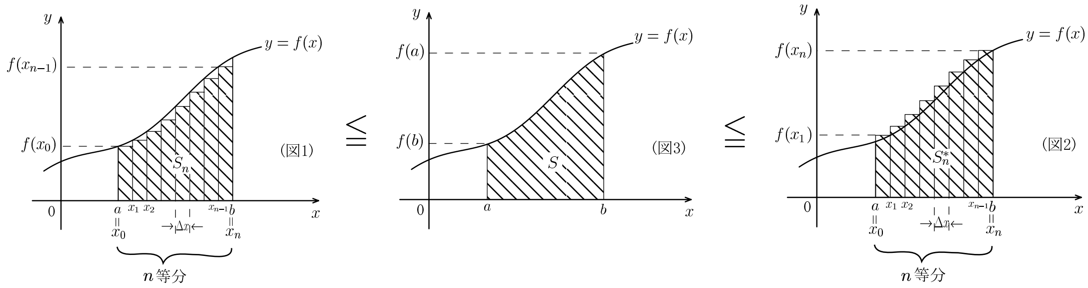
高知工科大学

Kochi University of Technology

数 学 2

（2005年度版）



初等関数の積分法

（不定積分，定積分，面積，テーラー展開）

井上 昌昭 著

< 不定積分 (1) >

x の関数 $f(x)$ に対して，微分すると $f(x)$ になる関数，すなわち $F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ があれば，それを $f(x)$ の**原始関数**という。$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数のとき，任意の定数 C に対して

$$\Big(F(x) + C\Big)' \;=\; F'(x) \;=\; f(x)$$

であるから，$F(x) + C$ も $f(x)$ の原始関数である。従って $f(x)$ の原始関数は無数にあるが，いずれも $F(x) + C$ の形で書き表される。

$$F(x)+C \qquad\qquad (C\text{は任意定数})$$

この表示を $f(x)$ の**不定積分** といい，$\displaystyle\int \boldsymbol{f(x)dx}$ で表す。

$$\boxed{F'(x) \;=\; f(x) \quad \text{のとき} \qquad \int f(x)dx = F(x) + C} \qquad (\text{不定積分})$$

$f(x)$ の不定積分を求めることを，$f(x)$ を**積分する** といい，上の定数 C を **積分定数** と呼ぶ。またこのとき $f(x)$ を **被積分関数** といい，x を **積分変数** という。

例　$\displaystyle\left(\frac{1}{4}x^4\right)' \;=\; x^3 \qquad \Rightarrow \qquad \int x^3 dx \;=\; \frac{1}{4}x^4 + C$

問　次の左の導関数を求め，右の不定積分を求めよ。　(ただし $\alpha \neq -1$)

(1) $\displaystyle\left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' =$ 　　$\Rightarrow$　$\displaystyle\int x^\alpha dx =$

(2) $\Big(\log|x|\Big)' =$ 　　$\Rightarrow$　$\displaystyle\int \frac{1}{x} dx =$

(3) $(\sin x)' =$ 　　$\Rightarrow$　$\displaystyle\int \cos x dx =$

(4) $(-\cos x)' =$ 　　$\Rightarrow$　$\displaystyle\int \sin x dx =$

(5) $(e^x)' =$ 　　$\Rightarrow$　$\displaystyle\int e^x dx =$

< 不定積分 (2) >

< x^α の不定積分 >

$\alpha \neq -1$ のとき　　$\displaystyle\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$

$\alpha = -1$ のとき　　$\displaystyle\int x^{-1} dx = \log|x| + C$

例 1　$\displaystyle\int \frac{1}{x^5}dx = \int x^{-5}dx = \frac{1}{-5+1}x^{-5+1} + C = -\frac{1}{4}x^{-4} + C = -\frac{1}{4x^4} + C$

例 2　$\displaystyle\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$

(注) $\displaystyle\int \frac{1}{x^5}dx$ を $\displaystyle\int \frac{dx}{x^5}$ のように書くことがある。

同様にして $\displaystyle\int \frac{1}{f(x)}dx$ を $\displaystyle\int \frac{dx}{f(x)}$ と書くことがある。

問　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x^6 dx$

(2) $\displaystyle\int x^{\frac{1}{4}} dx$

(3) $\displaystyle\int x^{-\frac{1}{2}} dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3}$

