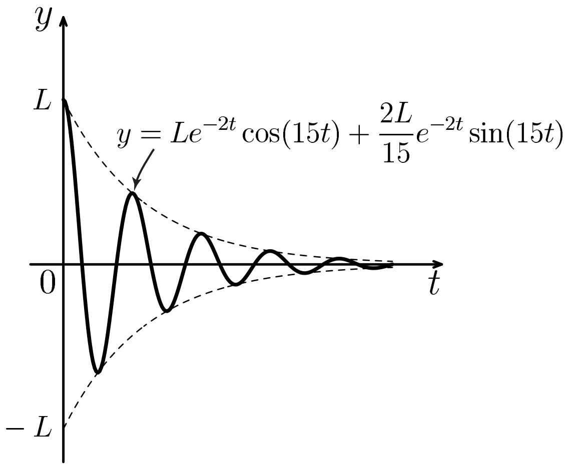
高知工科大学

**Kochi University of Technology**

# 数学 3

(2005年度版)




## 常微分方程式入門

(複素数と複素平面，1階線形微分方程式
変数分離形，定数係数2階線形微分方程式)

井上 昌昭　著

# ＜複素数の定義＞

$$i^2 = -1$$

となる数を考え、この数 $i$ を **虚数単位** という。虚数単位は $i = \sqrt{-1}$ と書く場合もある。(電気関係の本は虚数単位を $j$ で表すことがあるが数学や物理学の本では虚数単位は $i$ で統一してある。)

実数 $a, b$ に対し

$$z = a + bi$$

の形を **複素数** (*complex number*) とよび、複素数全体の集合を $\boldsymbol{C}$ という記号で表す。実数 $a, b$ をそれぞれ複素数 $z$ の **実部** (*real part*) および **虚部** (*imaginary part*) とよび、

$$a = \mathrm{Re}(z)\ ,\ b = \mathrm{Im}(z)$$

という記号で表す。とくに

$$b = 0 \text{ のとき} \quad z = a + 0i = a$$

と定める。つまり実数は虚部が 0 の特別な複素数と考えることにする。また $b \neq 0$ のとき、 $z$ を **虚数** とよび、とくに

$$bi \quad (a = 0, b \neq 0)$$

の形の虚数を **純虚数** という。

$$\text{複素数}\,(\boldsymbol{C}) \begin{cases} \text{実数}\,(\boldsymbol{R}) \\ \text{虚数} \begin{cases} \text{純虚数} & \cdots\ 2i\ ,\ \frac{1}{3}i\ ,\ -\sqrt{2}i\ \text{など} \\ \text{その他の虚数} & \cdots\ 1+2i\ ,\ -2+\sqrt{3}i\ \text{など} \end{cases} \end{cases}$$

２つの複素数の実部と虚部がそれぞれ等しい場合に限り、２つの複素数が等しいという。すなわち

$$a + bi = c + di \quad \Leftrightarrow \quad a = c \text{ かつ } b = d$$

$$\text{とくに} \quad a + bi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b = 0$$

**例**

(1) $a + bi = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad a = \sqrt{3},\ \ b = 0$

(2) $a + bi = -3i \quad \Leftrightarrow \quad a = 0,\ \ b = -3$

(3) $a + bi = \dfrac{1 - \sqrt{3}i}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a = \dfrac{1}{2},\ \ b = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

**問**　次式をみたす実数 $a, b$ を求めよ。

(1) $a + bi = \dfrac{1 + 3i}{2}$　　　(2) $a + bi = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{3}\,i$

# < 複素数の四則演算 (1) >

複素数の和（差）は実部どうしの和（差）と虚部どうしの和（差）にわけて計算すればよい。

> $a, b, c, d$ が実数のとき
> $$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$
> $$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

**例 1**　$(2+3i)+(4+5i)=(2+4)+(3+5)i=6+8i$

$(5+7i)-(8+i)=(5-8)+(7-1)i=-3+6i$

**問 1**　次式を簡単にせよ。

(1)　$(2+i)+(3-i)$

$=$

(2)　$(4-i)-(5-3i)$

$=$

(3)　$\left(0.13+\dfrac{1}{2}i\right)+\left(\dfrac{3}{4}-1.5i\right)$

$=$

(4)　$\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}i\right)-\left(\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{3}i\right)$

$=$

(5)　$\left(\sqrt{3}-i\right)+\left(\sqrt{1}-2i\right)$

$=$

(6)　$\left(\dfrac{1}{4}-\sqrt{2}i\right)-\left(\dfrac{1}{3}+\sqrt{3}i\right)$

$=$

複素数の実数倍は、実部と虚部のそれぞれの実数倍となる。

> $a, b, k$ が実数のとき
> $$k(a+bi)=(ka)+(kb)i$$

**例 2**　$2(1+4i)+5(3-2i)=(2+8i)+(15-10i)=17-2i$

**問 2**　次式を簡単にせよ。

(1)　$3(4+i)$

$=$

(2)　$6\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}i\right)$

$=$

(3)　$3(6-2i)-4(2-i)$

$=$

(4)　$\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}i\right)+\left(\dfrac{1}{3}-2i\right)$

$=$

# < 複素数の四則演算 (2) >

複素数どうしの積は通常の計算規則（分配法則）によって計算すればよいが、$i^2$ が出たところで $i^2 = -1$ とおきかえて答を出す。

**例**

(1) $$\begin{aligned}(3+4i)(5+7i) &= 3\times 5 + 3\times 7i + 4i\times 5 + 4i\times 7i\\ &= 15+21i+20i+28i^2\\ &= 15+41i-28\\ &= -13+41i\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}(3+5i)^2 &= 3^2 + 2\times 3\times 5i + (5i)^2\\ &= 9+30i+25i^2\\ &= 9+30i-25\\ &= -16+30i\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}(2+5i)^3 &= 2^3 + 3\times 2^2\times 5i + 3\times 2\times (5i)^2 + (5i)^3\\ &= 8+60i+150i^2+125i^3\\ &= 8+60i-150+125(i^2\times i)\\ &= -142+60i-125i\\ &= -142-65i\end{aligned}$$

**問**　次式を簡単にせよ。

(1) $i^3 =$　　(2) $i^4 =$　　(3) $i^5 =$

(4) $i^6 =$　　(5) $i^7 =$　　(6) $i^8 =$

(7) $(1+i)(1-i) =$　　(8) $(2+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i) =$

(9) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)$

$=$

(10) $(-1+i)^2 =$

(11) $(-1-i)^2 =$　　(12) $(4+2i)(2-3i)$

$=$

(13) $(3-2i)(1-3i)$

$=$

(14) $(3-i)^3 =$

# < 複素数の四則演算 (3) >

複素数どうしの割り算は、分母を必ず実数になおして求める。

**例**

(1) $\dfrac{1}{i} = \dfrac{1 \times i}{i \times i} = \dfrac{i}{-1} = -i$

(2) $\dfrac{1}{2+3i} = \dfrac{1 \times (2-3i)}{(2+3i) \times (2-3i)} = \dfrac{2-3i}{4-(3i)^2} = \dfrac{2-3i}{4+9} = \dfrac{2}{13} - \dfrac{3}{13}i$

(3) $\dfrac{2+i}{1-\sqrt{3}i} = \dfrac{(2+i) \times (1+\sqrt{3}i)}{(1-\sqrt{3}i) \times (1+\sqrt{3}i)} = \dfrac{2+2\sqrt{3}i+i+\sqrt{3}i^2}{1^2-(\sqrt{3}i)^2}$

$$= \frac{(2-\sqrt{3})+(2\sqrt{3}+1)i}{1+3} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{2\sqrt{3}+1}{4}\right)i$$

**問**　次式を簡単にせよ。

(1) $\dfrac{-1}{1+i} =$

(2) $\dfrac{-1}{1-i} =$

(3) $\dfrac{-i}{1-i} =$

(4) $\dfrac{3}{\sqrt{5}-i} =$

(5) $\dfrac{7}{3+\sqrt{5}i} =$

(6) $\dfrac{-i}{1+i} =$

(7) $\dfrac{-1}{i(\sqrt{3}+i)} =$

(8) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-i} =$

(9) $\dfrac{1}{(\sqrt{2}-i)^2}$

$=$

(10) $\dfrac{i}{(1+i)^4} =$

# < 負の数の平方根 >

前のページまでの計算規則に従うと

$$(\sqrt{2}i)^2 = -2\ ,\quad (-\sqrt{2}i)^2 = -2$$

となるから、 $-2$ の平方根は $\sqrt{2}i$ と $-\sqrt{2}i$ である。
これらの数をそれぞれ

$$\sqrt{-2} = \sqrt{2}i\ ,\quad -\sqrt{-2} = -\sqrt{2}i$$

のように表すことにする。一般に

$$\boxed{a > 0 \text{ のとき } \quad \sqrt{-a} = \sqrt{a}\, i}$$

と定める。

**例 1**　$\sqrt{-4} \times \sqrt{-9} = \sqrt{4}i \times \sqrt{9}i = 2 \times 3 \times i^2 = -6$

（注）　$\sqrt{-4} \times \sqrt{-9} \neq \sqrt{(-4) \times (-9)}\ \ (= \sqrt{36} = 6)$

このように $\sqrt{\ }$ の中がマイナスになるときは、普通の $\sqrt{\ }$ の
計算規則がなりたたない。 $\sqrt{\ }$ の中がマイナスになる場合
は必ず虚数単位 $i$ を用いて計算しなければならない。

**例 2**

$$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{-9}} = \frac{2}{3i} = \frac{2 \times i}{3i \times i} = \frac{2i}{-3} = -\frac{2}{3}i$$

$$\sqrt{\frac{4}{-9}} = \sqrt{-\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{4}{9}}i = \frac{2}{3}i$$

従って　$\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{-9}} \neq \sqrt{\dfrac{4}{-9}}$ である。

**問**　次式を簡単にせよ。

(1)　$\sqrt{(-3) \times (-4) \times (-5)}$

(2)　$\sqrt{-3} \times \sqrt{-4} \times \sqrt{-5}$

(3)　$\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{-4}}$

(4)　$\sqrt{\dfrac{12}{-4}}$

# ＜ 2 次方程式 ＞

実数 $a, b, c$ $(a \neq 0)$ に対し、2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

は

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}$$

と変形できる。従って

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

より解の公式

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

が求まる。ここで $\sqrt{\phantom{x}}$ の中がマイナスになれば、答は虚数になる。
虚数解も 2 次方程式の解と考えると、2 次方程式は複素数の範囲で必ず解がある。

**例**　2 次方程式

$$3x^2 + 5x + 7 = 0$$

は解の公式によって

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 3 \times 7}}{2 \times 3} = \frac{-5 \pm \sqrt{-59}}{6} = -\frac{5}{6} \pm \frac{\sqrt{59}}{6} i$$

**問**　次の 2 次方程式の解を複素数の範囲で求めよ。

(1)　$x^2 + x + 2 = 0$　　　$x =$

(2)　$x^2 + 3x + 9 = 1$　　　$x =$

(3)　$3x^2 - 5x + 4 = 0$　　　$x =$

# < 高次方程式 >

因数分解の公式

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

を覚えておくと良い。

**例 1**　3 次方程式

(1)　$x^3 - 8 = 0$

を考える。因数分解すると

$x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4) = 0$　より

$x - 2 = 0$　かまたは　$x^2 + 2x + 4 = 0$

実数の範囲では (1) の解は $x = 2$ だけであるが, 複素数の範囲では

**(答)**　$x = 2$ , $x = -1+\sqrt{3}i$ , $x = -1-\sqrt{3}i$

の 3 通りある。

**例 2**　4 次方程式

(2)　$x^4 - 1 = 0$

を考える。因数分解すると　$x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = 0$　より

$x^2 - 1 = 0$　かまたは　$x^2 + 1 = 0$

である。よって実数の範囲では (2) の解は $x = \pm 1$ だけであるが, 複素数の範囲では

**(答)**　$x = \pm 1$ , $x = \pm i$　の 4 通りある。

**問**　次の方程式の解を複素数の範囲で求めよ。

(1)　$x^3 - 1 = 0$　　(2)　$x^3 + 8 = 0$

(3)　$x^4 - 16 = 0$

# < 共役複素数 >

たとえば

$$3+2i \text{ と } 3-2i\ , \qquad 1-\sqrt{3}i \text{ と } 1+\sqrt{3}i$$

のように, 虚部の符号だけが違う 2 つの複素数を **互いに共役** (きょうやく) という。
一方は他方の **共役複素数** という。複素数 $z$ の共役複素数を $\overline{z}$ で表す。
すなわち, 実数 $a, b$ に対し,

$$\boxed{z = a+bi \quad \text{のとき} \quad \overline{z} = a-bi}$$

である。従って $\overline{z}$ の共役複素数は $\overline{\overline{z}} = a+bi$ であるから

$$\overline{\overline{z}} = z$$

である。

**例** (1) $\overline{2+3i} = 2-3i\ ,\quad \overline{(-1-\sqrt{2}i)} = -1+\sqrt{2}i$

(2) $\overline{4} = 4 \qquad ,\quad \overline{(-5i)} = 5i$

(3) $z = 3+2i$ のとき $\overline{z} = 3-2i$

$z+\overline{z} = (3+2i)+(3-2i) = 6$

$z\overline{z} = (3+2i)(3-2i) = 3^2+2^2 = 13$

**問 1** 以下の複素数 $z$ に対し, 共役複素数 $\overline{z}$ を求めよ。

(1) $z = 1\ ,\ \overline{z} =$　　　　(2) $z = i\ ,\ \overline{z} =$

(3) $z = 1-i\ ,\ \overline{z} =$　　　　(4) $z = \dfrac{1+i}{2}\ ,\ \overline{z} =$

**問 2** $z = 4+3i$ に対し, 次式を計算せよ。

(1) $\dfrac{1}{2}(z+\overline{z})$　　　　(2) $\dfrac{1}{2i}(z-\overline{z})$　　　　(3) $z\overline{z}$

$=$　　　　$=$　　　　$=$

**問 3** 実数 $a, b$ に対し, $z = a+bi$ とする。以下の値を $a$ と $b$ で表せ。

(1) $\dfrac{1}{2}(z+\overline{z})$　　　　(2) $\dfrac{1}{2i}(z-\overline{z})$　　　　(3) $z\overline{z}$

$=$　　　　$=$　　　　$=$

# ＜ 絶対値 ＞

複素数 $z=a+bi$（ $a,b$ は実数）に対し、

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

を $z$ の **絶対値** という。

**例 1**　$z=3+2i$ のとき

$$|z|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$$

**問 1**　複素数 $z$ が以下の場合に絶対値 $|z|$ を求めよ。

(1) $z=-1$　(2) $z=7i$　(3) $z=3+4i$　(4) $z=\dfrac{1+i}{2}$

$|z|=$　$|z|=$　$|z|=$　$|z|=$

前ページの結果より複素数 $z=a+bi$ に対して

$$\boxed{z\bar{z}=a^2+b^2=|z|^2}$$

が成り立つ。

**例 2**　$z=2+3i$ のとき

$$|z|^2=2^2+3^2=13$$

$$z^2=(2+3i)^2=2^2+2\times2\times3i-3^2=-5+12i$$

$$|z^2|=\sqrt{(-5)^2+(12)^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$$

**問 2**　以下の複素数 $z$ に対して、 $|z|^2, z^2, |z^2|$ を求めよ。

(1) $z=4-3i$　(2) $z=1+i$

$|z|^2=$　$|z|^2=$

$z^2=$　$z^2=$

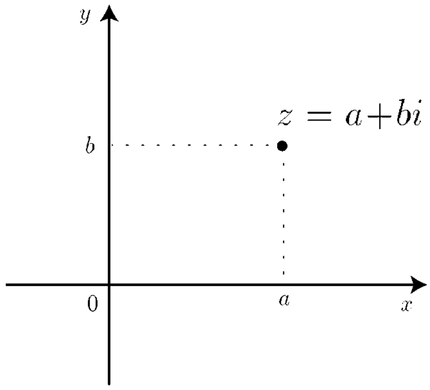
$|z^2|=$　$|z^2|=$

# ＜複素平面 (1)＞

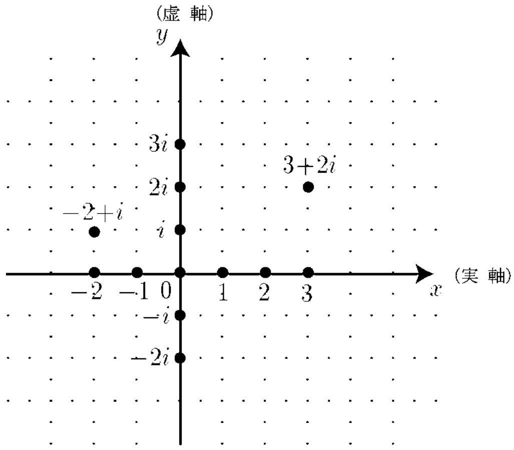
定数が数直線上の点で表されたように、複素数を平面上の点として表現する。実数 $a, b$ に対し、複素数

$$z = a + bi$$

を、右図のように、$x$ 軸上の目もりが $a, y$ 軸上の目もりが $b$ である $xy$ 平面上の点として表す。この平面を **複素平面** または **ガウス平面** という。




