n = 40 - \frac{1}{2} \times 9.8 \times 2^2$$

となって，ボールは確かにサルに命中する。

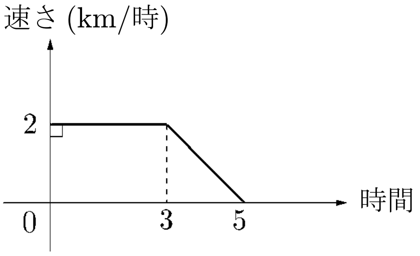
つまり，サルが重力で落ちる距離だけ，同様にボールも重力で落下するのであるから，最初からサルを狙って投げると必ず当たるのである。

問　「重力」という言葉をわかりやすく説明しなさい。

＜ 付録 5 ＞　　[距離と積分]

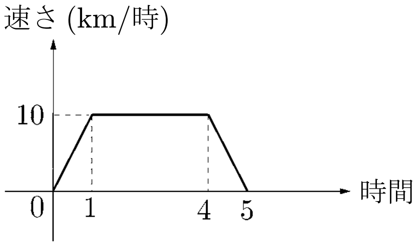
① **桜木君の場合 ···** バスケット部の桜木君が左の図のように歩いた。

歩いた距離を求めてみよう。

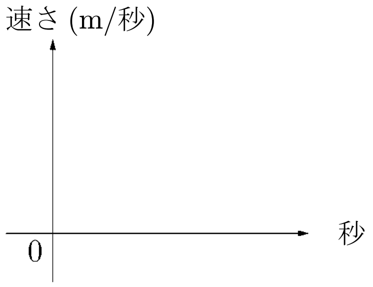


② **流川君の場合 ···** 流川君は自転車で，左の図のように行った。

移動した距離を，積分を使って求めてみよう。

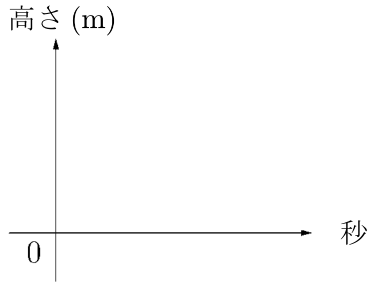


③ **エレベーター問題 ···** １Ｆから２Ｆまで，下記のようにエレベーターが動いている。そのことを２通りの図で表してみよう。

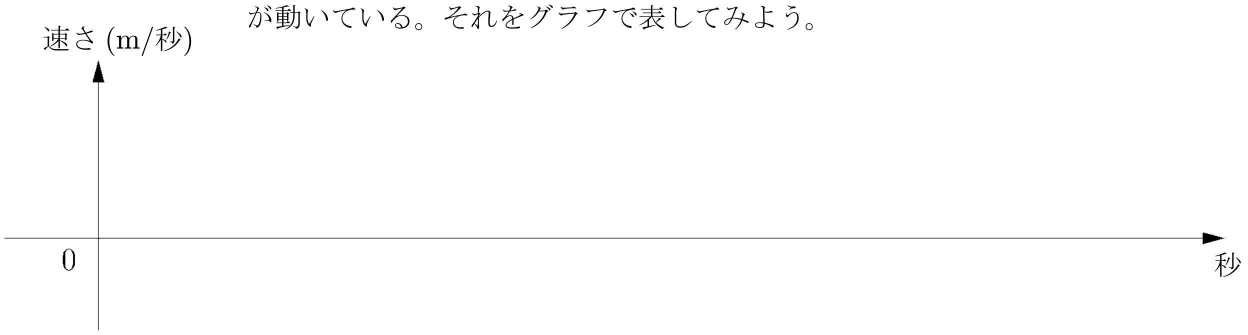


経過時間	速さ
0〜0.5 秒	*0m/秒〜2m/秒
0.5〜2.5 秒	2m/秒
2.5〜3 秒	*2m/秒〜0m/秒
3〜5 秒	0m/秒

*加速度は一定である



④ **エレベーター問題 ···** １Ｆから４Ｆまで，上記のようにエレベーターが動いている。それをグラフで表してみよう。



１Ｆのフロアから４Ｆのフロアまでの高さを積分を使って求めてみよう。

わかったことを書いてみよう