(5) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x^2} dx$

(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$

< 不定積分 (3) >

不定積分について，次の公式が成り立つ。ただし両辺の積分定数の違いは無視している。

1. $\displaystyle\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$　　(k は 0 でない定数)
2. $\displaystyle\int \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
3. $\displaystyle\int \{f(x)-g(x)\}\,dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

(定数倍，和・差の不定積分)

例
$$\int \frac{(x-1)(x-2)}{x^2}dx = \int \frac{x^2-3x+2}{x^2}dx = \int \left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)dx$$
$$= \int dx - 3\int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{1}{x^2}dx = x - 3\log|x| - \frac{2}{x} + C$$

(注) この例のように，積分定数は最後にまとめて C で表す。
また $\displaystyle\int 1dx$ は 1 を省略して $\displaystyle\int dx$ と書くことがある。

問　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2-4x+1}{x^3}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{(x^2-1)(x^2-3)}{x^4}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{x}}dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}dx$

< 不定積分 (4) >

問 1 左の導関数と右の不定積分を求めよ。 (ただし $a > 0,\ a \neq 1$)

(1) $(\tan x)' =$ $\Rightarrow$ $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} =$

(2) $\displaystyle\left(\frac{1}{\tan x}\right)' =$ $\Rightarrow$ $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} =$

(3) $(\sin^{-1} x)' =$ $\Rightarrow$ $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$

(4) $(\tan^{-1} x)' =$ $\Rightarrow$ $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx =$

例 1 $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x + 3}{\cos^2 x}dx = \int \cos x dx + 3\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \sin x + 3\tan x + C$

例 2 $\displaystyle\int \tan^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \tan x - x + C$

問 2 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (4\sin x - 3\cos x)dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{3\cos^3 x - 1}{\cos^2 x}dx$

(3) $\displaystyle\int (2 - \tan x)\cos x dx$ (4) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x - 1}dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{\tan^2 x}dx$ (6) $\displaystyle\int (1 + \tan^2 x)\, dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}dx$ (8) $\displaystyle\int \frac{5}{1+x^2}dx$

< 積分記号 >

$$\frac{d}{dx}\Big(F(x)\Big) = f(x) \quad \text{のとき} \quad \int f(x)dx = F(x) + C$$

である。ここで微分記号 $\dfrac{d}{dx}$ は変数 x に関する微分を意味し，積分記号 $\displaystyle\int \boxed{}\, dx$ の dx は変数 x に関する積分を意味する。
変数 x を変数 t に換えれば,

$$\frac{d}{dt}\Big(F(t)\Big) = f(t) \quad \text{のとき} \quad \int f(t)dt = F(t) + C$$

のようになる。

例 1　$\dfrac{d}{dx}\left(x^3\right) = 3x^2$　より　$\displaystyle\int 3x^2 dx = x^3 + C$

$\dfrac{d}{dt}\left(t^3\right) = 3t^2$　より　$\displaystyle\int 3t^2 dt = t^3 + C$

$\dfrac{d}{du}\left(u^3\right) = 3u^2$　より　$\displaystyle\int 3u^2 du = u^3 + C$

例 2　(1) $\displaystyle\int \left(t^2 - 4t + 3\right) dt = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t + C$

(2) $\displaystyle\int \sin u du = -\cos u + C$

(3) $\displaystyle\int 2\pi r dr = \pi r^2 + C$

問　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (10 - 9.8t)dt =$

(2) $\displaystyle\int 4\pi r^2 dr =$

(3) $\displaystyle\int e^u du =$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{y} dy =$

(5) $\displaystyle\int \cos u du =$

< 置換積分法 (1) >

例 1 $\displaystyle\int \cos(3x+2)dx$ を求めたい。 $\sin(3x+2)$ の導関数は合成関数の微分法より

$$\Big(\sin(3x+2)\Big)' = \cos(3x+2) \times (3x+2)' = 3\cos(3x+2)$$

であるから

$$\left(\frac{1}{3}\sin(3x+2)\right)' = \cos(3x+2)$$

よって

$$\int \cos(3x+2)dx = \frac{1}{3}\sin(3x+2) + C$$

(別解) $u = 3x+2$ とおくと $\dfrac{du}{dx} = (3x+2)' = 3$ である。そこで形式的に

$$du = 3dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{dx = \frac{1}{3}du}$$

とおき，積分変数を x から u に置き換えて積分し，最後に元に戻す。

$$\int \cos(3x+2)dx = \int (\cos u)\frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\sin u + C = \frac{1}{3}\sin(3x+2) + C$$