**例 1**　右図のように
　実数 $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ は全て $x$ 軸上に並んでいる。この $x$ 軸を **実軸** という。
純虚数 $-2i, -i, i, 2i, 3i$ は全て $y$ 軸上に並んでいる。この $y$ 軸を **虚軸** という。




**問 1**　例 1 の右図の中に以下の複素数を図示せよ。

(1) $1 + i$,　　(2) $2 - 2i$,　　(3) $-3 + 3i$,　　(4) $-2 - 3i$

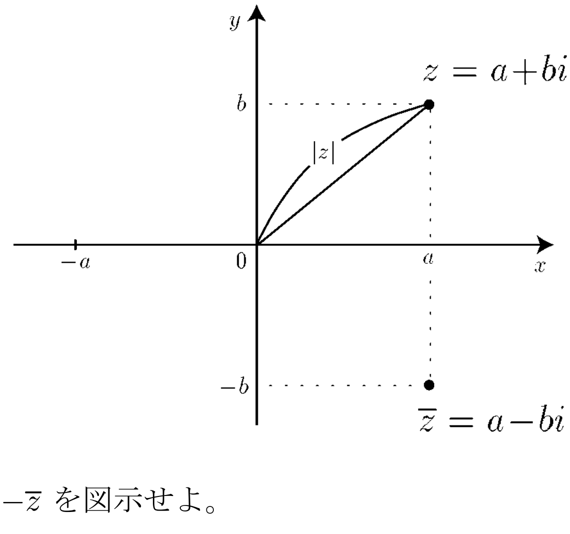
**例 2**　$a, b$ を正の数とすると複素数 $z = a + bi$ は右図の位置にあり、共役複素数

$$\overline{z} = a - bi$$

は実軸に関して対称な位置にある。
また、絶対値

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

は原点からの距離を表す。




**問 2**　例 2 の右図上に $-z$ および $-\overline{z}$ を図示せよ。

# < 複素平面 (2) >

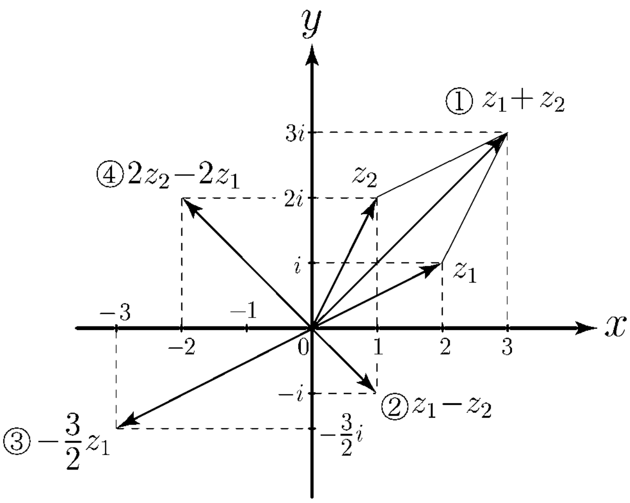
**例** $z_1 = 2 + i$ , $z_2 = 1 + 2i$
のとき以下の複素数

① $z_1 + z_2 = 3 + 3i$

② $z_1 - z_2 = 1 - i$

③ $-\dfrac{3}{2}z_1 = -3 - \dfrac{3}{2}i$

④ $2z_2 - 2z_1 = (2 + 4i) - (4 + 2i)$
$= -2 + 2i$




を複素平面上に表すと右図のようになる。
①は $z_1$ と $z_2$ の和である。右図から四点 (原点 , $z_1$ , $z_2$ , $z_1 + z_2$)
を結ぶと平行四辺形になる。
③は $z_1$ の $-\dfrac{3}{2}$ 倍である。$z_1$ と原点を結ぶ直線上に $-\dfrac{3}{2}z_1$ がある。

(注)　複素数の和・差・実数倍を複素平面上に表すと, 原点を始点とする
平面ベクトルの和・差・実数倍と同じ位置関係になる。

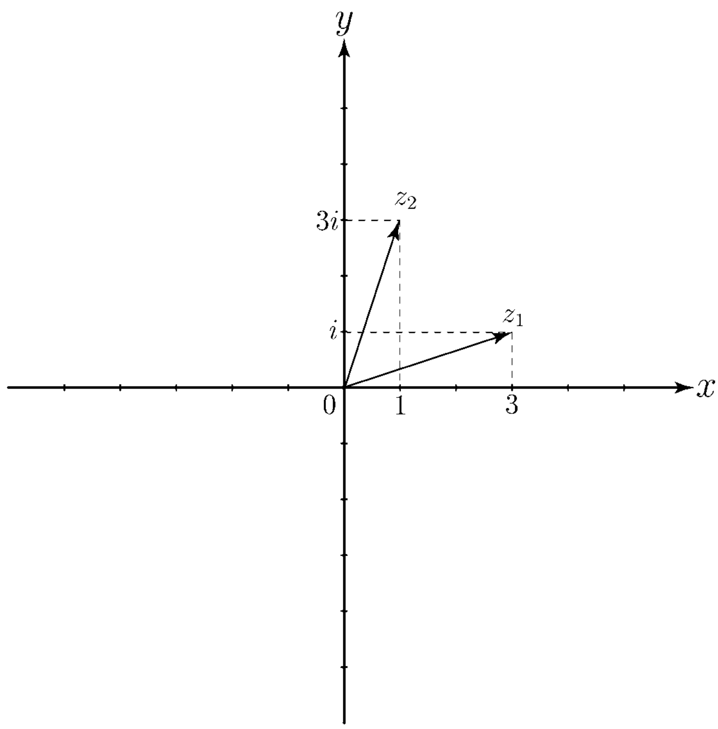
**問** $z_1 = 3 + i$ , $z_2 = 1 + 3i$
のとき以下の複素数を
計算し、例のように
複素平面上に図示せよ。

① $z_1 + z_2 =$

② $z_1 - z_2 =$

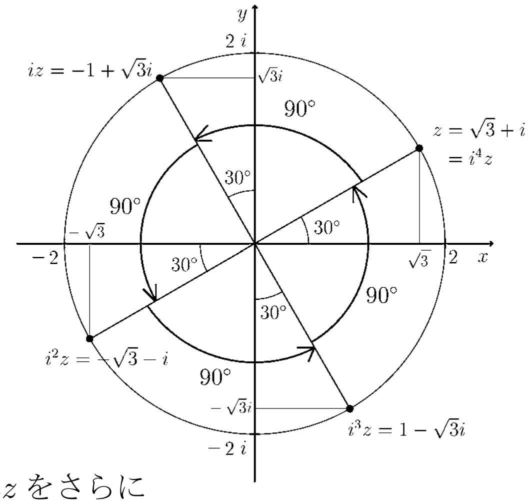
③ $-\dfrac{3}{2}z_1 =$

④ $2z_2 - 2z_1 =$



# < 複素数の $i$ 倍 >

複素数の和・差・実数倍はベクトルと同じであるが，複素数倍は別の図形的な意味がある。一般の場合は後で説明するが，このページでは $i$ 倍の図形的な意味を考える。




**例**　$z = \sqrt{3} + i$ に対し

$$iz = i(\sqrt{3} + i) = -1 + \sqrt{3}i$$
$$i^2 z = i(iz) = i(-1 + \sqrt{3}i) = -\sqrt{3} - i$$
$$i^3 z = i(i^2 z) = i(-\sqrt{3} - i) = 1 - \sqrt{3}i$$
$$i^4 z = i(i^3 z) = i(1 - \sqrt{3}i) = \sqrt{3} + i = z$$

右図より $iz$ は $z$ を原点を中心として反時計まわりに $90°$ 回転させたものであり，$i^2$ は $iz$ をさらに $90°$ 回転させたものであり，$i^3 z$ は $i^2 z$ をさらに $90°$ 回転させたものであり，$i^4 z$ は $i^3 z$ をさらに $90°$ 回転させたものであるからもとの $z$ にもどる。

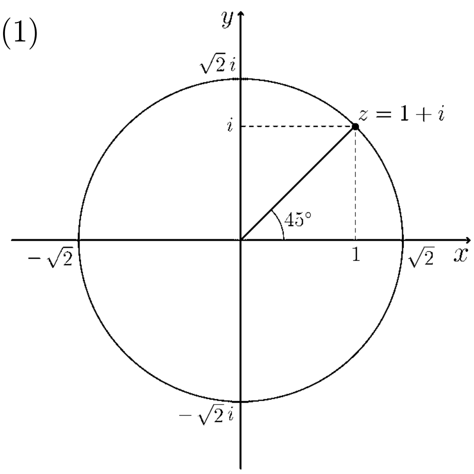
**問**　$z$ が以下の場合に

$iz$ , $i^2 z$ , $i^3 z$ , $i^4 z$

を求め，右図に記入せよ。

(1) $z = 1 + i$

(1)




$iz =$

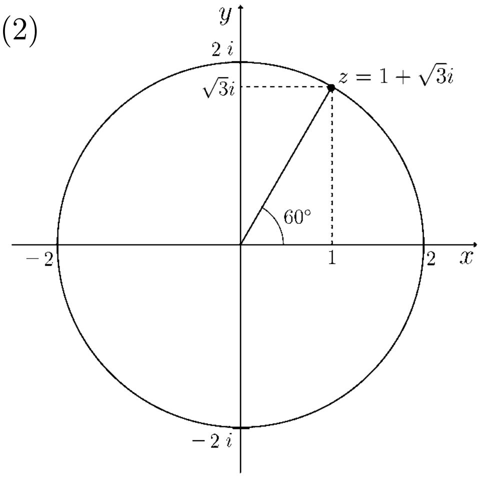
$i^2 z =$

$i^3 z =$

$i^4 z =$

(2) $z = 1 + \sqrt{3}i$

(2)




$iz =$

$i^2 z =$

$i^3 z =$

$i^4 z =$

# < 絶対値 1 の複素数 >

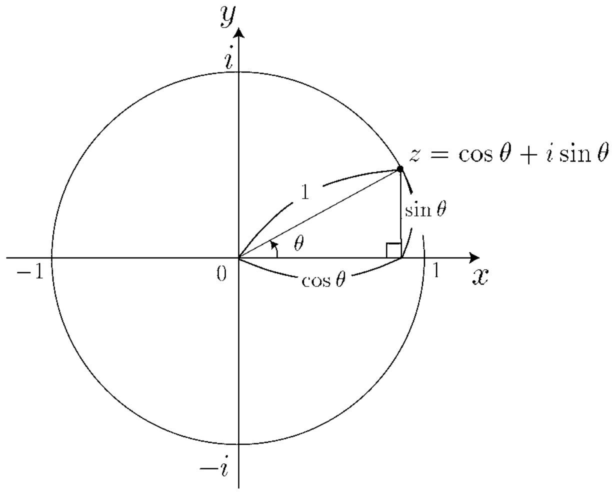
複素数 $z$ の絶対値が 1，　つまり

$$|z| = 1$$

であるとき，$z$ は複素平面の中では，原点 $O$ からの距離が 1 の単位円周上にある。今，右図のように実軸（$x$ 軸）の正の部分からの角度が $\theta$ であるとき，$z$ は

$$\boxed{z = \cos\theta + i\sin\theta}$$

と表される。




**例**　(1) $\theta = 0$ のとき $\cos 0 + i\sin 0 = 1$

(2) $\theta = 90^\circ = \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = i$

(3) $\theta = 30^\circ = \dfrac{\pi}{6}$ のとき $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$

**問**　次の三角関数で表されている複素数を簡単にせよ。

(1) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，(2) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$，(3) $\cos\left(\dfrac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)$

$=$　　　　$=$　　　　$=$

(4) $\cos\left(\dfrac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)$，(5) $\cos\left(\dfrac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{5}{6}\pi\right)$，(6) $\cos(\pi) + i\sin(\pi)$

$=$　　　　$=$　　　　$=$

(7) $\cos\left(\dfrac{7}{6}\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{7}{6}\pi\right)$，(8) $\cos\left(\dfrac{5}{4}\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{5}{4}\pi\right)$，(9) $\cos\left(\dfrac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{4}{3}\pi\right)$

$=$　　　　$=$　　　　$=$

(10) $\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)$，(11) $\cos\left(\dfrac{5}{3}\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{5}{3}\pi\right)$，(12) $\cos\left(\dfrac{7}{4}\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{7}{4}\pi\right)$

$=$　　　　$=$　　　　$=$

# ＜極形式 (1)＞

複素数 $z = x + yi$ に対し,

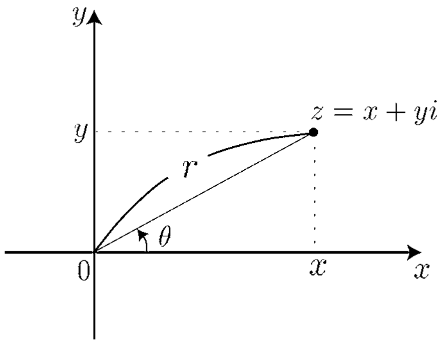
$$|z| = r$$

で，右図のように $x$ 軸の正の部分からの角度が $\theta$ であるとき

$$x = r\cos\theta\,,\quad y = r\sin\theta$$

となる。従って

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}\quad\text{（極形式）}$$




と表される。これを $z$ の**極形式**という。このとき角 $\theta$ は複素数 $z$ の**偏角** という。

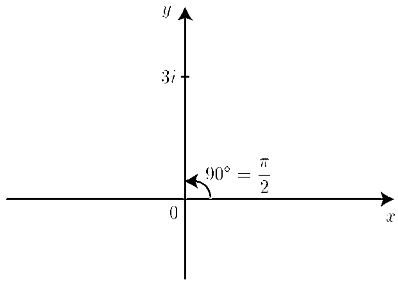
(注) $r = |z|$ より $r > 0$ である。

**例**　(1) $z = 3i$ のとき右図より

$$r = |z| = 3,\ \theta = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

だから

$$3i = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

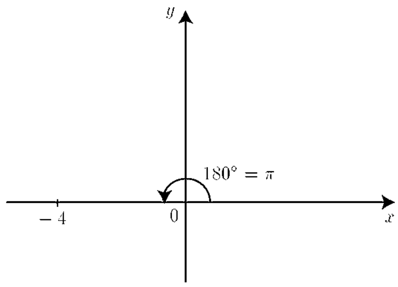



(2) $z = -4$ のとき右図より

$$r = |z| = 4,\ \theta = 180^\circ = \pi$$

だから

$$-4 = 4\,(\cos\pi + i\sin\pi)$$

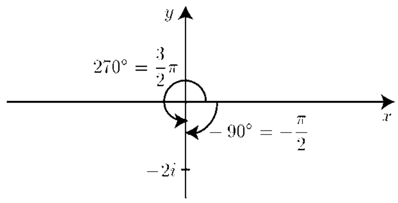



(3) $z = -2i$ のとき右図より

$$r = |z| = 2,\ \theta = 270^\circ = \frac{3}{2}\pi$$

だから

$$-2i = 2\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right)$$




(注 1) $270^\circ$ の位置と $-90^\circ$ の位置は同じだから

$$-2i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$ としてもよい。

(注 2) 例 (3) で $-2i = -2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$ としてはいけない。

極形式として表す場合には $r = |z|$ は正 $(r > 0)$ だから。

**問**　次の複素数を極形式になおせ。

(1)　$4i$　　　(2)　$-2$

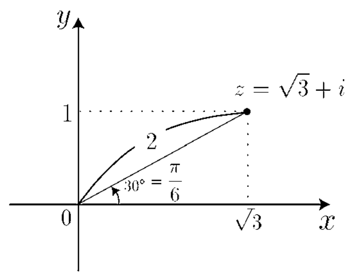
(3)　$-\sqrt{2}i$

# ＜ 極形式 (2) ＞

**例**　(1) $z = \sqrt{3} + i$ に対し，$r = |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ で

$\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{6}$ ，$\dfrac{1}{2} = \sin\dfrac{\pi}{6}$ だから

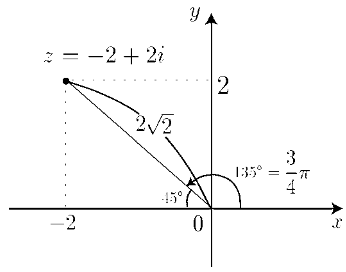
$$z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$




(2) $z = -2 + 2i$ に対し，$r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = 2\sqrt{2}$ より

$$z = 2\sqrt{2}\left(\frac{-2+2i}{2\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

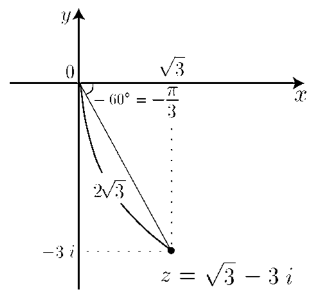
$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$




(3) $z = \sqrt{3} - 3i$ に対し，$r = |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-3)^2} = 2\sqrt{3}$ より

$$z = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}-3i}{2\sqrt{3}}\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$




(注) $z = x + yi$ に対し，$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$ を計算し，$\dfrac{x}{r} = \cos\theta$,

$\dfrac{y}{r} = \sin\theta$ を満たす角 $\theta$ を求めれば良い。なお角 $\theta$ は必ず弧度法 (ラジアン) で表す。また例 (3) の偏角 $\theta$ は $-\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{5\pi}{3}$ のどちらでもよい。