(注) この別解の方法を **置換積分法** という。

例 2 $\displaystyle\int \frac{1}{4x-3}dx$ を求めたい。$u = 4x-3$ とおく。上の別解と同様にして

$$\frac{du}{dx} = (4x-3)' = 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{dx = \frac{1}{4}du}$$

とおき，積分変数を置き換えると次のように求まる。

$$\int \frac{1}{4x-3}dx = \int \frac{1}{u} \times \frac{1}{4}du = \frac{1}{4}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{4}\log|u| + C = \frac{1}{4}\log\Big|4x-3\Big| + C$$

問　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (5x+6)^3 dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{(7x+5)^4}$

(3) $\displaystyle\int \sqrt{5x-3}\,dx$　　(4) $\displaystyle\int \sin(3x+2)dx$

(5) $\displaystyle\int e^{-3x+2}dx$　　(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2(4x+3)}$

< 置換積分法 (2) >

例 1 $\displaystyle\int 3x^2e^{x^3}\,dx$ を考える。

$\boxed{u = x^3}$ とおくと $\dfrac{du}{dx} = (x^3)' = 3x^2$ (u を x で微分)

ここで形式的に

$$3x^2 = \frac{du}{dx} \quad \Rightarrow \quad \boxed{3x^2dx = du}$$

とおくと

$$\int 3x^2e^{x^3}\,dx = \int e^{x^3}3x^2\,dx = \int e^u\,du = e^u + C = e^{x^3} + C$$

例 2 $\displaystyle\int x^2e^{x^3}\,dx$ を考える。上と同様に $x^3 = u$ とおくと $3x^2 = \dfrac{du}{dx}$

ここで形式的に $\boxed{x^2\,dx = \frac{1}{3}du}$ とおくと

$$\int x^2e^{x^3}\,dx = \int e^{x^3}x^2\,dx = \int e^u\frac{1}{3}\,du = \frac{1}{3}\int e^u\,du = \frac{1}{3}e^u + C = \frac{1}{3}e^{x^3} + C$$

例 3 $\displaystyle\int x\cos(x^2+1)\,dx$ を考える。

$\boxed{u = x^2+1}$ とおくと $\dfrac{du}{dx} = (x^2+1)' = 2x$ (u を x で微分)

ここで形式的に

$$2x = \frac{du}{dx} \quad \Rightarrow \quad \boxed{xdx = \frac{1}{2}du}$$

とおくと

$$\int x\cos(x^2+1)\,dx = \int \cos(x^2+1)\ \ x\,dx = \int \cos\,u\ \ \frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\int \cos\,u\,du$$
$$= \frac{1}{2}\sin u + C = \frac{1}{2}\sin(x^2+1) + C$$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int xe^{x^2+1}dx$

(2) $\displaystyle\int x^3e^{x^4}dx$

(3) $\displaystyle\int x^2\cos(x^3+2)\,dx$

(4) $\displaystyle\int x\sin(x^2+3)\,dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+3}\,dx$

(6) $\displaystyle\int x\,(x^2+1)^5\,dx$

< 不定積分の練習 (1) >

問　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (x^5 + x^7)dx$

(2) $\displaystyle\int x^{-2}dx$

(3) $\displaystyle\int x^{\frac{1}{3}}dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3}$

(5) $\displaystyle\int \sqrt{x}dx$

(6) $\displaystyle\int \sqrt[4]{x}dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

(8) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 2x + 1}{x}dx$

(9) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3}dx$

(10) $\displaystyle\int \frac{2x - 1}{\sqrt{x}}dx$

(11) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x} + 3)^2}{x}dx$

(12) $\displaystyle\int (2\cos x - 3\sin x)dx$

(13) $\displaystyle\int (2\tan x + 3)\cos x dx$

(14) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x + 3\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$

< 不定積分の練習 (2) >

問　次の不定積分を求めよ。$\left(\begin{array}{l} \text{ただし} \\ \sec x = \dfrac{1}{\cos x},\ \ \mathrm{cosec}\, x = \dfrac{1}{\sin x},\ \ \cot x = \dfrac{1}{\tan x} \end{array} \right)$

(1) $\displaystyle\int \sec^2 x dx$

(2) $\displaystyle\int \mathrm{cosec}^2 x dx$

(3) $\displaystyle\int \tan^2 x dx$

(4) $\displaystyle\int \cot^2 x dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(6) $\displaystyle\int \frac{4}{1+x^2} dx$

(7) $\displaystyle\int 3e^x dx$

(8) $\displaystyle\int (t^2 - 6t + 5) dt$

(9) $\displaystyle\int (u^4 - 3u^2) du$

(10) $\displaystyle\int \sin t dt$

(11) $\displaystyle\int \cos u du$

(12) $\displaystyle\int e^u du$

(13) $\displaystyle\int \frac{1}{u} du$

(14) $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$

< 不定積分の練習 (3) >

問　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int e^{2x-3}dx$

(2) $\displaystyle\int \cos(4x-2)dx$

(3) $\displaystyle\int \sin(3x+5)dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2(5x+6)}$

(5) $\displaystyle\int \frac{dx}{4x+3}$

(6) $\displaystyle\int (7x-5)^3dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{dx}{(6x+1)^3}$

(8) $\displaystyle\int \sqrt{5x+1}dx$

(9) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{7x-6}}$

(10) $\displaystyle\int \sqrt[3]{5x+1}dx$

(11) $\displaystyle\int xe^{-x^2}dx$

(12) $\displaystyle\int x^2e^{-x^3}dx$

(13) $\displaystyle\int x^2\cos(x^3+4)dx$

(14) $\displaystyle\int x^3\sin(x^4)dx$

(15) $\displaystyle\int \frac{3x}{1+x^2}dx$

(16) $\displaystyle\int \frac{4x^2}{x^3+2}dx$

< 分数関数の積分 (1) >

例 1 $\displaystyle\int \frac{1}{3x+4}dx$ を求めたい。$u = 3x+4$ とおくと $\dfrac{du}{dx} = 3$ より $dx = \dfrac{1}{3}du$ だから

$$\int \frac{1}{3x+4}dx = \int \frac{1}{u} \times \frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{3}\log|u| + C = \frac{1}{3}\log|3x+4| + C$$

例 2 $\displaystyle\int \frac{1}{(5x-6)^2}dx$ を求めたい。$u = 5x-6$ とおくと $\dfrac{du}{dx} = 5$ より $dx = \dfrac{1}{5}du$ だから

$$\int \frac{1}{(5x-6)^2}dx = \int \frac{1}{u^2} \times \frac{1}{5}du = \frac{1}{5}\int u^{-2}du = -\frac{1}{5}u^{-1} + C = -\frac{1}{5u} + C = -\frac{1}{5(5x-6)} + C$$

例 3 $\displaystyle\int \frac{1}{(3x+4)^2+1}dx$ を求めたい。$u = 3x+4$ とおくと $dx = \dfrac{1}{3}du$ だから

$$\int \frac{1}{(3x+4)^2+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^2+1}du = \frac{1}{3}\tan^{-1}(u) + C = \frac{1}{3}\tan^{-1}(3x+4) + C$$

例 4 $\displaystyle\int \frac{1}{(3x+4)^2+5^2}dx$ を求めたい。$5u = 3x+4$ とおくと $dx = \dfrac{5}{3}du$ だから

$$\int \frac{1}{(3x+4)^2+5^2}dx = \frac{1}{15}\int \frac{1}{u^2+1}du = \frac{1}{15}\tan^{-1}(u) + C = \frac{1}{15}\tan^{-1}\left(\frac{3x+4}{5}\right) + C$$

問 次の不定積分を求めよ。ただし $a,\ b,\ r$ は定数で，$a \neq 0,\ r \neq 0$ とする。

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x+1}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{2x+3}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{ax+b}dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-3)^2}dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{(3x-4)^2}dx$

(6) $\displaystyle\int \frac{1}{(ax+b)^2}dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{(4x-5)^3}dx$

(8) $\displaystyle\int \frac{1}{(ax+b)^3}dx$

(9) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}dx$

(10) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+5^2}dx$

(11) $\displaystyle\int \frac{1}{(2x+1)^2+9}dx$

(12) $\displaystyle\int \frac{1}{(ax+b)^2+r^2}dx$

< 分数関数の積分 (2) >

例　$\displaystyle\int \frac{1}{(x+3)(x+5)}dx$ を求めたい。この被積分関数 $\dfrac{1}{(x+3)(x+5)}$ は $\dfrac{A}{x+3}$ と $\dfrac{B}{x+5}$ (A と B は定数) の形の和として表すことができる。すなわち

$$\frac{1}{(x+3)(x+5)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+5}$$

とおいて右辺を通分すると

$$\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+5} = \frac{A(x+5)+B(x+3)}{(x+3)(x+5)} = \frac{(A+B)x+(5A+3B)}{(x+3)(x+5)}$$