**問**　以下の複素数を極形式で表せ。

(1)　$z = 1 + i$

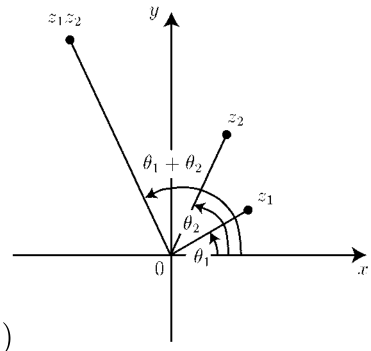
(2)　$z = -1 + \sqrt{3}i$

(3)　$z = -\sqrt{6} - \sqrt{6}i$

(4)　$z = -3 - \sqrt{3}i$

(5)　$z = \sqrt{6} - \sqrt{2}i$

# ＜複素数の積＞




2 つの複素数 $z_1, z_2$ が極形式で

$$z_1 = r_1\{\cos(\theta_1)+i\sin(\theta_1)\}$$
$$z_2 = r_2\{\cos(\theta_2)+i\sin(\theta_2)\}$$

と表されているとき，積 $z_1z_2$ は

$$\begin{aligned}z_1z_2 &= r_1r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\ &= r_1r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)\}\\ &= r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}\end{aligned}$$

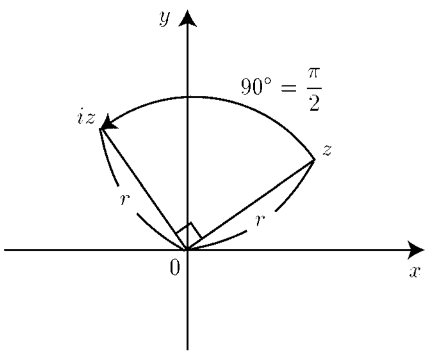
となる。従って

$$\boxed{z_1z_2 = r_1\{\cos(\theta_1)+i\sin(\theta_1)\}\times r_2\{\cos(\theta_2)+i\sin(\theta_2)\} = r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}}$$

（注） 上の計算で三角関数の加法定理

$$\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2 = \sin(\theta_1+\theta_2)$$
$$\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2 = \cos(\theta_1+\theta_2)$$

を用いた。




**例**　$z = r(\cos\theta+i\sin\theta)$ に

$$i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

をかけると，上の式より

$$iz = r\left\{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

より，右図のように，$iz$ は $z$ を原点を中心として反時計まわりに $90^\circ = \dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した位置にある。

**問**　$z = r(\cos\theta+i\sin\theta)$ に対して，以下の複素数の積を極形式で表し，回転の角度を求めよ。

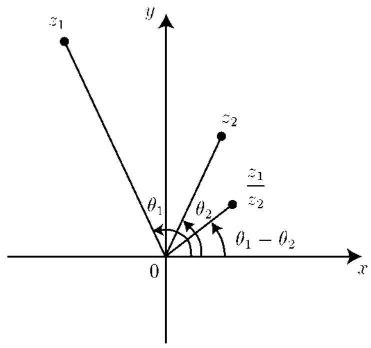
(1) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$

(2) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)z$

(3) $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)z$

# < 複素数の商 >

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdots(1)$$
$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\cdots(2)$$




に対し,

$$\frac{z_1}{z_2} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

とおくと

$$z_1 = \frac{z_1}{z_2} \times z_2 = r(\cos\theta + i\sin\theta) \times r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

より

$$z_1 = rr_2\left\{\cos(\theta+\theta_2) + i\sin(\theta+\theta_2)\right\}$$

(1) 式と比較すれば

$$r_1 = rr_2,\ \theta_1 = \theta + \theta_2$$

だから

$$r = \frac{r_1}{r_2},\ \theta = \theta_1 - \theta_2$$

よって

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right\}}$$

**例**　$z_1 = 1+\sqrt{3}i = 2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}$

$z_2 = 1+i = \sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\}$

より

$$\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$
$$= \sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right\}$$

**問**　次の複素数の商を極形式で表せ。

(1) $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i} =$

(2) $\dfrac{-2+2i}{1+i} =$

(3) $\dfrac{-1-i}{-\sqrt{3}+i} =$

# < ド・モアブルの定理 >

複素数の積で

$$r_1\big(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\big) \times r_2\big(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\big) = r_1 r_2\big\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\big\}$$

であった。とくに $r_1 = r_2 = 1$ のときは

$$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \times (\cos\theta_2 + i\ \sin\theta_2) = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)$$

となる。ここで $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ とすれば

(1)　$\big(\cos\theta + i\sin\theta\big)^2 = \big(\cos\theta + i\sin\theta\big) \times \big(\cos\theta + i\sin\theta\big) = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$

又，$\theta_1 = 2\theta$ , $\theta_2 = \theta$ とすれば

(2)　$\big(\cos\theta + i\sin\theta\big)^3 = \big\{\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)\big\} \times \big(\cos\theta + i\sin\theta\big) = \cos(3\theta) + i\sin(3\theta)$

(1) と (2) を一般化すると，

$$\boxed{\big(\cos\theta + i\sin\theta\big)^n \ = \ \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$$ (ド・モアブルの定理)

が任意の自然数 $n$ に対して成立する。この公式を **ド・モアブルの定理** という。

**例**　$\sqrt{3} + i = 2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right\}$ だから

$$(\sqrt{3}+i)^6 = 2^6 \times \left\{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right\}^6 = 64 \times \big\{\cos(\pi) + i\sin(\pi)\big\} = -64$$

**問**　次の計算をせよ。

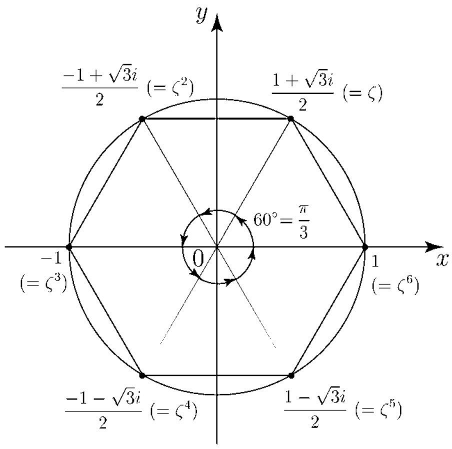
(1)　$(-\sqrt{3}+i)^3 =$

(2)　$\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^6 =$

(3)　$(1-i)^4 =$

(4)　$\left(\dfrac{-1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^{12} =$

# ＜1の累乗根＞




## 例題

$$z^6 = 1$$

をみたす複素数$z$をすべて求めよ。

(解) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおくと

$$z^6 = r^6\big(\cos(6\theta) + i\sin(6\theta)\big)$$

となる。一方 1 を極形式で表すと

$$1 = \cos 0 + i\sin 0 = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = \cos(4\pi) + i\sin(4\pi) = \cdots$$

となる。$z^6$ と等しいから

$$z^6 = r^6\big(\cos(6\theta) + i\sin(6\theta)\big) = \cos(2n\pi) + i\sin(2n\pi) = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

よって

$$r = 1\ ,\ \ 6\theta = 2n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

となる。

$n = 0$ のとき　$6\theta = 0 \ \Rightarrow\ \theta = 0 \ \Rightarrow\ z = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

$n = 1$ のとき　$6\theta = 2\pi \ \Rightarrow\ \theta = \frac{\pi}{3} \ \Rightarrow\ z = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$n = 2$ のとき　$6\theta = 4\pi \ \Rightarrow\ \theta = \frac{2}{3}\pi \ \Rightarrow\ z = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$n = 3$ のとき　$6\theta = 6\pi \ \Rightarrow\ \theta = \pi \ \Rightarrow\ z = \cos\pi + i\sin\pi = -1$

$n = 4$ のとき　$6\theta = 8\pi \ \Rightarrow\ \theta = \frac{4}{3}\pi \ \Rightarrow\ z = \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$n = 5$ のとき　$6\theta = 10\pi \ \Rightarrow\ \theta = \frac{5}{3}\pi \ \Rightarrow\ z = \cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{3}\pi\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

6 次方程式の解は 7 個以上はないから，これがすべての解である。

(答) $z = 1\ ,\ \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\ ,\ \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\ ,\ -1\ ,\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\ ,\ \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

(注) $\zeta = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\left(= \cos 60^\circ + i\sin 60^\circ\right)$ とすると，$z^6 = 1$ の解は

$$z = 1\ ,\ \zeta\ ,\ \zeta^2\ ,\ \zeta^3\ ,\ \zeta^4\ ,\ \zeta^5$$

となっている。複素平面上では，単位円周を 6 等分する分点である。(右上図参照)

**問**　次の方程式をみたす複素数 $z$ を全て求め，上図のように単位円周上の点として図示せよ。

(1) $z^3 = 1$　　　(2) $z^8 = 1$

# < オイラーの公式 (1) >

指数関数・三角関数のマクローリン展開を復習すると

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad (1)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots \qquad (2)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots \qquad (3)$$

であった。ここで $x$ は実数である。これを虚数まで拡張したい。
実数 $\theta$ と虚数単位 $i$ に対し，(1) 式の $x$ のかわりに $i\theta$ を代入すれば，$i^2 = -1$ だから

$$\begin{aligned}
e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} + \cdots \\
&= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - \frac{i\theta^7}{7!} + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right) \\
&= \cos\theta + i\sin\theta
\end{aligned}$$

従って

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta} \qquad (\theta \text{ は実数})$$

が成立する。これを**オイラーの公式**という。

**例**　$e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$

$e^{\frac{\pi}{3}i} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

**問**　次の複素数を例のようになおせ。

(1) $e^{2\pi i} =$　　　　(2) $e^{-\frac{\pi}{2}i} =$

(3) $e^{\frac{3}{4}\pi i} =$　　　　(4) $e^{\frac{5}{3}\pi i} =$

(5) $e^{-\frac{3}{4}\pi i} =$　　　　(6) $e^{-\frac{\pi}{6}i} =$

# < オイラーの公式 (2) >

複素数 $z$ に対し，$e$ の $z$ 乗をマクローリン展開

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \qquad \big(= \exp(z)\big)$$

によって定義する。これを $e^z = \exp(z)$ と書く場合もある。

今 $z = x + iy$ ( $x, y$ は実数 ) のとき，( 詳しい計算は省略するが )

$$\begin{aligned} e^{x+iy} &= 1 + (x+iy) + \frac{(x+iy)^2}{2!} + \frac{(x+iy)^3}{3!} + \cdots \\ &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) \times \left(1 + (iy) + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \cdots\right) \\ &= \quad e^x \times e^{iy} \end{aligned}$$

が成立する。

$$\boxed{e^{x+iy} = e^x \times e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)} \qquad (\ x \text{ と } y \text{ は実数 })$$

この式もオイラーの公式と呼ばれている。

**例** (1) $e^{2+i\pi} = \ e^2(\cos\pi + i\sin\pi) = -e^2$

(2) $e^{-3-\frac{\pi}{2}i} = \ e^{-3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -\frac{1}{e^3}i$

**問**　以下の指数表示された複素数を例のようになおせ。

(1)　$e^{2-2\pi i}$

(2)　$e^{0+\frac{\pi}{3}i}$

(3)　$e^{2+\frac{3}{4}\pi i}$

(4)　$e^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\pi i}$

(5)　$e^{-1-\frac{\pi}{6}i}$

(6)　$e^{-\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}i}$

# < 複素数の指数表示 >

複素数 $z$ の絶対値が $r$，偏角が $\theta$ のとき，$z$ は極形式によって

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

と表される。一方

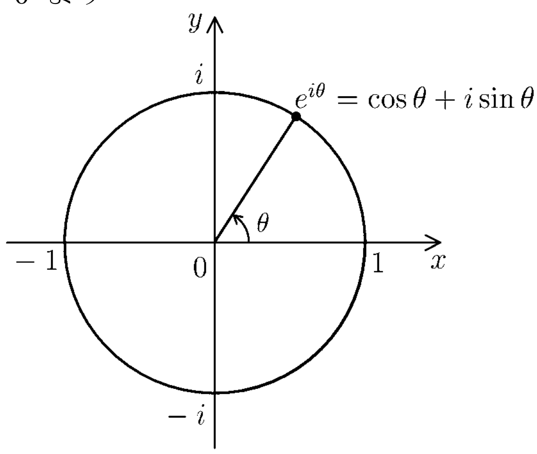
$$r = e^{\log r} \quad , \quad \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

であるから

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = e^{\log r} \times e^{i\theta} = e^{\log r + i\theta}$$

と指数表示できる。特に $r = 1$ のとき $\log 1 = 0$ より

$$\boxed{\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}}$$




となる。このように絶対値が 1 の複素数は指数表示の方が簡単である。

**例 1** ド・モアブルの定理

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

を指数表示で書くと，

$$\boxed{\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}} \quad \text{(ド・モアブルの定理)}$$

と簡単に書ける。

**問 1** 絶対値が 1，偏角が $\theta_1$ と $\theta_2$ の複素数の積は，16 ページより

$$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \times (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)$$

となる。この式を指数表示で書け。

**例 2** $\frac{\sqrt{3}+i}{2} = e^{\frac{\pi}{6}i}$ ， $\frac{1+\sqrt{3}i}{2} = e^{\frac{\pi}{3}i}$ より

$$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right) \times \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{6}i} \times e^{\frac{\pi}{3}i} = e^{\frac{\pi}{6}i + \frac{\pi}{3}i} = e^{\frac{\pi}{2}i} = i$$

**問 2** 次の計算をせよ。

(1) $e^{\frac{3}{2}\pi i} \times e^{\frac{\pi}{2}i} =$

(2) $e^{\frac{4}{3}\pi i} \div e^{\frac{\pi}{6}i} =$

(3) $\left(e^{\frac{\pi}{8}i}\right)^4 =$

(4) $\left(e^{\frac{\pi}{48}i}\right)^{12} =$

# < 指数法則 >

２つの複素数

$z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$ ($x_1$ , $y_1$ , $x_2$ , $y_2$ は実数)

に対し，

$$e^{z_1} \times e^{z_2} = \left(e^{x_1} \times e^{iy_1}\right) \times \left(e^{x_2} \times e^{iy_2}\right) = \left(e^{x_1} \times e^{x_2}\right) \times \left(e^{iy_1} \times e^{iy_2}\right)$$
$$= e^{x_1+x_2}\ e^{i(y_1+y_2)} = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}$$

である。同様に計算すると，以下の指数法則が導ける。

(1) $e^{z_1} \times e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$　　(2) $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{\boxed{\phantom{xx}}}$

(3) $\left(e^{z}\right)^n = e^{\boxed{\phantom{xx}}}$　（ド・モアブルの定理）$\left(\begin{array}{c} z_1\ ,\ z_2\ ,\ z \text{ は複素数} \\ n \text{ は整数} \end{array}\right)$

**問 1**　上の $\boxed{\phantom{xx}}$ 内に適当な式を記入せよ。

**例 1**　$e^{2+3i} \times e^{2-3i} = e^4$　,　$e^{4+\pi i} \div e^{3-\pi i} = e^{1+2\pi i} = e$

$$\left(e^{1+\frac{\pi}{6}i}\right)^8 = e^{8+\frac{4}{3}\pi i} = e^8\left(\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right) = e^8\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

**問 2**　次式を計算せよ。

(1) $e^{5+\pi i} \times e^{-1+\pi i}$　　(2) $e^{2+\frac{\pi}{2}i} \div e^{4+\frac{\pi}{6}i}$

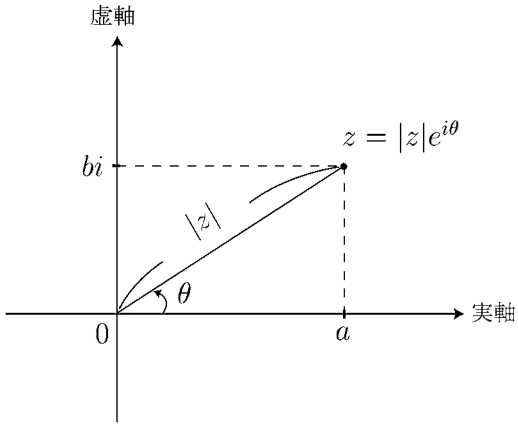
(3) $\left(e^{\frac{1}{8}-\frac{\pi}{16}i}\right)^4$

**例 2**　$$\frac{\left(e^{\frac{\pi}{10}i}\right)^5 \times \left(e^{\frac{\pi}{6}i}\right)^8}{\left(e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^6} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}i} \times e^{\frac{4}{3}\pi i}}{e^{\frac{3}{2}\pi i}} = e^{\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{3}-\frac{3}{2}\right)\pi i} = e^{\frac{\pi}{3}i} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

**問 3**　次式を計算せよ。

$$\frac{\left(e^{\frac{\pi}{6}i}\right)^8 \times \left(e^{\frac{\pi}{12}i}\right)^4}{\left(e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^6}$$