となる。この最後の式の分子が 1 になるように A と B を決めれば良い。つまり

$$1 = (A+B)x + (5A+3B)$$

より

$$A+B=0 \qquad \cdots①$$

$$5A+3B=1 \qquad \cdots②$$

であればよい。① , ② より $A=\dfrac{1}{2}$, $B=-\dfrac{1}{2}$ だから

$$\frac{1}{(x+3)(x+5)} = \frac{\frac{1}{2}}{x+3} - \frac{\frac{1}{2}}{x+5} = \frac{1}{2}\left\{ \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+5} \right\}$$

と表される。よって求める積分は

$$\int \frac{1}{(x+3)(x+5)}\,dx = \frac{1}{2}\int \left\{ \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+5} \right\} dx = \frac{1}{2}\left\{ \log|x+3| - \log|x+5| \right\} + C$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{x+3}{x+5}\right| + C$$

問　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x+1)}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x+1)}\,dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-2)(x-3)}\,dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-3)(x+4)}\,dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{(2x+1)(3x+4)}\,dx$

< 部分積分法 (1) >

2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ の積については

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

が成り立つ。これから

$$f(x)g'(x) = \{f(x)g(x)\}' - f'(x)g(x)$$

である。この両辺を積分すると

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx} \qquad \text{(部分積分)}$$

が成り立つ。これを **部分積分** の公式という。

例

$$\begin{aligned}\int x\cos x\,dx &= \int x(\sin x)'\,dx = x\sin x - \int (x)'\sin x\,dx \\ &= x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C\end{aligned}$$

(注)　部分積分の公式 $\displaystyle\int f \times g'\,dx = f \times g - \int f' \times g\,dx$ を

$$\boxed{\int \text{左} \times \text{右}\,dx = \text{左} \times (\text{右の積分}) - \int (\text{左の微分}) \times (\text{右の積分})\,dx}$$

と覚えると使いやすくなる。

問　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x\sin x\,dx$

(2) $\displaystyle\int xe^x\,dx$

(3) $\displaystyle\int x\cos(2x)\,dx$

(4) $\displaystyle\int x\sin(2x)\,dx$

(5) $\displaystyle\int xe^{3x}\,dx$

< 部分積分法 (2) >

前ページ (注) の式で左右を逆にしても正しい。すなわち

$$\boxed{\int 左 \times 右\ dx = (左の積分) \times 右 - \int (左の積分) \times (右の微分)\ dx}$$

例 1
$$\int \log x\, dx = \int 1 \times (\log x)\, dx = x \times (\log x) - \int x \times (\log x)'\, dx$$
$$= x \log x - \int 1\, dx = x \log x - x + C$$

(注 1)　$\log x$ は微分すると $\dfrac{1}{x}$ となり簡単になる。

問 1　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x \log x\, dx$

(2) $\displaystyle\int x^2 \log x\, dx$

例 2
$$\int x^2 \cos x\, dx = \int x^2 (\sin x)'\, dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x\, dx$$
$$= x^2 \sin x + \int 2x (\cos x)'\, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - \int 2 \cos x\, dx$$
$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$$

(注 2)　この例 2 は被積分関数が $x^2 \cos x$ であり，この x^2 を消すために部分積分を 2 回使っている。

問 2　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x^2 \sin x\, dx$

(2) $\displaystyle\int x^2 e^x\, dx$

< 三角関数の不定積分 >

三角関数の不定積分は三角関数の性質を使って，簡単な不定積分に直してから積分する。
特に次の公式はよく使う。

1. 半角の公式 $\boxed{\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos(2\alpha)}{2} \quad , \quad \cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos(2\alpha)}{2}}$

2. 積を和に直す公式

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\}$$

これらの公式は，右辺を加法定理により展開すると左辺が得られる。

例 (1) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1}{2}\{1+\cos(2x)\}\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$

(2) $$\int \sin(2x)\cos x\,dx = \int \frac{1}{2}\{\sin(3x)+\sin x\}\,dx = -\frac{1}{6}\cos(3x) - \frac{1}{2}\cos x + C$$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \sin^2 x dx =$

(2) $\displaystyle\int \cos(3x)\cos(2x)dx =$

(3) $\displaystyle\int \sin(4x)\sin x dx =$

(4) $\displaystyle\int \sin(4x)\cos(3x)dx =$

(5) $\displaystyle\int \cos^2(3x)dx =$

(6) $\displaystyle\int \sin^2(4x)dx =$

< 不定積分の検証 >

不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$ が正しいかどうかを調べるには，右辺を微分して $F'(x) = f(x)$ となっているかどうかを調べればよい。

例 1 $\displaystyle\int x^2(x^3+1)^4 dx = \frac{1}{15}(x^3+1)^5 + C$

が正しいかどうか検証する。右辺を微分すると合成関数の微分法より

$$\left(\frac{1}{15}(x^3+1)^5\right)' = \frac{1}{15}\left((x^3+1)^5\right)' = \frac{1}{15} \times 5(x^3+1)^4 \times (x^3+1)'$$
$$= \frac{1}{3} \times (x^3+1)^4 \times 3x^2 = x^2(x^3+1)^4$$

より**正しい**。

例 2 $\displaystyle\int \tan x dx = \log(\cos x) + C$

が正しいかどうか検証する。右辺を微分すると

$$\left(\log(\cos x)\right)' = \frac{1}{\cos x} \times (\cos x)' = \frac{1}{\cos x} \times (-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

より**正しくない**。

例 3 $\displaystyle\int (2x+1)\sin x dx = -(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$

が正しいかどうか検証する。右辺を微分すると (積の微分法より)

$$\left(-(2x+1)\cos x + 2\sin x\right)' = -(2x+1)' \times \cos x - (2x+1) \times (\cos x)' + 2 \times (\sin x)'$$
$$= -2\cos x - (2x+1) \times (-\sin x) + 2\cos x = (2x+1)\sin x$$

より**正しい**。

問　次の式の右辺を微分することにより次の不定積分が正しいかどうか判定せよ。

(1) $\displaystyle\int x^3(x^4-1)^3 dx = \frac{1}{4}(x^4-1)^4 + C$

(2) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-1} dx = \frac{1}{2}\log|x^2-1| + C$

(3) $\displaystyle\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

< 不定積分の練習 (4) >

問　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x+2}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{2x-3}\,dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{4}{3x+5}\,dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{(3x+4)^2}\,dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{3}{(4x-5)^2}\,dx$

(6) $\displaystyle\int \frac{2}{(5x+4)^3}\,dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2-1}\,dx$

(8) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x+2)}\,dx$

(9) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+3}\,dx$

(10) $\displaystyle\int \frac{1}{(3x-2)(2x-1)}\,dx$

＜不定積分の練習 (5)＞

問 1　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2+1}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4}\,dx$

(3) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$

(4) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$

(5) $\displaystyle\int xe^x\,dx$

(6) $\displaystyle\int x\cos x\,dx$

(7) $\displaystyle\int \log x\,dx$

(8) $\displaystyle\int x^3\log x\,dx$

(9) $\displaystyle\int x^2e^x\,dx$

(10) $\displaystyle\int \sin x\cos x\,dx$

問 2　次の不定積分が正しいかどうかを判定せよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{(2x+3)^5}\,dx = -\frac{1}{8(2x+3)^4} + C$

(2) $\displaystyle\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{8(2x+3)^4}\,dx = \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4}\,dx = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$

< 定積分 (1) >

$\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + C$ のとき

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)} \qquad \text{(定積分)}$$

と定め，この値を a から b までの $f(x)$ の **定積分** という。

例 1 $\displaystyle\int_1^4 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^4 = \frac{1}{3} \times 4^3 - \frac{1}{3} \times 1^3 = 21$

例 2 $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \Big[2\sqrt{x}\Big]_a^b = 2\sqrt{b} - 2\sqrt{a}$

問　次の定積分の値を求めよ。(ただし $n \neq -1$)

(1) $\displaystyle\int_a^b x^n dx =$

(2) $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x} dx =$

(3) $\displaystyle\int_a^b dx =$

(4) $\displaystyle\int_a^b e^x dx =$

(5) $\displaystyle\int_a^b \cos x dx =$

(6) $\displaystyle\int_a^b \sin x dx =$

(7) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\cos^2 x} =$

(8) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} =$

(9) $\displaystyle\int_4^{10} dx =$

(10) $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x^2} dx =$

(11) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\, dx =$

(12) $\displaystyle\int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx =$

(13) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\, dx =$

(14) $\displaystyle\int_0^2 e^x dx =$

(15) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx =$

(16) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x dx =$

(17) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} =$

(18) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} =$

< 定積分 (2) >

定積分の定義

$$\int f(x)bdx = F(x) + C \text{ のとき } \int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