# ＜複素数の簡易表示＞




複素数 $z=a+bi$ の偏角が $\theta$ のとき,

極形式によって

$$z=a+bi=|z|\{\cos\theta+i\sin\theta\}$$

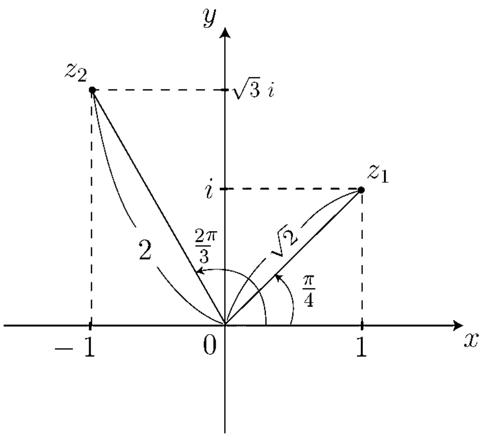
と表される。ここでオイラーの公式より

$$\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$$

であるから

$$\boxed{z=|z|e^{i\theta}}$$

と表される。(ただし $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ )




**例 1**　$z_1=1+i$ は偏角 $\frac{\pi}{4}$, 絶対値 $|z_1|=\sqrt{2}$

だから

$$z_1=1+i=\sqrt{2}\{\cos\tfrac{\pi}{4}+i\sin\tfrac{\pi}{4}\}=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$$

**例 2**　$z_2=-1+\sqrt{3}i$ は偏角 $\frac{2}{3}\pi$, 絶対値 $|z_2|=2$

だから

$$z_2=-1+\sqrt{3}\,i=2\{\cos\tfrac{2\pi}{3}+i\sin\tfrac{2\pi}{3}\}=2e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

**例 3**　例 1, 例 2 の $z_1$,$z_2$ に対し, 積と商も $|z|e^{i\theta}$ の形で表示する。

$$z_1z_2=(1+i)(-1+\sqrt{3}i)=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\times 2e^{\frac{2}{3}\pi i}=\sqrt{2}\times 2\times e^{\frac{\pi}{4}i+\frac{2}{3}\pi i}=2\sqrt{2}\ e^{\frac{11\pi}{12}i}$$

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{1+i}=\frac{2e^{\frac{2}{3}\pi i}}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}}=\frac{2}{\sqrt{2}}\times e^{\frac{2}{3}\pi i-\frac{\pi}{4}i}=\sqrt{2}\ e^{\frac{5}{12}\pi i}$$

**問 1**　次の複素数を $|z|e^{i\theta}$ の形にせよ。

(1) $z_1=\sqrt{3}+i$　　(2) $z_2=-1+i$　　(3) $z_3=-\sqrt{3}-3i$

**問 2**　問 1 の $z_1$,$z_2$,$z_3$ に対し次式を $|z|e^{i\theta}$ の形にせよ。

(1) $z_1z_2$　　(2) $z_2z_3$　　(3) $\dfrac{z_3}{z_1}$

# < 複素数の練習 >

**問 1**　次の複素数を極形式で表せ。

(1) $\sqrt{6}+\sqrt{2}i$　　(2) $3-\sqrt{3}i$　　(3) $-2+2i$

**問 2**　次式を簡単にせよ。

(1) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12}$　　(2) $(1-i)^8$

(3) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1+i}\right)^{9}$

**問 3**　次の複素数を $x+yi$ $(x,y$ は実数$)$ の形に直せ。

(1) $e^{\frac{\pi}{6}i}$　　(2) $e^{\frac{2\pi}{3}i}$　　(3) $e^{1-\frac{\pi}{6}i}$

(4) $e^{\frac{2+3\pi i}{4}}$　　(5) $e^{\frac{\pi}{3}i}\div e^{\frac{\pi}{2}i}$

(6) $\left(e^{\frac{\pi}{6}i}\right)^7\div\left(e^{\frac{3\pi}{8}i}\right)^4$

**問 4**　オイラーの公式を用いて，次の複素数を指数の形にせよ。

(1) $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$　　(2) $-\dfrac{\sqrt{2}e}{2}+\dfrac{\sqrt{2}e}{2}i$

**問 5**　次の複素数を $z=|z|e^{i\theta}$ の形にせよ。

(1) $1+\sqrt{3}i$　　(2) $-3+\sqrt{3}i$　　(3) $\sqrt{2}-\sqrt{6}i$

**問 6**　実数 $\theta$ に対し，次式を簡単にせよ。

(1) $\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$　　(2) $\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

# < 複素数値関数の微分 (1) >

実変数 $t$ の複素数値関数 $z = z(t)$ に対し，変数 $t$ に関する導関数を

$$z'(t) = \frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t}$$

と定める。この定義より実数値関数と同様な次の性質がわかる。

(1) $(z_1(t) + z_2(t))' = z_1'(t) + z_2'(t)$

(2) $(kz(t))' = kz'(t)$　　($k$ は任意の複素数定数)

(3) $(z_1(t)z_2(t))' = z_1'(t)z_2(t) + z_1(t)z_2'(t)$

**例**　(1) $z(t) = x(t) + iy(t)$　($x(t),\ y(t)$ は実数値関数 ) のとき

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t)$$

(2) $$\frac{d}{dt}e^{(2+3i)t} = \frac{d}{dt}e^{2t}(\cos(3t) + i\sin(3t)) = \frac{d}{dt}\left\{e^{2t}\cos(3t)\right\} + i\frac{d}{dt}\left\{e^{2t}\sin(3t)\right\}$$

$$= \left\{(e^{2t})'\cos(3t) + e^{2t} \times (\cos(3t))'\right\} + i\left\{(e^{2t})'\sin(3t) + e^{2t} \times (\sin(3(t))'\right\}$$

$$= \left\{2e^{2t}\cos(3t) - 3e^{2t}\sin(3t)\right\} + i\left\{2e^{2t}\sin(3t) + 3e^{2t}\cos(3t)\right\}$$

**問**　次式を $t$ で微分せよ。ただし $a$ と $b$ は実数である。

(1) $z(t) = 3t^4 + ie^{2t}$

$\dfrac{dz}{dt} =$

(2) $z(t) = \cos(bt) + i\sin(bt)$

$\dfrac{dz}{dt} =$

(3) $z(t) = e^{(3+4i)t}$

$\dfrac{dz}{dt} =$

(4) $z(t) = e^{(a+bi)t}$

$\dfrac{dz}{dt} =$

# < 複素数値関数の微分 (2) >

前ページ問 (4) より 実数 $a$, $b$ に対し

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{(a+bi)t} &= \frac{d}{dt}e^{at}\big(\cos(bt)+i\sin(bt)\big)\\ &= \{ae^{at}\cos(bt)-be^{at}\sin(bt)\}+i\{ae^{at}\sin(bt)+be^{at}\cos(bt)\}\\ &= e^{at}\{(a+bi)\cos(bt)+(ai-b)\sin(bt)\}\end{aligned}$$

となる。ここで $i^2=-1$ より $ai-b$ を

$$ai-b=ai+bi^2=(a+bi)i$$

におきかえると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{(a+bi)t} &= e^{at}\{(a+bi)\cos(bt)+(a+bi)i\sin(bt)\}\\ &= e^{at}(a+bi)\{\cos(bt)+i\sin(bt)\}\\ &= e^{at}(a+bi)e^{bti}=(a+bi)e^{(a+bi)t}\end{aligned}$$

となる。すなわち

$$\boxed{\frac{d}{dt}e^{(a+bi)t}=(a+bi)e^{(a+bi)t}}$$

が得られる。

**問**　以下の導関数を求めよ。(ただし $a$ と $b$ は実数)

(1) $\dfrac{d}{dt}e^{3it}$　　(2) $\dfrac{d}{dt}e^{-2it}$

(3) $\dfrac{d}{dt}e^{bit}$　　(4) $\dfrac{d}{dt}e^{(1+i)t}$

(5) $\dfrac{d}{dt}e^{(2-i)t}$　　(6) $\dfrac{d}{dt}e^{(-3+2i)t}$

(7) $\dfrac{d}{dt}e^{(a-i)t}$　　(8) $\dfrac{d}{dt}e^{(a-bi)t}$

(9) $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{a+bi}e^{(a+bi)t}\right)$　　(10) $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{a-bi}e^{(a-bi)t}\right)$

# < 複素数値関数の積分 (1) >

実数値変数 $t$ の複素数値関数 $F(t)$ に対し，$F(t)$ の導関数が $f(t)$ であるとき，すなわち

$$\frac{d}{dt}F(t) = f(t) \qquad (F'(t) = f(t))$$

のとき，微分して $f(t)$ になる関数 ($f(t)$ の原始関数) の全体を

$$\int f(t)dt = F(t) + C \qquad (C \text{ は任意の複素数定数})$$

と書き，$f(t)$ の**不定積分**という。微分の性質より次の性質がわかる。

(1) $\displaystyle\int \{f(t) + g(t)\}\,dt = \int f(t)dt + \int g(t)dt$

(2) $\displaystyle\int kf(t)dt = k\int f(t)dt \qquad (k \text{ は任意の複素数定数})$

**例 1**　実数値関数 $x(t)$ と $y(t)$ に対して

$$\int (x(t) + iy(t))dt = \int x(t)dt + i\int y(t)dt$$

**例 2**　実数 $a$, $b$ に対して，前ページの結果

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{a+bi}e^{(a+bi)t}\right) = e^{(a+bi)t}$$

より

$$\int e^{(a+bi)t}dt = \frac{1}{a+bi}e^{(a+bi)t} + C$$

**問**　次の不定積分を求めよ。(ただし $a$ と $b$ は実数で，$a \neq 0$, $b \neq 0$ とする)

(1) $\displaystyle\int (t^3 + t^5 i)dt$

(2) $\displaystyle\int (\cos t + i\sin t)dt$

(3) $\displaystyle\int (e^{2t} + i\cos(3t))dt$

(4) $\displaystyle\int e^{bit}dt$

(5) $\displaystyle\int e^{(2+3i)t}dt$

(6) $\displaystyle\int e^{(a-bi)t}dt$

# < 複素数値関数の積分 (2) >

**例題**　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int e^{2t}\cos(3t)dt$　　(2) $\displaystyle\int e^{2t}\sin(3t)dt$

(解)　$\displaystyle\int e^{2t}\cos(3t)dt + i\int e^{2t}\sin(3t)dt = \int e^{2t}\{\cos(3t)+i\sin(3t)\}\,dt$

$$= \int e^{2t+3ti}dt = \int e^{(2+3i)t}dt = \frac{1}{2+3i}e^{(2+3i)t} + C$$

$$= \frac{2-3i}{2^2+3^2}e^{2t}\left(\cos(3t)+i\sin(3t)\right) + C$$

$$= \frac{e^{2t}}{13}\{2\cos(3t)+3\sin(3t)\} + i\frac{e^{2t}}{13}\{-3\cos(3t)+2\sin(3t)\} + C$$

よって

$$\int e^{2t}\cos(3t)dt = \frac{e^{2t}}{13}\{2\cos(3t)+3\sin(3t)\} + C$$

$$\int e^{2t}\sin(3t)dt = \frac{e^{2t}}{13}\{-3\cos(3t)+2\sin(3t)\} + C$$

**問 1**　0 でない実数 $a, b$ に対し，次の不定積分を求めよ。

$$\int e^{at}\cos(bt)dt + i\int e^{at}\sin(bt)dt$$

**問 2**　0 でない実数 $a, b$ に対し，次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int e^{at}\cos(bt)dt$　　(2) $\displaystyle\int e^{at}\sin(bt)dt$

**問 3**　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int e^{3t}\cos(4t)dt$　　(2) $\displaystyle\int e^{3t}\sin(4t)dt$

# < 練習問題 >

**問 1**　次の複素数を簡単にせよ。

(1) $(\sqrt{3}+i)^5$　　(2) $\left(\dfrac{-2+2i}{1+\sqrt{3}\,i}\right)^4$

**問 2**　次の複素数を $x+iy$ ($x$ と $y$ は実数) の形にせよ。

(1) $e^{\frac{\pi}{3}i}$　　(2) $e^{\frac{5\pi}{6}i}$

(3) $e^{1+\frac{\pi}{6}i}$　　(4) $e^{\frac{2-\pi i}{4}}$

(5) $e^{\frac{2\pi}{3}i}\times e^{\frac{\pi}{2}i}$　　(6) $e^{\frac{4\pi}{3}i}\div e^{\frac{\pi}{2}i}$

**問 3**　オイラーの公式を用いて、次の複素数を指数の形にせよ。

(1) $\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2e}$　　(2) $\dfrac{\sqrt{2e}-\sqrt{2e}\,i}{2}$

**問 4**　次の複素数を $z=|z|e^{i\theta}$ の形にせよ。

(1) $3-3i$　　(2) $-1-\sqrt{3}i$

**問 5**　次の導関数を求めよ。

(1) $\dfrac{d}{dt}e^{t^3+t^2}$　　(2) $\dfrac{d}{dt}\cos(4t)$

(3) $\dfrac{d}{dt}e^{t}\sin(2t)$　　(4) $\dfrac{d}{dt}e^{2t}\cos(3t)$

(5) $\dfrac{d}{dt}e^{4t+5ti}$　　(6) $\dfrac{d}{dt}e^{(3-4i)t}$

**問 6**　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (3\sin(2t)+4\cos(3t))\,dt$　　(2) $\displaystyle\int e^{3t-4}dt$

(3) $\displaystyle\int e^{4t+5ti}dt$　　(4) $\displaystyle\int e^{4t}\cos(3t)dt$

# < 微分方程式 >

微分方程式 (differential equation) とは独立変数とその未知関数および未知関数の導関数を含む方程式のことである。簡単にいえば微分 (導関数) を含む方程式である。たとえば変数 $t$ の関数 $y$ に関する微分方程式の例として

(1) $\dfrac{dy}{dt} = -9.8t + 19.6$

(2) $\dfrac{dy}{dt} = 2ty$

(3) $\dfrac{dy}{dt} + 3y = e^{4t}$

等がある。これらは全て 1 階導関数 $\dfrac{dy}{dt}$ を含む微分方程式なので **1 階微分方程式**という。これに対し、2 階導関数を含む微分方程式の例として

(4) $\dfrac{d^2y}{dt^2} = -9.8$

(5) $\dfrac{d^2y}{dt^2} = -4y$

(6) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt} - 6y = 3t$

等がある。(4)〜(6) の例のように 2 階導関数 $\dfrac{d^2y}{dt^2}$ を含み、3 階以上の導関数を含まない微分方程式を **2 階微分方程式**という。一般に $n$ 階導関数を含み、$n+1$ 階以上の導関数を含まない微分方程式を $\boldsymbol{n}$ **階微分方程式**という。

**問**　次の微分方程式は何階微分方程式か?

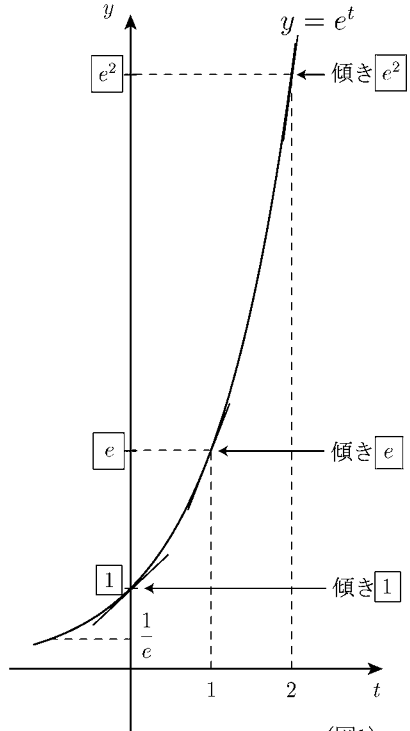
(1) $\dfrac{dy}{dt} = 2y$

(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2} = -9y$

(3) $\dfrac{d^3y}{dt^3} + \dfrac{d^2y}{dt^2} + t^4 = 0$

# < 微分方程式の解 (1) >

微分方程式を満たす関数をその微分方程式の**解**という。



(図1)

**例**　独立変数 $t$, 未知関数 $y$ に関する 1 階微分方程式

$$(*)\quad \boxed{\frac{dy}{dt} = y}$$

を考える。今

$$(1)\quad \boxed{y = e^t}$$

とおくと

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(e^t) = e^t = y$$

より関数 (1) は微分方程式 $(*)$ の解である。微分係数 $y'(t) = \dfrac{dy}{dt} = e^t$ は $y = e^t$ のグラフの「接線の傾き」を意味するから

$t = 0$　のとき　接線の傾き $= y'(0) = e^0 = 1$

$t = 1$　のとき　接線の傾き $= y'(1) = e^1 = e$

$t = 2$　のとき　接線の傾き $= y'(2) = e^2$

となる (図 1 参照)。　実は微分方程式 $(*)$ の解は (1) だけではない。

$$(2)\quad \boxed{y = 2e^t}$$

とおくと

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(2e^t) = 2e^t = y$$

より関数 (2) も微分方程式 $(*)$ の解である。

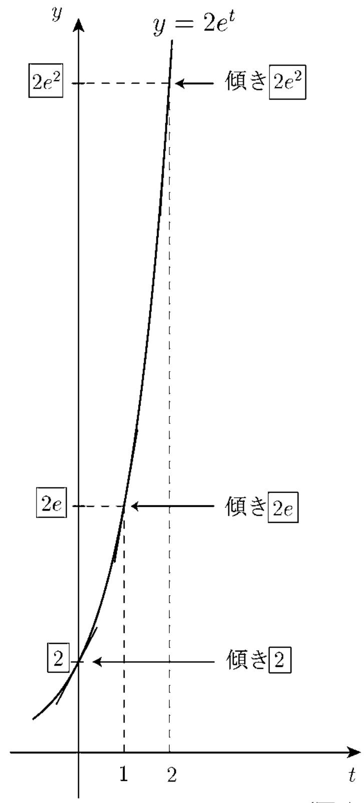
$y'(t) = \dfrac{dy}{dt} = 2e^t$ より

$t = 0$　のとき　接線の傾き $= y'(0) = 2e^0 = 2$

$t = 1$　のとき　接線の傾き $= y'(1) = 2e^1 = 2e$

$t = 2$　のとき　接線の傾き $= y'(2) = 2e^2$

となる (図 2 参照)。



(図2)