より，定積分について次の性質が成り立つ。

1. $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$　　(k は定数)
2. $\displaystyle\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
3. $\displaystyle\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$
4. $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$
5. $\displaystyle\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
6. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

例　(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3x-4}{x^2}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}\right)dx = 3\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx - 4\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$

$$= 3\Big[\log x\Big]_1^2 - 4\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = 3\log 2 - 2$$

(2) $\displaystyle\int_0^\pi \sin^2 x dx = \int_0^\pi \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$

問　つぎの定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x^2-3x+1}{x^2}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^0 (x^3+x^4)\,dx + \int_0^1 (x^3+x^4)\,dx$

(3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)}$

(4) $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2 x\,dx$

(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(4x)\cos(2x)\,dx$

< 定積分の積分変数 >

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C \quad \text{のとき} \quad \int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)}$$

ここで変数 x が別の変数 (例えば t) に変わっても

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \Big[F(t)\Big]_{t=a}^{t=b} = F(b) - F(a)}$$

のように定積分の値は変わらない。すなわち

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx}$$

例　(1) $\displaystyle\int_1^3 x^4\,dx = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_{x=1}^{x=3} = \frac{1}{5}\times 3^5 - \frac{1}{5}\times 1^5 = \frac{243}{5} - \frac{1}{5} = \frac{242}{5}$

(2) $\displaystyle\int_1^3 t^4\,dt = \left[\frac{1}{5}t^5\right]_{t=1}^{t=3} = \frac{1}{5}\times 3^5 - \frac{1}{5}\times 1^5 = \frac{243}{5} - \frac{1}{5} = \frac{242}{5}$

(3) $\displaystyle\int_1^2 4\pi r^2\,dr = \left[\frac{4}{3}\pi r^3\right]_{r=1}^{r=2} = \frac{4}{3}\pi\times 8 - \frac{4}{3}\pi\times 1 = \frac{28}{3}\pi$

(4) $\displaystyle\int_0^\pi 4\cos\theta\,d\theta = \Big[4\sin\theta\Big]_{\theta=0}^{\theta=\pi} = 4\sin\pi - 4\sin 0 = 0$

問　次の定積分の値を求めよ。(ただし $n \neq -1$)

(1) $\displaystyle\int_1^3 (4-10t)dt$

(2) $\displaystyle\int_0^R 2\pi r dr$

(3) $\displaystyle\int_0^\pi \sin\theta d\theta$

(4) $\displaystyle\int_a^b u^n du$

(5) $\displaystyle\int_1^9 \sqrt{u}du$

< 定積分の置換積分法 (1) >

例題　定積分 $\displaystyle\int_0^2 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$ の値を求めよ。

(解)　まず不定積分 $\displaystyle\int 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$ を求める。

$u = x^3+1$ とおくと　$\dfrac{du}{dx} = 3x^2 \implies 3x^2\,dx = du$　より

$$\int 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \int \sqrt{x^3+1}\;3x^2\,dx = \int \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(x^3+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

となるから

$$\int_0^2 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \left[\frac{2}{3}(x^3+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{2}{3}(2^3+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(1^3+1)^{\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{2}{3}\times 9^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\times 1^{\frac{3}{2}} = \frac{2\times 27}{3} - \frac{2}{3} = \frac{52}{3}$$

(別解)　$u = x^3+1$ とおくと x と u との対応は

x	$0 \implies 2$
u	$1 \implies 9$

より

$$\int_{x=0}^{x=2} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \int_{u=1}^{u=9}\sqrt{u}\,du = \left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_{u=1}^{u=9} = \frac{2}{3}\times 9^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\times 1^{\frac{3}{2}} = \frac{52}{3}$$

別解の方法を **定積分の置換積分法** という。

問　次の定積分の値を求めよ。

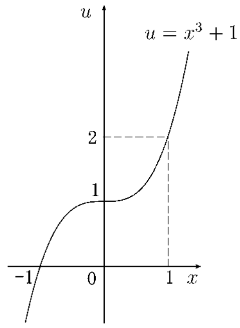
(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} 3x^2(x^3+1)^4\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{4x^3}{(x^4+1)^2}\,dx$

＜ 定積分の置換積分法 (2) ＞

例 1 $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2 e^{x^3+1}\,dx$ を求めたい。