**問**　上の例の微分方程式 $(*)$ の解で (1), (2) 以外の関数を 1 つ示せ。

# < 微分方程式の解 (2) >

**例**　前ページの例の微分方程式

$$(*)\quad \boxed{\frac{dy}{dt} = y}$$

を考える。前ページより $y = e^t$ および $y = 2e^t$ は $(*)$ の解であった。

それ以外に

$$y = 3e^t\ ,\ y = 4e^t\ ,\ \cdots\ ,\ y = -e^t\ ,\ y = -2e^t\ ,\ \cdots$$

$$y = \frac{1}{2}e^t\ ,\ y = \frac{1}{3}e^t\ ,\ \cdots\ ,\ y = -\frac{1}{2}e^t\ ,\ y = -\frac{1}{3}e^t\ ,\ \cdots$$

等もすべて $(*)$ の解である。これらの関数の 1 つ 1 つを微分方程式 $(*)$ の**特殊解**という。

一方、微分方程式 $(*)$ の全ての解 (特殊解の全体) は

$$(**)\quad \boxed{y = Ce^t} \qquad (C\ は任意定数)$$

の形をしている。このような任意定数 $C$ を含む関数 $(**)$ を微分方程式 $(*)$ の**一般解**という。

特殊解は一般解の $C$ に具体的な値を与えた関数である。

$C = 1$ のとき $y = e^t$ $\cdots$ 前ページの関数 (1)

$C = 2$ のとき $y = 2e^t$ $\cdots$ 前ページの関数 (2)

これらは全て特殊解である。

一般解 $(**)$ の定数 $C$ が定まるような条件として例えば

$$(***)\quad \boxed{t = 0\ のとき\ y = 1}$$

という条件があれば $C$ が定まる。$(**)$ と $(***)$ より

$$t = 0\ のとき\ y = Ce^0 = C \quad より \quad \underline{C = 1}$$

となって特殊解 $\boxed{y = e^t}$ が決まる。$(***)$ のような条件を**初期条件**という。$t$ は時刻 (時間) を表す変数であるから、「$t = 0$ は時刻 0 のとき」という意味で初期条件という。グラフで考えると、前ページ図 1 の $y$ 切片 ($y$ 軸との交点) を意味する。

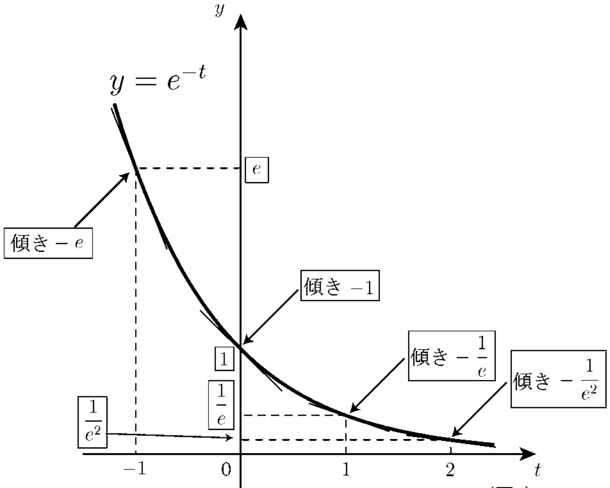
**問**　例の一般解 $(**)$ に対し、以下の初期条件を満たす $C$ を求め、特殊解 $y$ を決定せよ。

(1) $t = 0$ のとき $y = 3$

(2) $t = 0$ のとき $y = -2$

(3) $t = 0$ のとき $y = 0$

# ＜微分方程式の解 (3) ＞



(図1)

**例**　微分方程式

$$(*) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} = -y}$$

を考える。今

$$(1) \quad \boxed{y = e^{-t}}$$

とおくと

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}e^{-t} = -e^{-t} = -y$$

より微分方程式 $(*)$ をみたす。すなわち
関数 (1) は微分方程式 $(*)$ の特殊解である。
(1) の導関数を $y'(t)$ とすると

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = -e^{-t}$$

より

$$t = 0 \text{ のときの接線の傾き} = y'(0) = -e^{-0} = -1$$
$$t = 1 \text{ のときの接線の傾き} = y'(1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$$
$$t = 2 \text{ のときの接線の傾き} = y'(2) = -e^{-2} = -\frac{1}{e^2}$$

となる (図 1 参照)。このグラフは $t \to \infty$ のとき $(e^t \to \infty$ より$)e^{-t} = \frac{1}{e^t}$ は 0 に限りなく近づく。すなわち

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} e^{-t} = 0}$$

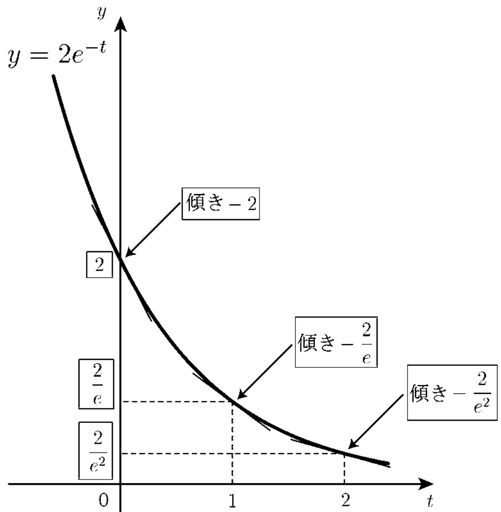
である。この極限は後でよく用いるので、ここで書いておいた。
　微分方程式 $(*)$ の特殊解は関数 (1) だけではない。

$$(2) \quad \boxed{y = 2e^{-t}}$$

とおくと

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}2e^{-t} = -2e^{-t} = -y$$

より微分方程式 $(*)$ を満たす。関数 (2)
のグラフは図 2 のようになる。



(図2)

(注)　関数 (1) は初期条件

$$(1)' \quad \boxed{t = 0 \text{ のとき } y = 1}$$

を満たす $(*)$ の解である。

**問 1**　(注) のように関数 (2) のみたす初期条件を書け。

**問 2**　上の微分方程式 $(*)$ の解で (1), (2) 以外の関数を 1 つ示せ。

**問 3**　上の微分方程式 $(*)$ の一般解を類推せよ。

# < 求積法 >

微分方程式の一般解を求めることを「**微分方程式を解く**」という。

このページでは次の形の微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = \boxed{t\text{ だけの式}}$$

を考える。この形の微分方程式は 1 回積分することによって解くことができる。

**例 1**　微分方程式

$$(1)\ \boxed{\frac{dy}{dt} = -9.8t + 19.6}$$

を考える。両辺を積分すると

$$y = \int \frac{dy}{dt}dt = \int (-9.8t + 19.6)dt = -4.9t^2 + 19.6t + C$$

より (1) の一般解は

$$\text{一般解：}\boxed{y = -4.9t^2 + 19.6t + C} \qquad (C\text{ は任意定数})$$

である。

**例 2**　微分方程式

$$(2)\ \boxed{\frac{dy}{dt} = t^2 - e^t + \cos t}$$

を考える。両辺を積分すると

$$y = \int \frac{dy}{dt}dt = \int (t^2 - e^t + \cos t)dt = \frac{1}{3}t^3 - e^t + \sin t + C$$

より (2) の一般解は

$$\text{一般解：}\boxed{y = \frac{1}{3}t^3 - e^t + \sin t + C} \qquad (C\text{ は任意定数})$$

である。

例 1,2 のように積分することによって微分方程式を解く方法を**求積法**という。

**問**　次の微分方程式を解け。

(1) $\dfrac{dy}{dt} = 3t + 6$　　(2) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2}t^3 + 5t^4$

(3) $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{2}{t^2} + \dfrac{1}{t}$　　(4) $\dfrac{dy}{dt} = 4\sin t - 5\cos t$

# ＜1階微分方程式の原理＞

微分して 0 になる関数は定数だけである。これを微分方程式の形に書くと

(定理) $\boxed{\dfrac{dy}{dt} = 0 \quad \text{ならば} \quad y = C \quad (C \text{ は定数})}$

となる。この定理を使うと1階微分方程式の一般解の形が決定できる。

**例** 微分方程式

$$(*) \qquad \boxed{\frac{dy}{dt} = -y}$$

を考える。34 ページより $(*)$ の一般解は

$$(**) \qquad \boxed{y = Ce^{-t}} \quad (C \text{ は任意定数})$$

であると類推できる。$(**)$ が $(*)$ の解であることは

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(Ce^{-t}) = C \times \frac{d}{dt}(e^{-t}) = C \times (-e^{-t}) = -Ce^{-t} = -y$$

よりわかる。実は

**「$(*)$ の解は $(**)$ の形の関数以外はない」**

ことが証明できる。

＜証明＞ $y_1 = e^{-t}$ とする。$(*)$ の任意の解を $y_2$ とすると $(*)$ 式を満たすので

(1) $y_1{}' = -y_1 \quad , \quad y_2{}' = -y_2$

が成り立つ (ここで $t$ に関する導関数 $\dfrac{dy}{dt}$ を $y'$ と略記した)。今

$$y = \frac{y_2}{y_1}$$

とおくと、分数の微分の公式より

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_2{}' \times y_1 - y_2 \times y_1{}'}{(y_1)^2}$$

となり (1) 式を代入すると

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(-y_2) \times y_1 - y_2 \times (-y_1)}{(y_1)^2} = \frac{-y_2 y_1 + y_2 y_1}{(y_1)^2} = 0$$

となり定理から $y$ が定数 $C$ になるので

$$y = C \implies \frac{y_2}{y_1} = C \implies y_2 = Cy_1 = Ce^{-t}$$

より $(*)$ の任意の解 $y_2$ が $(**)$ の形をしていることがわかった。(証明終)

**問** 微分方程式 $(*)$ $\boxed{\dfrac{dy}{dt} = y}$ の一般解は 33 ページより $(**)$ $\boxed{y = Ce^{t}}$ $(C$ は任意定数) となる。「$(*)$ の解は $(**)$ の形の関数以外はない」ことを証明せよ。

# < 変数分離形 (1) >

**例**　微分方程式

$$(*)\quad \boxed{\frac{dy}{dt} = -y}$$

の一般解は前ページより

$$(**)\quad \boxed{y = Ce^{-t}} \quad (C\ \text{は任意定数})$$

であった。この一般解の見つけ方は以下のようにする。

## < 一般解の求め方 >

$(*)$ の両辺を $y$ で割る。

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = -1$$

両辺を $t$ で積分する。

$$\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}dt = \int (-1)dt$$

ここで置換積分の公式 $\displaystyle\int \square\, \frac{dy}{dx}dt = \int \square\, dy$ より

$$\int \frac{1}{y}dy = \int (-1)dt$$

$$\Downarrow$$

$$\log|y| + C_1 = -t + C_2 \qquad (C_1,\ C_2\ \text{は任意定数})$$

$$\Downarrow$$

$$\log|y| = -t + C_0 \qquad (\text{ただし } C_0 = C_2 - C_1)$$

$$\Downarrow$$

$$|y| = e^{-t+C_0}$$

$$\Downarrow$$

$$y = \pm e^{-t+C_0} = \pm e^{C_0} \times e^{-t}$$

$$\Downarrow$$

$$(**)\quad \boxed{y = Ce^{-t}} \qquad (\text{ただし } C = \pm e^{C_0})$$

ここで $C_0$ がどんな数でも $e^{C_0}$ は 0(ゼロ) にならないから $C \neq 0$ である。一方 $(**)$ 式で $C = 0$ のとき $y = 0$ となるが、$y = 0$ は $(*)$ の解であるから $C = 0$ を含めて $(*)$ の一般解は

$$\underline{\boldsymbol{y = Ce^{-t}} \quad (\boldsymbol{C}\ \textbf{は任意定数})}$$

**問**　微分方程式 $\dfrac{dy}{dt} = 2y$ の一般解を求めよ。

# < 変数分離形 (2) >

**例題**　微分方程式

$$(*) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} = 2ty}$$

の一般解を求めよ。

(解)　前ページと同じ方法で求める。まず両辺を $y$ で割り, $t$ で積分する。。

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = 2t$$
$$\Downarrow$$
$$\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}dt = \int 2tdt$$
$$\Downarrow$$
$$\int \frac{1}{y}dy = \int 2tdt$$
$$\Downarrow$$
$$\log|y| = t^2 + C_0 \qquad (C_0\text{は任意定数})$$
$$\Downarrow$$
$$|y| = e^{t^2+C_0}$$
$$\Downarrow$$
$$y = \pm e^{t^2+C_0} = \pm e^{C_0} \times e^{t^2}$$
$$\Downarrow$$
$$(**) \quad \boxed{y = Ce^{t^2}} \qquad (C = \pm e^{C_0})$$

ここで $C = \pm e^{C_0} \neq 0$ であるが、$(**)$ 式で $C = 0$ の場合は $y = 0$ となり、$y = 0$ は $(**)$ の解であるから、$C = 0$ も含めて $(*)$ の一般解は

**(答) $y = Ce^{t^2}$　　($C$ は任意定数)**

(注)　$\boxed{\dfrac{dy}{dt} = (t\text{ の関数}) \times (y\text{ の関数})}$ の形の微分方程式を**変数分離形**といい、例題と同じやり方で解ける。

**問**　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{dy}{dt} = (6t+5)y$

(2) $\dfrac{dy}{dt} = (3t^2+4)y$

# < 変数分離形 (3) >

**例題**　微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y-2}{t} \qquad \cdots \qquad (*)$$

の一般解を求めよ。

**(解)**　$y \neq 2$ のとき両辺を $y-2$ で割ると

$$\frac{1}{y-2}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$$

両辺を $t$ で積分すると $\displaystyle\int \square \frac{dy}{dt}dt = \int \square \, dy$ より

$$\int \frac{1}{y-2}dy = \int \frac{1}{t}dt$$

よって

$$\log|y-2| = \log|\,t\,| + C_0$$

$$\log\left|\frac{y-2}{t}\right| = C_0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{y-2}{t} = \pm e^{C_0}$$

ここで $C = \pm e^{C_0}$ とおくと

$$\frac{y-2}{t} = C \qquad \text{すなわち} \qquad \underline{y = Ct + 2} \qquad \cdots \qquad (**)$$

また、定数関数 $y = 2$ も解であるが、これは $(**)$ において $C = 0$ とすると得られるから、求める一般解は

(答)　$\underline{y = Ct + 2}$　　　($C$ は任意の定数)

**問**　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1)　$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2ty}{t^2+1}$

(2)　$\dfrac{dy}{dt} = (y^2+1)t$

# ＜1階線形微分方程式 (1) ＞

$t$ の関数 $p(t)$ と $q(t)$ が与えられたとき、未知関数 $y$ に関する次の形の微分方程式

$$(1)\quad \boxed{\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)}$$

を**1階線形微分方程式**という。ここで「線形」というのは未知関数 $y$ とその導関数 $\frac{dy}{dt}$ に関する一次式であることを意味する。($y^3$ や $(\frac{dy}{dt})^2$ などのある微分方程式は非線形という。)
特に $q(t) = 0$ のとき

$$(2)\quad \boxed{\frac{dy}{dt} + p(t)y = 0}$$

の形の微分方程式を**1階線形同次微分方程式**という。

**例**　同次微分方程式

$$\boxed{\frac{dy}{dt} + 2ty = 0}$$

の一般解を求める。移項すると

$$\frac{dy}{dt} = -2ty$$

となり変数分離形になるので、

$$\int \frac{1}{y}dy = \int (-2t)dt$$

より一般解は

一般解 ： $\boldsymbol{y = Ce^{-t^2}}$　**($\boldsymbol{C}$ は任意定数)**

**問 1**　次の微分方程式の一般解を求めよ。(ただし $a$ は定数)

(1) $\dfrac{dy}{dt} + ay = 0$　　(2) $\dfrac{dy}{dt} - 10ty = 0$　　(3) $\dfrac{dy}{dt} + (6t^2 + 1)y = 0$

**問 2**　同次微分方程式 $\boxed{\dfrac{dy}{dt} + p(t)y = 0}$ の一般解を不定積分 $\displaystyle\int p(t)dt$ を用いて表せ。

# ＜１階線形微分方程式 (2) ＞

前ページより同次微分方程式

$$(*) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} + p(t)y = 0}$$

の一般解は

$$(**) \quad \boxed{y = Ce^{-\int p(t)dt}} \qquad (C \text{ は任意定数})$$

となる。実は「(∗) の解は (∗∗) の形の関数以外はない。」ことが 36 ページと同様にして証明できる (証明は省略)。

**例**　微分方程式

$$(1) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} + 3y = 5}$$

を考える。今

$$y_1 = \frac{5}{3}$$

とおくと、$y_1$ は定数だから $\dfrac{dy_1}{dt} + 3y_1 = 0 + 3 \times \dfrac{5}{3} = 5$ となり (1) 式を満たす。
すなわち $y_1$ は (1) の解の 1 つである。(1) に対し、同次微分方程式

$$(2) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} + 3y = 0}$$

の一般解を $y_0$ とすると、上の公式 (∗∗) より

$$y_0 = Ce^{-3t} \qquad (C \text{ は任意定数})$$

である。ここで

$$y = y_1 + y_0 = \frac{5}{3} + Ce^{-3t}$$

とおくと

$$\frac{dy}{dt} + 3y = \frac{d}{dt}\left(\frac{5}{3} + Ce^{-3t}\right) + 3\left(\frac{5}{3} + Ce^{-3t}\right)$$
$$= 0 - 3Ce^{-3t} + 5 + 3Ce^{-3t} = 5$$

より $y$ は (1) 式をみたす。(1) の一般解は

$$(1) \text{ の一般解：} \boxed{y = \frac{5}{3} + Ce^{-3t}} \quad (C \text{ は任意定数})$$

となる。実は「(1) の解は全て $\dfrac{5}{3} + Ce^{-3t}$ の形をしている」ことが証明できる。

＜証明＞　(1) の任意の解を $y_2$ とすると ${y_2}' + 3y_2 = 5$ である。今

$$w = y_2 - \frac{5}{3}$$

とおくと

$$w' + 3w = \left(y_2 - \frac{5}{3}\right)' + 3\left(y_2 - \frac{5}{3}\right) = {y_2}' + 3y_2 - 5 = 5 - 5 = 0$$

より $w$ は (2) の解だから

$$w = Ce^{-3t} \implies y_2 - \frac{5}{3} = Ce^{-3t} \implies y_2 = \frac{5}{3} + Ce^{-3t} \qquad (\text{証明終})$$

# ＜1階線形微分方程式 (3) ＞

前ページの議論を一般化すると以下のようになる。

1 階線形微分方程式

$$(1)\quad \boxed{\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)}$$

の解の 1 つが分かった場合、その解を $y_1$ とする。

次に同次微分方程式

$$(2)\quad \boxed{\frac{dy}{dt} + p(t)y = 0}$$

の一般解を

$$(2) \text{ の一般解：} \boxed{y_0 = Ce^{-\int p(t)dt}} \qquad (C \text{ は任意定数})$$

とすると、(1) の一般解は

$$(1) \text{ の一般解：} \boxed{y = y_1 + y_0 = y_1 + Ce^{-\int p(t)dt}} \qquad (C \text{ は任意定数})$$

となる。すなわち「(1) の解は全て $y_1 + Ce^{-\int p(t)dt}$ の形をしている」ことが前ページと同様に証明できる (証明略)。

**例** 微分方程式

$$(3)\quad \boxed{\frac{dy}{dt} + 5y = 8}$$

の一般解を求めたい。

$$y_1 = \frac{8}{5}$$

とおくと、$y_1$ は定数だから $\dfrac{dy_1}{dt} + 5y_1 = 0 + 5 \times \dfrac{8}{5} = 8$ より (1) の解である。

ここで同次微分方程式

$$(4)\quad \boxed{\frac{dy}{dt} + 5y = 0}$$

の一般解は

$$\boxed{y_0 = Ce^{-5t}} \qquad (C \text{ は任意定数})$$

だから (3) の一般解は

$$(3) \text{ の一般解：} \boxed{y = y_1 + y_0 = \frac{8}{5} + Ce^{-5t}} \qquad (C \text{ は任意定数})$$

**問** 次の微分方程式の一般解を求めよ。(ただし $a \neq 0$ )

(1) $\dfrac{dy}{dt} + 3y = 5$　　　(2) $\dfrac{dy}{dt} + ay = b$

# ＜1階線形微分方程式 (4) ＞

**例**　微分方程式

$$(1)\quad \boxed{\frac{dy}{dt}+3y=e^{4t}}$$

を考える。今

$$y_1=\frac{1}{7}e^{4t}$$

とおくと

$$\frac{dy_1}{dt}+3y_1=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{7}e^{4t}\right)+3\left(\frac{1}{7}e^{4t}\right)=\frac{4}{7}e^{4t}+\frac{3}{7}e^{4t}=e^{4t}$$

より $y_1$ は (1) の解である。同次方程式

$$(2)\quad \boxed{\frac{dy}{dt}+3y=0}$$

の一般解を

$$(**)\quad \boxed{y_0=Ce^{-3t}}$$

とおくと (1) の一般解は

$$(1)\text{ の一般解 }:\ \underline{y=y_1+y_0=\frac{1}{7}e^{4t}+Ce^{-3t}\quad (C\text{ は任意定数})}$$

## ＜ 別解 ＞　((1) の解 $y_1$ も自動的に求まる方法)

**Step1**　同次方程式 (2) の一般解 (**) の定数 $C$ を関数 $C(t)$ におきかえる

$$(3)\quad \boxed{y=C(t)e^{-3t}}$$

とおく。

**Step2**　(3) を (1) に代入して $C(t)$ を決定する。

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt}+3y&=\left(C(t)e^{-3t}\right)'+3\left(C(t)e^{-3t}\right)\\&=C'(t)e^{-3t}-3C(t)e^{-3t}+3C(t)e^{-3t}\\&=C'(t)e^{-3t}\end{aligned}$$

積の微分
$(\square\times\triangle)'=\square'\times\triangle+\square\times\triangle'$

(1) より

$$C'(t)e^{-3t}=e^{4t}$$

$$\Downarrow$$

両辺に $e^{3t}$ をかける

$$C'(t)=e^{7t}$$

$$\Downarrow$$

積分

$$(4)\cdots\quad \boxed{C(t)=\int e^{7t}dt=\frac{1}{7}e^{7t}+C}$$

**Step3**　(4) を (3) に代入

$$\underline{(\text{答})\quad y=\left(\frac{1}{7}e^{7t}+C\right)e^{-3t}=\frac{1}{7}e^{4t}+Ce^{-3t}}$$

**問**　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{dy}{dt}+4y=e^{5t}$　,　(2) $\dfrac{dy}{dt}-4y=e^{5t}$

# ＜1階線形微分方程式 (5)＞

前ページの別解のような解き方を**定数変化法**という。1階線形微分方程式は定数変化法によって必ず一般解が求まる。

**例題**　微分方程式

$$(1)\quad \boxed{\frac{dy}{dt} - 3y = e^{3t}}$$

の一般解を求めよ。

**Step1**　同次微分方程式

$$(2)\quad \frac{dy}{dt} - 3y = 0$$

の一般解

$$y_0 = Ce^{3t}$$

の定数 $C$ のかわりに関数 $C(t)$ でおきかえたものを $y$ とする。

$$(3)\quad \boxed{y = C(t)e^{3t}}$$

**Step2**　(1) に代入して $C(t)$ を決定する。

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} - 3y &= \big(C(t)e^{3t}\big)' - 3\big(C(t)e^{3t}\big)\\ &= C'(t)e^{3t} + 3C(t)e^{3t} - 3C(t)e^{3t}\\ &= C'(t)e^{3t}\end{aligned}$$

(1) より

$$C'(t)e^{3t} = e^{3t}$$

$$\Downarrow$$

$$C'(t) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$(4)\quad \boxed{C(t) = \int 1dt = t + C}$$

**Step3**　(4) を (3) に代入する。

<u>(答)　$y = (t + C)\,e^{3t} = te^{3t} + Ce^{3t}$　($C$ は任意定数)</u>

**問**　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{dy}{dt} - 2y = e^{2t}$　,　(2) $\dfrac{dy}{dt} + 3y = e^{-3t}$　,　(3) $\dfrac{dy}{dt} - ay = e^{at}$

# ＜1 階線形微分方程式 (6) ＞

**問**　定数変化法により，次の 1 階線形微分方程式の一般解を求めよ。式変形も書くこと。
ただし $a$, $b$, $K$ は定数で $a \neq b$ とする。

(1)　$\dfrac{dy}{dt} - ay = e^{bt}$

(2)　$\dfrac{dy}{dt} - ay = Ke^{bt}$

(3)　$\dfrac{dy}{dt} - ay = Ke^{at}$

# < 1 階線形微分方程式 (7) >

**問 1**　0 でない実数定数 $a, b$ に対し、微分方程式

$$(*) \quad \frac{dz}{dt} + az = e^{bit}$$

を考える。

(1)　$i$ を実数定数と考えて、定数変化法により $(*)$ の一般解 $z(t)$ を求めよ。

(2)　(1) で求めた一般解 $z(t)$ に対し、$i$ を虚数単位 $\sqrt{-1}$ と考える。$z(t)$ を
$z(t) = x(t) + iy(t) + Ce^{-at}$　$(x(t), y(t)$ は実数値関数、$C$ は任意定数) の形にせよ。

**問 2**　0 でない実数定数 $a, b$ に対し、次の微分方程式の一般解 $x(t)$ を (定数変化法により) 求めよ。　(ヒント P.29)

$$\frac{dx}{dt} + ax = \cos(bt)$$

**問 3**　0 でない実数定数 $a, b$ に対し、次の微分方程式の一般解 $y(t)$ を (定数変化法により) 求めよ。

$$\frac{dy}{dt} + ay = \sin(bt)$$

# < 1 階線形微分方程式 (8) >

**問**　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{dy}{dt} = 6t^2 - 8t + 5$

(2) $\dfrac{dy}{dt} = e^{2t} - 5\sin(3t) + 6\cos(2t)$

(3) $\dfrac{dy}{dt} = 10y$

(4) $\dfrac{dy}{dt} + 9y = 0$

(5) $\dfrac{dy}{dt} = (2t+1)y$

(6) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y+4}{t-1}$

(7) $\dfrac{dy}{dt} + 4y = 3$

(8) $\dfrac{dy}{dt} - 3y - 5 = 0$

(9) $\dfrac{dy}{dt} - 3y = e^{2t}$

(10) $\dfrac{dy}{dt} - 3y = e^{3t}$

(11) $\dfrac{dy}{dt} - 3y = 2e^{-3t}$

(12) $\dfrac{dy}{dt} + 3y = 4e^{-3t}$

(13) $\dfrac{dy}{dt} + 3y = \cos(2t)$

# < 1階微分方程式の初期値問題 >

**例題**　次の微分方程式を以下の初期条件の下で解け。

(1) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 6 - 10t \\ t = 0 \text{ のとき } y = 20 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -2y \\ t = 0 \text{ のとき } y = 5 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + 2y = -5 \\ t = 0 \text{ のとき } y = 4 \end{cases}$

(解)　(1) 求積法より $y = \displaystyle\int (6 - 10t)dt = 6t - 5t^2 + C$

初期条件より $t = 0$ のとき $y = C = 20$　　(答) $\underline{y = 6t - 5t^2 + 20}$

(2) 40 ページと同様にして一般解は $y = Ce^{-2t}$

初期条件より $t = 0$ のとき $y = Ce^0 = C = 5$　　(答) $\underline{y = 5e^{-2t}}$

(3) 44 ページと同様に考える。

$$y_1 = \frac{-5}{2}$$

は (3) の解である。同次方程式 $\dfrac{dy}{dt} + 2y = 0$ の一般解 $y_0 = Ce^{-2t}$ に対し

$$y = y_1 + y_0 = -\frac{5}{2} + Ce^{-2t}$$

が (3) の一般解である。

初期条件より $t = 0$ のとき $y = -\dfrac{5}{2} + Ce^0 = -\dfrac{5}{2} + C = 4$ より $C = \dfrac{13}{2}$

$$\underline{\text{(答) } y = -\frac{5}{2} + \frac{13}{2}e^{-2t}}$$

**問**　次の微分方程式を以下の初期条件の下で解け。(ただし $k$, $g$ は定数で $k \neq 0$)

(1) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 10 - 9.8t \\ t = 0 \text{ のとき } y = 6 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -5y \\ t = 0 \text{ のとき } y = 4 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + ky = 9.8 \\ t = 0 \text{ のとき } y = 0 \end{cases}$　(4) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + ky = -g \\ t = 0 \text{ のとき } y = 4 \end{cases}$

# < 2 階線形微分方程式 (1) >

与えられた関数 $a(t)$ , $b(t)$ , $F(t)$ に対し、未知関数 $y$ に関する微分方程式

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2}+a(t)\frac{dy}{dt}+b(t)y=F(t)} \quad \cdots \ (*)_1$$

を **2 階線形微分方程式**という。この形の微分方程式は場合に応じて一般解の形がちがうが、共通して次の基本定理が成り立つ。

**< 基本定理 >**

任意の点 $t_0$ と定数 $\alpha$ , $\beta$ に対して

$$\boxed{y(t_0)=\alpha \quad , \quad y'(t_0)=\beta} \cdots \ (*)_2$$

を満たす $(*)_1$ の解 $y=y(t)$ がただ 1 つ存在する。

通常は $t_0=0$ の場合を考えるので、条件 $(*)_2$ を**初期条件**という。

**例**　微分方程式

$$(1) \quad \boxed{\frac{d^2y}{dt^2}=-10}$$

を考える。$t$ について積分すると

$$y'(t)=\frac{dy}{dt}=\int\frac{d^2y}{dt^2}dt=\int(-10)dt=-10t+C_1$$

$$y(t)=\int\frac{dy}{dt}dt=\int(-10t+C_1)dt=-5t^2+C_1t+C_2$$

より $\boldsymbol{y=-5t^2+C_1t+C_2}$ が (1) の一般解である。ここで初期条件として

$$(2) \quad \boxed{y(0)=3 \quad , \quad y'(0)=4} \quad (\text{初期条件})$$

があれば

$$y(0)=3 \ \Rightarrow \ t=0 \ \text{のとき} \ y=3 \ \Rightarrow \ C_2=3$$

$$y'(0)=4 \ \Rightarrow \ t=0 \ \text{のとき} \ y'=4 \ \Rightarrow \ C_1=4$$

より $\underline{\boldsymbol{y=-5t^2+4t+3}}$ が (2) をみたす (1) の解である。

**問**　次の微分方程式を以下の初期条件のもとで解け。

$$(1) \ \begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2}=8 \\ y(0)=7 \ , \ y'(0)=6 \end{cases} \qquad (2) \ \begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2}=6t+2 \\ y(0)=8 \ , \ y'(0)=9 \end{cases}$$

# ＜ 2 階線形微分方程式 (2) ＞

**例**　$t$ の関数 $y=y(t)$ に関する微分方程式

(1)　$\boxed{\dfrac{d^2y}{dt^2}=9y}$

を考える。今　$y_1(t)=e^{3t}$　,　$y_2(t)=e^{-3t}$　とおくと、

$$\frac{d^2y_1}{dt^2}=\left(e^{3t}\right)''=\left(3e^{3t}\right)'=9e^{3t}=9y_1$$

$$\frac{d^2y_2}{dt^2}=\left(e^{-3t}\right)''=\left(-3e^{-3t}\right)'=9e^{-3t}=9y_2$$

より $y_1$ と $y_2$ は共に (1) の解である。さらに定数 $C_1$ と $C_2$ に対して

(2)　$\boxed{y=C_1y_1+C_2y_2=C_1e^{3t}+C_2e^{-3t}}$

とおくと

$$\frac{d^2y}{dt^2}=C_1\left(e^{3t}\right)''+C_2\left(e^{-3t}\right)''=9C_1e^{3t}+9C_2e^{-3t}=9y$$

より $y$ もまた (1) の解である。次のページで説明するが、(1) の解は全て (2) の形をしている。ここで初期条件が

(3)　$\boxed{y(0)=1 \quad , \quad y'(0)=4}$

であるとき (2) 式から $t=0$ のとき

(4)　$y(0)=C_1+C_2=1$

である。また (2) を微分すると $y'(t)=3C_1e^{3t}-3C_2e^{-3t}$ だから

(5)　$y'(0)=3C_1-3C_2=4$

である。(4) と (5) より $C_1=\dfrac{7}{6},\ C_2=-\dfrac{1}{6}$ となる。よって (3) をみたす (1) の解は

$\underline{y=\frac{7}{6}e^{3t}-\frac{1}{6}e^{-3t}\ \cdots}$ <u>初期条件 (3) をみたす (1) の解</u>

**問**　次の初期条件をみたす (1) の解を求めよ。

(1)　$y(0)=8$ ,　$y'(0)=6$　　　(2)　$y(0)=\alpha$ ,　$y'(0)=\beta$

# < 2 階線形同次微分方程式 (1) >

与えられた関数 $a(t)\,,b(t)$ に対し、未知関数 $y$ に関する微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2}+a(t)\frac{dy}{dt}+b(t)y=0$$

を **2 階線形同次微分方程式**という。これは 2 階線形微分方程式 (49 ページ) で $F(t)=0$ の場合である。

**例**　$a(t)=0\,,b(t)=-9$ のときの同次微分方程式

(1)　$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2}-9y=0}$$

を考える。これは前ページの例の微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dt^2}=9y$ と同じであるから、任意定数 $C_1$ と $C_2$ に対し

(2)　$\boxed{y=C_1e^{3t}+C_2e^{-3t}}$　　$(C_1\,,C_2$ は任意定数)

は (1) の解である。実は $\boxed{\text{(1) の解は全て (2) の形をしている}}$ ことが証明できる。

(2) を微分方程式 (1) の**一般解**といい、$e^{3t}$ と $e^{-3t}$ を (1) の**基本解**という。

<証明>　((1) の解が全て (2) の形をしていることの証明)

(1) の任意の解を $y_1=y_1(t)$ とおく。$y_1$ の初期値を

(3)　$\boxed{y_1(0)=\alpha\quad,\quad y_1'(0)=\beta}$

とする。一方

$$y_2(t)=\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{6}\right)e^{3t}+\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{6}\right)e^{-3t}$$

とおくと $y_2=y_2(t)$ は (1) の解であり、

$$y_2(0)=\alpha\quad,\quad y_2'(0)=\beta$$

をみたす。49 ページの基本定理より、初期条件 (3) をみたす (1) の解はただ 1 つであるから $y_1(t)=y_2(t)=\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{6}\right)e^{3t}+\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{6}\right)e^{-3t}$ である。従って $y_1(t)$ は (2) の形をしている。(証明終)

**問**　$y(t)=e^{-2t}$ は微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2}-4y=0$$

の基本解である。もう 1 つの基本解を求め、この微分方程式の一般解を求めよ。

# ＜ 2 階線形同次微分方程式 (2) ＞

このページでは 2 つの関数 $y_1(t)$ と $y_2(t)$ が互いに他の定数倍 $\big(y_1(t) = k_1 y_2(t)$ または $y_2(t) = k_2 y_1(t)\big)$ になっているとき $y_1$ と $y_2$ は**同じ形の関数**ということにする。

一般の 2 階線形同次微分方程式

$$(*)_1 \cdots \frac{d^2y}{dt^2} + a(t)\frac{dy}{dt} + b(t)y = 0$$

を考える。もし 2 つの異なる関数 $y_1(t)$ と $y_2(t)$ が $(*)_1$ の解ならば、任意の定数 $C_1$ と $C_2$ に対し

$$(*)_2 \cdots y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$$

とおくと $(*)_2$ も $(*)_1$ の解である。実は「$y_1$ と $y_2$ が同じ形の関数でなければ、$(*)_1$ の全ての解は $(*)_2$ の形をしている」ことが前のページと同様にして証明できる（証明略）。このとき $y_1(t)$ と $y_2(t)$ を $(*)_1$ の**基本解**といい、$(*)_2$ を $(*)_1$ の**一般解**という。

**例**　微分方程式

(1)　$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0$$

を考える。今 $y_1(t) = e^t$　,　$y_2(t) = e^{2t}$ とおくと

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} - 3\frac{dy_1}{dt} + 2y_1 = \left(e^t\right)'' - 3\left(e^t\right)' + 2\left(e^t\right) = e^t - 3e^t + 2e^t = 0$$

$$\frac{d^2y_2}{dt^2} - 3\frac{dy_2}{dt} + 2y_2 = \left(e^{2t}\right)'' - 3\left(e^{2t}\right)' + 2\left(e^{2t}\right) = 4e^{2t} - 6e^{2t} + 2e^{2t} = 0$$

より $y_1$ と $y_2$ は共に (1) の解である。$y_1$ と $y_2$ は同じ形の関数ではない。

すなわち $y_1$ と $y_2$ は (1) の基本解であるから (1) の一般解は

$$\boldsymbol{y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t}} \qquad (C_1\,,\,C_2 \text{ は任意定数})$$

である。

**問**　$y = e^{3t}$ は微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 3y = 0$$

の基本解である。もう一つの基本解をみつけ、この微分方程式の一般解を求めよ。

# < 定数係数 2 階線形同次微分方程式 (1) >

定数 $a, b$ に対し、$t$ の関数 $y$ に関する微分方程式

$$(*) \qquad \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} + by = 0}$$

を**定数係数 2 階線形同次微分方程式**という。

**例** 前のページ例の微分方程式

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0$$

の 2 つの基本解は $e^t$ と $e^{2t}$ であった。この基本解を求めるには次のように考えればよい。

# < 基本解の求め方 >

基本解を $e^{\lambda t}$ とすると、微分方程式 (1) をみたすから

$$\frac{d^2}{dt^2}(e^{\lambda t}) - 3\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}) + 2e^{\lambda t} = 0$$

すなわち $\quad \lambda^2 e^{\lambda t} - 3\lambda e^{\lambda t} + 2e^{\lambda t} = (\lambda^2 - 3\lambda + 2)e^{\lambda t} = 0$

従って $\quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$

よって $\lambda = 1$ または $\lambda = 2$ より基本解は $e^t$ または $e^{2t}$ となる。

一般の定数係数 2 階線形同次微分方程式 $(*)$ において、$\lambda$ に関する 2 次方程式

$$(**) \qquad \boxed{\lambda^2 + a\lambda + b = 0}$$

を $(*)$ の**特性方程式**という。$(*)$ の解を求めるためには $(**)$ の解を求めねばならない。

**問** 次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 5\dfrac{dy}{dt} + 6y = 0$

(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 3y = 0$

(3) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 3\dfrac{dy}{dt} - 4y = 0$

(4) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 16y = 0$

# < 定数係数 2 階線形同次微分方程式 (2) >

**例**　$t$ の関数 $y$ に関する微分方程式

(1)　$$\frac{d^2y}{dt^2}+9y=0 \iff \frac{d^2y}{dt^2}=-9y$$

を考える。今 $y_1(t)=\cos(3t),\quad y_2(t)=\sin(3t)$ とおくと

$$\frac{d^2y_1}{dt^2}=(\cos(3t))''=(-3\sin(3t))'=-9\cos(3t)=-9y_1$$

$$\frac{d^2y_2}{dt^2}=(\sin(3t))''=(3\cos(3t))'=-9\sin(3t)=-9y_2$$

であるから $y_1$ と $y_2$ は (1) の基本解であり，従って一般解は

$\boldsymbol{y=C_1\cos(3t)+C_2\sin(3t)}\cdots$ (1) の一般解

である。この基本解 $y_1$ と $y_2$ を発見するには，次のように考える。

## < 基本解の見つけ方 >

微分方程式 (1) の特性方程式は

$$\lambda^2+9=0$$

であり，その解は $\lambda=\pm 3i$ であるから，$e^{3it}$ と $e^{-3it}$ が基本解となる。一般解は、$A,B$ を定数とすると，

$$y=Ae^{3it}+Be^{-3it}=A(\cos(3t)+i\sin(3t))+B(\cos(3t)-i\sin(3t))$$

となる。ここで，$A=B=\dfrac{1}{2}$ のとき $y=\cos(3t)$ となり，$A=-\dfrac{i}{2},\quad B=\dfrac{i}{2}$ のときに，$y=\sin(3t)$ となる。

**問**　次の微分方程式の一般解を求めよ。ただし $\omega$ は 0 でない実数定数である。

(1)　$\dfrac{d^2y}{dt^2}+y=0$

(2)　$\dfrac{d^2y}{dt^2}+4y=0$

(3)　$\dfrac{d^2y}{dt^2}+\omega^2y=0$

# < 定数係数 2 階線形同次微分方程式 (3) >

**例**　$t$ の関数 $y$ に関する微分方程式

(1)　$\dfrac{d^2y}{dt^2} - 4\dfrac{dy}{dt} + 13y = 0$

を考える。今 $y_1 = e^{2t}\cos(3t)$ とおくと

$$\frac{dy_1}{dt} = 2e^{2t}\cos(3t) - 3e^{2t}\sin(3t), \quad \frac{d^2y_1}{dt^2} = -5e^{2t}\cos(3t) - 12e^{2t}\sin(3t) \text{ より}$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} - 4\frac{dy_1}{dt} + 13y_1$$
$$= -5e^{2t}\cos(3t) - 12e^{2t}\sin(3t) - 4\{2e^{2t}\cos(3t) - 3e^{2t}\sin(3t)\} + 13e^{2t}\cos(3t) = 0$$

となるので $y_1$ は (1) の解である。同様に $y_2 = e^{2t}\sin(3t)$ も (1) の解で

あるので，$y_1$ と $y_2$ が (1) の基本解であり，(1) の一般解は

$$\boldsymbol{y = C_1 e^{2t}\cos(3t) + C_2 e^{2t}\sin(3t)} \cdots \text{(1) の一般解}$$

となる。この基本解 $y_1$，$y_2$ を発見するには，次のように考える。

## < 基本解の見つけ方 >

微分方程式 (1) の特性方程式は

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$$

であり、その解は $\lambda = 2 \pm 3i$ であるから，$e^{(2+3i)t}$ と $e^{(2-3i)t}$ が基本解となる。一般解は、$A$,$B$ を定数とすると，

$$y = Ae^{(2+3i)t} + Be^{(2-3i)t} = Ae^{2t}(\cos(3t) + i\sin(3t)) + Be^{2t}(\cos(3t) - i\sin(3t))$$

となる。ここで $A = B = \dfrac{1}{2}$ のとき $y = e^{2t}\cos(3t)$ となり，$A = -\dfrac{i}{2}$，$B = \dfrac{i}{2}$ のときは $y = e^{2t}\sin(3t)$ となる。

**問 1**　$y = e^{2t}\sin(3t)$ に対し，次式を計算せよ。

$\dfrac{dy}{dt} =$　　　　　　　　　　，$\dfrac{d^2y}{dt^2} =$

$\dfrac{d^2y}{dt^2} - 4\dfrac{dy}{dt} + 13y =$

**問 2**　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 2\dfrac{dy}{dt} + 5y = 0$　　　　(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 6\dfrac{dy}{dt} + 10y = 0$

# < 定数係数 2 階線形同次微分方程式 (4) >

**例**　$t$ の関数 $y$ に関する微分方程式

$$(1)\quad \frac{d^2y}{dt^2} - 6\frac{dy}{dt} + 9y = 0$$

を考える。$y_1 = te^{3t}$ とおくと

$$\frac{dy_1}{dt} = e^{3t} + 3te^{3t},\quad \frac{d^2y_1}{dt^2} = 6e^{3t} + 9te^{3t} \text{ より}$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} - 6\frac{dy_1}{dt} + 9y_1 = (6+9t)e^{3t} - 6(1+3t)e^{3t} + 9e^{3t} = 0$$

であるから $y_1$ は (1) の解である。$y_2 = e^{3t}$ とおくと $y_2$ も (1) の解であるから (1) の一般解は

$$\boldsymbol{y = C_1te^{3t} + C_2e^{3t}} \cdots (1) \text{ の一般解}$$

となる。

## < (1) の一般解の求め方 >

微分方程式 (1) を

$$(1)\quad y'' - 6y' + 9y = 0$$

とする。両辺に $3y' - 9y$ を加えると

$$y'' - 3y' = 3y' - 9y$$

$$\Downarrow$$

$$(2)\quad (y'-3y)' = 3(y'-3y)$$

ここで $y' - 3y = z$ とおくと

$$(2) \Rightarrow z' = 3z$$

$$\Downarrow$$

$$z = C_1e^{3t}$$

$$\Downarrow$$

$$y' - 3y = C_1e^{3t}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{(\text{答})\quad y = C_1te^{3t} + C_2e^{3t}}$$

**問 1**　定数 $C_1$ に対し，1 階微分方程式

$$\frac{dy}{dt} - 3y = C_1e^{3t}$$

の一般解を定数変化法により求めよ。

**問 2**　$a$ を定数とする。$y$ に関する 2 階微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2a\frac{dy}{dt} + a^2y = 0$$

の一般解を求めよ。

# < 定数係数 2 階線形同次微分方程式 (5) >

一般の定数係数 2 階線形同次微分方程式

(1) $\boxed{\dfrac{d^2y}{dt^2} + a\dfrac{dy}{dt} + by = 0}$

の一般解の求め方をまとめる。

**Step1.** 特性方程式

(2) $\boxed{\lambda^2 + a\lambda + b = 0}$

を解く。

**Step2.** 2 次方程式 (2) の解が 2 実根，2 虚根，重根の各場合によって次のようになる。

[ I ] $a^2 - 4b > 0$ のとき (2) は 2 つの実数解 $\alpha$，$\beta$ をもつ。このとき (1) の一般解は

$$\boldsymbol{y = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\beta t}} \quad (C_1,\ C_2 \text{ は任意定数})$$

[II] $a^2 - 4b < 0$ のとき (2) は共役な 2 つの虚数解 $\alpha$，$\beta$ をもつ。今

$$\alpha = \mu + \nu i, \quad \beta = \mu - \nu i$$

であれば (1) の一般解は

$$\boldsymbol{y = C_1 e^{\mu t}\cos(\nu t) + C_2 e^{\mu t}\sin(\nu t)} \quad (C_1,\ C_2 \text{ は任意定数})$$

[III] $a^2 - 4b = 0$ のとき (2) はただ 1 つの実数解 $\alpha$ をもつ。このとき (1) の一般解は

$$\boldsymbol{y = C_1 t e^{\alpha t} + C_2 e^{\alpha t}} \quad (C_1,\ C_2 \text{ は任意定数})$$

**問**　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 5\dfrac{dy}{dt} - 6y = 0$　　(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 16y = 0$

(3) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 8\dfrac{dy}{dt} + 20y = 0$　　(4) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 8\dfrac{dy}{dt} + 16y = 0$

# < 定数係数 2 階線形非同次微分方程式 (1) >

**例**　微分方程式

(1)　$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 5$$

を考える。今

(2)　$$y_1(t) = \frac{5}{2}$$

とおくと $y_1$ は定数だから

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} - 3\frac{dy_1}{dt} + 2y_1 = 0 - 3 \times 0 + 2 \times \frac{5}{2} = 5$$

となり (1) 式をみたす。従って $y_1$ は (1) の解である。これを (1) の**特解**という。

(1) の解を全て求めたい。(1) の任意の解を $y = y(t)$ とし

(3)　$$y_0(t) = y(t) - \frac{5}{2}$$

とおくと、$y$ は (1) の解だから

$$\frac{d^2y_0}{dt^2} - 3\frac{dy_0}{dt} + 2y_0 = \frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y - 5 = 0$$

となる。従って $y_0$ は同次方程式

(4)　$$\frac{d^2y_0}{dt^2} - 3\frac{dy_0}{dt} + 2y_0 = 0$$

の解である。52 ページより (4) の一般解は

$$y_0 = C_1e^t + C_2e^{2t}$$

だから　(3) より (1) の一般解 $y$ は

$$\boldsymbol{y\left(= y_0 + \frac{5}{2}\right) = C_1e^t + C_2e^{2t} + \frac{5}{2}} \quad (C_1,\ C_2 \text{ は任意定数})$$

である。

一般の 2 階線形微分方程式

$(*)_1$　$$\frac{d^2y}{dt^2} + a(t)\frac{dy}{dt} + b(t)y = F(t)$$

で $F(t) \neq 0$ のとき**非同次方程式**という。もし $(*)_1$ の解（特解）$y_1$ が 1 つみつかれば、同次方程式

$(*)_2$　$$\frac{d^2y_0}{dt^2} + a(t)\frac{dy_0}{dt} + b(t)y_0 = 0$$

の一般解 $y_0$ に対し $(*)_1$ の一般解 $y$ は

$$\boldsymbol{(*)_1 \text{ の一般解}: y = y_0 + y_1} \quad (y_0 \text{ は } (*)_2 \text{ の一般解},\quad y_1 \text{ は } (*)_1 \text{ の特解})$$

であることが例と同様にしてわかる。

**問**　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} - 2y = 6$　　(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 16y = 20$

(3) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 4\dfrac{dy}{dt} + 5y = 7$　　(4) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 4y = 6$

# < 定数係数 2 階線形非同次微分方程式 (2) >

与えられた関数 $F(t)$ $\big(\neq 0\big)$ と定数 $a$ , $b$ に対し次の形の微分方程式

$$(*)\quad \frac{d^2y}{dt^2}+a\frac{dy}{dt}+by=F(t)$$

を**定数係数 2 階線形非同次微分方程式**という。前ページより、$F(t)$ が定数の時は $(*)$ の特解も定数である。実は $F(t)$ が $t$ の $n$ 次式のときは特解も $t$ の $n$ 次式になる。さらに定数 $r$ , $\alpha$ , $\beta$ に対し、$F(t)$ が $re^{\alpha t}$ , $re^{\alpha t}\cos(\beta t)$ , $re^{\alpha t}\sin(\beta t)$ の形のとき $(*)$ の特解は次の表のようになる $\big($証明は実際に $(*)$ 式の左辺に特解を代入し、計算して右辺の形になるように確かめればよいので省略する。$\big)$

| $F(t)$ | $a$ , $b$ と $\alpha$ , $\beta$ の関係 | 特 解 |
|---|---|---|
| $re^{\alpha t}$ | ① $\alpha^2+\alpha a+b\neq 0$ | $\dfrac{r}{\alpha^2+\alpha a+b}e^{\alpha t}$ |
| | ② $\begin{cases}\alpha^2+\alpha a+b=0\\ \text{かつ}\\ 2\alpha+a\neq 0\end{cases}$ | $\dfrac{r}{2\alpha+a}te^{\alpha t}$ |
| | ③ $\begin{cases}\alpha^2+\alpha a+b=0\\ \text{かつ}\\ 2\alpha+a=0\end{cases}$ | $\dfrac{r}{2}t^2e^{\alpha t}$ |
| $re^{\alpha t}\cos(\beta t)$ | ④ $\begin{cases}A=\alpha^2-\beta^2+\alpha a+b\neq 0\\ \text{または}\\ B=\big(2\alpha+a\big)\beta\neq 0\end{cases}$ | $\dfrac{r}{A^2+B^2}e^{\alpha t}\left\{A\cos(\beta t)+B\sin(\beta t)\right\}$ |
| | ⑤ $\begin{cases}A=\alpha^2-\beta^2+\alpha a+b=0\\ \text{かつ}\\ B=\big(2\alpha+a\big)\beta=0\end{cases}$ | $\dfrac{r}{2\beta}te^{\alpha t}\sin(\beta t)$ |
| $re^{\alpha t}\sin(\beta t)$ | ⑥ $\begin{cases}A=\alpha^2-\beta^2+\alpha a+b\neq 0\\ \text{または}\\ B=\big(2\alpha+a\big)\beta\neq 0\end{cases}$ | $\dfrac{r}{A^2+B^2}e^{\alpha t}\left\{A\sin(\beta t)-B\cos(\beta t)\right\}$ |
| | ⑦ $\begin{cases}A=\alpha^2-\beta^2+\alpha a+b=0\\ \text{かつ}\\ B=\big(2\alpha+a\big)\beta=0\end{cases}$ | $-\dfrac{r}{2\beta}te^{\alpha t}\cos(\beta t)$ |

**例**　定数 $\omega$ , $r$ , $\beta$ (ただし $\omega^2\neq\beta^2$ とする) に対し微分方程式

$$(1)\quad \frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2y=r\sin(\beta t)$$

を考える。上の表では $a=0$ , $b=\omega^2$ , $\alpha=0$ , $A=-\beta^2+\omega^2\neq 0$ , $B=0$ であるから⑥の場合であり、特解 $y_1$ は $y_1=\frac{r}{A^2+0^2}e^0\big\{A\sin(\beta t)-0\big\}=\frac{r}{\omega^2-\beta^2}\sin(\beta t)$ である。一方 (1) の同次方程式

$$(2)\quad \frac{d^2y_0}{dt^2}+\omega^2y_0=0$$

の一般解は 54 ページより $y_0=C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t)$ であるから、(1) の一般解は

(1) の一般解：$\boldsymbol{y=C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t)+\dfrac{r}{\omega^2-\beta^2}\sin(\beta t)}$ ($C_1,C_2$ は任意定数)

**問**　次の微分方程式の一般解を求めよ。ただし $\omega$ は 0 でない定数とする。

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2y=r\sin(\omega t)$$

# < 定数係数 2 階線形非同次微分方程式 (3) >

定数係数 2 階線形微分方程式

$$(*)\quad \boxed{\frac{d^2y}{dt^2}+a\frac{dy}{dt}+by=F(t)}$$

を考える。この微分方程式は未知関数 $y=y(t)$ の時間発展を表す。例えば物体の運動を表す場合、通常 $y=y(t)$ は時刻 $t$ における物体の「**位置**」を表す。このとき $\frac{dy}{dt}$ は「**速度**」を表し、$\frac{d^2y}{dt^2}$ は「**加速度**」を意味する。このとき $(*)$ の係数 $a,\ b$ と関数 $F(t)$ は

$a$：速度に比例して加速度が変わる場合の比例定数
$b$：位置に比例して加速度が変わる場合の比例定数
$F(t)$：**外力**

を意味する。特に係数 $a$ がプラスのときは $a$ は「**抵抗**」を意味する。
ここでは $b=0$ の場合

$$(**)\quad \boxed{\frac{d^2y}{dt^2}+a\frac{dy}{dt}=F(t)}$$

を考える。$(**)$ は見かけ上 2 階微分方程式だが、本質的には 1 階微分方程式の解法によって解ける。速度を $v=\frac{dy}{dt}$ とおくと、$(**)$ 式は

$$(***)\quad \boxed{\frac{dv}{dt}+av=F(t)}$$

となり、$v$ に関する 1 階微分方程式になる。この解 $v=v(t)$ を求め、$t$ で積分すると

$$\boxed{y=\int v(t)dt}\quad \cdots (**) \text{ の解}\quad (v=v(t) \text{ は } (***) \text{ の解})$$

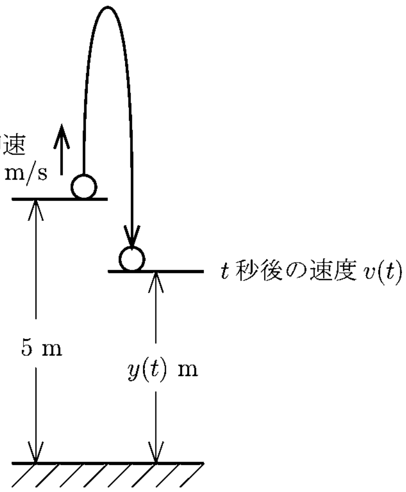
$(**)$ の解 $y$ が求まる。

**問**　次の微分方程式を以下の初期条件のもとで解け。

(1) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2}+2\dfrac{dy}{dt}=0 \\ y(0)=10\ ,\ y'(0)=6 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2}+2\dfrac{dy}{dt}=6 \\ y(0)=10\ ,\ y'(0)=8 \end{cases}$

# < 微分方程式の応用 (1) >




**例** 地上 5 m の高さから初速 6(m/s) で質量 $m$(kg) の物体を真上に投げ上げた。
$t$ 秒後の速度 $v(t)$ および高さ $y(t)$ を求めたい。空気抵抗を考えないとすると、この物体に働く力は重力だけなので、加速度を $a$ とすると

$$重力 = ma = -mg \qquad (g = 9.8 \ \ \mathrm{m/s^2})$$

となる。従って

$$加速度 = a = -g$$

が成り立つ。加速度 $a$ は速度 $v$ を微分したもの $\left(a = \dfrac{dv}{dt}\right)$

(1) $$\frac{dv}{dt} = -g = -9.8$$

より

$$v(t) = -9.8t + C_1$$

となる。ここで初速 6(m/s) だから $t = 0$ のとき $v(0) = 6$ より $C_1 = 6$
よって

$$\underline{t\ 秒後の速度\ v(t) = -9.8t + 6 \quad (\mathrm{m/s})}$$

である。速度は位置 $y(t)$ を微分したもの $\left(v = \dfrac{dy}{dt}\right)$

(2) $$\frac{dy}{dt} = -9.8t + 6$$

より

$$y(t) = -4.9t^2 + 6t + C_2$$

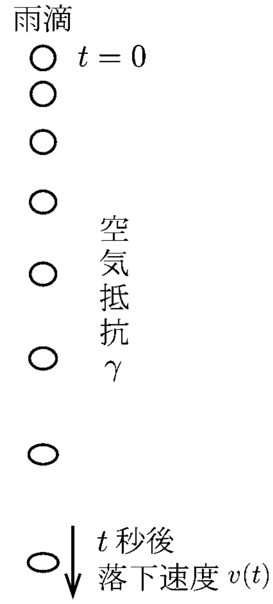
となる。ここで初期位置が 5 m だから $t = 0$ のとき $y(0) = 5$ より $C_2 = 5$
よって

$$\underline{t\ 秒後の位置\ y(t) = -4.9t^2 + 6t + 5 \quad (\mathrm{m})}$$

である。

**問** 地上 10 m の高さから初速 7(m/s) で質量 $m$(kg) の物体を真上に投げ上げた。
$t$ 秒後の速度 $v(t)$ と高さ $y(t)$ を求めよ。ただし空気抵抗は考えない。

# ＜微分方程式の応用 (2) ＞




**例** (自由落下 $\cdots$ 空気抵抗あり)
雨のようにかなり上空から落ちるのに地面に落ちた時の速度があまり速くないのは空気抵抗による。水滴を上空から落とす実験をすると，最初球形だった水滴が速度を増すとだんだん円盤状になり，より空気抵抗を受けやすい形になる。つまり速度に比例して空気抵抗が大きくなる。この比例定数を $\gamma$ とすると，落ちるとき「$\gamma\times$ 速度」というブレーキがかかるので

$$\text{落ちる加速度} = \text{重力加速度} - \gamma\times \text{速度}$$

となる。$t$ 秒後の落下速度 $v(t)$ に関する式で表すと

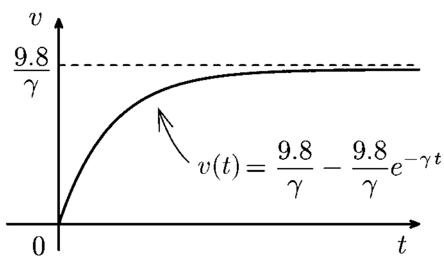
$$(1) \qquad \frac{dv}{dt} = 9.8 - \gamma v \quad (t=0 \text{ のとき } v=0)$$

という微分方程式ができる。ここで，水滴を落とす瞬間は水滴の速度はゼロ、すなわち

$$t=0 \text{ のとき } v(0)=0$$

という初期条件で，微分方程式 (1) を考える。これは 48 ページ問 (3) と同じ方程式であるから，48 ページの結果より

$$(1) \text{ の解}：\underline{v(t) = \frac{9.8}{\gamma} - \frac{9.8}{\gamma}e^{-\gamma t}}$$




となる。$v(t)$ のグラフは右図のようになり，落下速度 $v(t)$ は一定速度 $\dfrac{9.8}{\gamma}$ より大きくならないことがわかる。

**問 1** 上の例で上向きの速度をプラス，下向きの速度をマイナスと考えたとき $t$ 秒後の速度 $v(t)$ はマイナスだから，$v(t)$ の方程式は

$$(2) \qquad \frac{dv}{dt} = -9.8 - \gamma v$$

となる。初期条件 ($t=0$ のとき $v(0)=0$) のもとで (2) の解 $v(t)$ を求めよ。

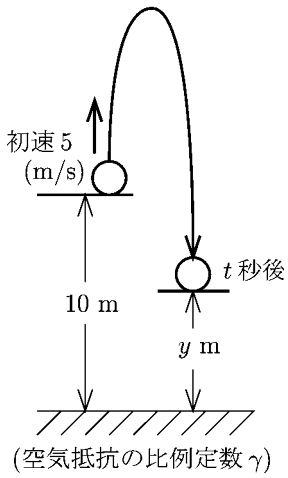
**問 2** 物体を真上に初速 5(m/s) で投げ上げた。$t$ 秒後の速度を $v(t)$ とする (ただし上向きの速度はプラス，下向きの速度はマイナスと考える)。例および問 1 と同様に速度に比例する空気抵抗があるとする。空気抵抗の比例定数を $\gamma$ として $t$ 秒後の速度 $v(t)$ を求めよ。

# < 微分方程式の応用 (3) >

**問 1**　地上 10m の場所から物体を真上に初速 5(m/s) で投げ上げた。このとき速度に比例する空気抵抗があるとして，その比例定数を $\gamma$ とする。$t$ 秒後の高さを $y$(m) とすると，微分方程式

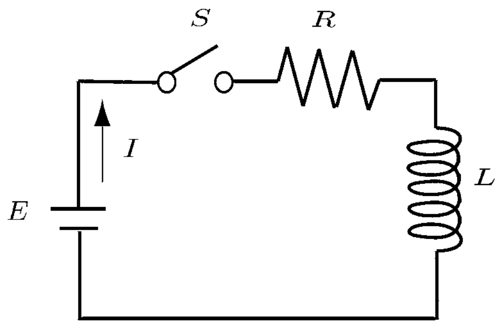
$$\frac{d^2y}{dt^2}+\gamma\frac{dy}{dt}=-9.8$$

が成り立つ。問題文から初期条件 ($y(0)$，$y'(0)$) を求め，$t$ 秒後の速度 $v(t)=\dfrac{dy}{dt}$ と $t$ 秒後の高さ $y(t)$ を求めよ。




**問 2**　右図のような直列回路のスイッチ $S$ を閉じた瞬間から $t$ 秒後の電気量 (電荷) を $q(t)$ とおくと，微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{d^2q}{dt^2}+\dfrac{R}{L}\dfrac{dq}{dt}=\dfrac{E}{L} \\ q(0)=0\ ,\ q'(0)=0 \end{cases}$$



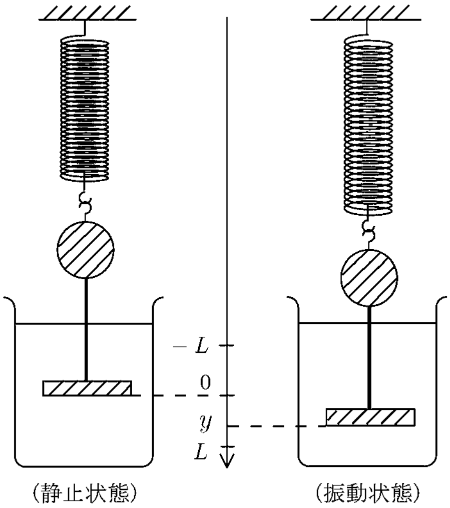

が成り立つ。ここで $L$ は自己インダクタンス，$R$ は抵抗，$E$ は起電力と呼ばれる正の定数である。$t$ 秒後の電流 $I(t)=\dfrac{dq}{dt}$ と電気量 $q(t)$ を求めよ。

# < 微分方程式の応用 (4) >

図 1 のようにばねの先のおもりがある液体につかっているとき，これを振動させたときの変位 $y$ に関する微分方程式は一般に

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} + by = 0}$$

となる。ここで $a$ は速度に比例する**抵抗**を意味する。また $b$ は「ばねの復元力」(ばねの強さ) を意味する。




(図1)

**例 1**　$a = 4,\ b = 229$ の場合，微分方程式は

$$(1)\quad \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 229y = 0}$$

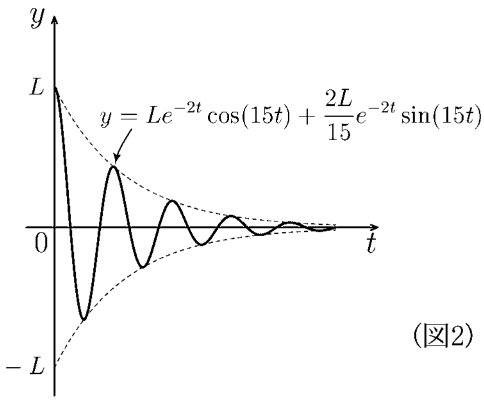
となる。ここで初期条件

「最初に $L$ だけ伸ばし，静かに離す」

$$(*)\quad \boxed{y(0) = L\ ,\quad y'(0) = 0}$$

を仮定すると、(1) − (∗) の解は

$$\underline{y = Le^{-2t}\cos(15t) + \frac{2L}{15}e^{-2t}\sin(15t)}$$




(図2)

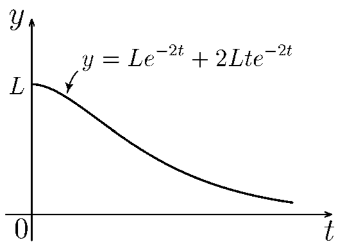
となる。このグラフは図 2 であり，ばねの振動が抵抗によってだんだん弱くなっていく。このような振動を**減衰振動**という。

**例 2**　$a = 4,\ b = 4$ の場合、微分方程式は

$$(2)\quad \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y = 0}$$

となる。上と同じ初期条件 (∗) をみたす解は

$$\underline{y = Le^{-2t} + 2Lte^{-2t}}$$




(図3)

となる。これは抵抗にくらべてばねの力が弱いため，振動しないで減衰していく (図 3)。

**問**　次の微分方程式を上の初期条件 (∗) のもとで解け。

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 13y = 0$　　　(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 6\dfrac{dy}{dt} + 9y = 0$

# < 微分方程式の練習 >

**問 1**　次の微分方程式の一般解を求めよ。ただし $a$, $b$ は定数とする。

(1) $\dfrac{dy}{dt} - \cos(2t) = 0$

(2) $\dfrac{dy}{dt} + 4ty = 0$

(3) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3yt^2}{t^3+1}$

(4) $\dfrac{dy}{dt} + 2y = 3$

(5) $\dfrac{dy}{dt} - 2y = e^t$

(6) $\dfrac{dy}{dt} - 3y = e^{3t}$

(7) $\dfrac{d^2y}{dt^2} = at + b$

(8) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 5\dfrac{dy}{dt} + 6y = 0$

(9) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 9y = 0$

(10) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 9y = 0$

(11) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 2\dfrac{dy}{dt} + 5y = 0$

(12) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 6\dfrac{dy}{dt} + 9y = 0$

(13) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt} - 6y = 4$

(14) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4y = 5$

**問 2**　次の微分方程式を以下の初期条件で解け。

(1) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -3y \\ y(0) = 4 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} + 3v = 6 \\ v(0) = 5 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} - 5\dfrac{dy}{dt} + 4y = 0 \\ y(0) = 2\ ,\ y'(0) = 6 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + 4y = 0 \\ y(0) = 5\ ,\ y'(0) = 6 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + 2y = 0 \\ y(0) = 1\ ,\ y'(0) = 0 \end{cases}$

(6) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 4y = 0 \\ y(0) = 1\ ,\ y'(0) = 0 \end{cases}$