$u = x^3 + 1$　とおくと　$\dfrac{du}{dx} = 3x^2 \quad\Longrightarrow\quad x^2\,dx = \dfrac{1}{3}\,du$

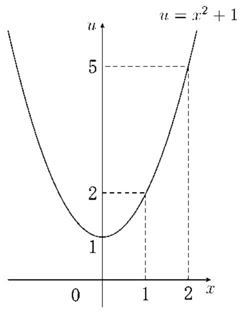
であり x と u との対応は

x	$-1 \Longrightarrow 1$
u	$0 \Longrightarrow 2$

となる。よって

$$\int_{-1}^{1} x^2 e^{x^3+1}\,dx = \int_{x=-1}^{x=1} e^{x^3+1} x^2\,du = \int_{u=0}^{u=2} e^u \frac{1}{3}\,du = \left[\frac{1}{3}e^u\right]_{u=0}^{u=2} = \frac{1}{3}e^2 - \frac{1}{3}$$

例 2 $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x}{x^2+1}\,dx$ を求めたい。



$u = x^2 + 1$　とおくと　$\dfrac{du}{dx} = 2x \quad\Longrightarrow\quad x\,dx = \dfrac{1}{2}du$

であり x と u との対応は

x	$0 \Longrightarrow 2$
u	$1 \Longrightarrow 5$

となる。よって

$$\int_{0}^{2} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int_{x=0}^{x=2} \frac{1}{x^2+1} \times x\,dx = \int_{u=1}^{u=5} \frac{1}{u} \times \frac{1}{2}\,du = \left[\frac{1}{2}\log|u|\right]_{u=1}^{u=5}$$

$$= \frac{1}{2}\log 5 - \frac{1}{2}\log 1 = \frac{1}{2}\log 5$$

問　次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{0}^{1} x(x^2+2)^3 dx$

(2) $\displaystyle\int_{0}^{3} x e^{x^2} dx$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{x^2}{x^3+2} dx$

(4) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x}{(x^2+1)^3} dx$

< 定積分の置換積分法 (3) >

例題 $\displaystyle\int_1^2 x(2-x)^4\,dx$ を求めよ。

(解) $u = 2-x$ 　とおくと

$\dfrac{du}{dx} = -1$ より　$dx = -du = (-1)du$

x と u との対応は右のようになる。

$$\begin{array}{c|ccc} x & 1 & \to & 2 \\ \hline u & 1 & \to & 0 \end{array}$$

したがって

$$\int_1^2 x(2-x)^4\,dx = \int_1^0 (2-u)u^4(-1)\,du = \int_1^0 (u^5 - 2u^4)\,du$$

$$= \left[\frac{u^6}{6} - \frac{2}{5}u^5\right]_1^0 = 0 - \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{5}\right) = \frac{7}{30}$$

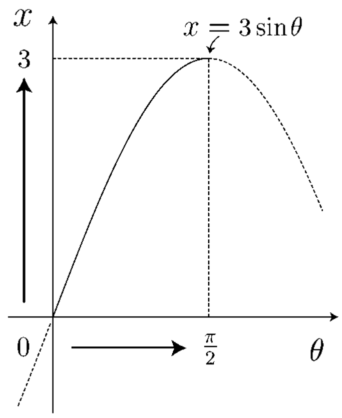
問　次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 x(1-x)^7 dx$

(2) $\displaystyle\int_2^5 x\sqrt{x-1}\,dx$

＜定積分の置換積分法 (4) ＞

例題　$\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ を求めよ。



(解)　$x = 3\sin\theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta} = 3\cos\theta \quad \Rightarrow \quad dx = 3\cos\theta\,d\theta$$

となる。x と θ の対応は

x	$0 \to 3$
θ	$0 \to \dfrac{\pi}{2}$

となる。また $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲では $\cos\theta \geqq 0$ より

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(3\sin\theta)^2} = \sqrt{9\cos^2\theta} = 3\cos\theta$$

従って

$$\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos\theta)\,3\cos\theta\,d\theta = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,d\theta$$

$$= 9\left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9\pi}{4}$$

問　$a > 0$ とする。次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx =$

(2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx =$

< 定積分の部分積分法 (1) >

不定積分の部分積分の公式

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

から定積分の部分積分の公式

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\ dx}$$

が得られる。

例

$$\int_0^5 x(x-5)^2\,dx = \int_0^5 x \times \left\{ \frac{(x-5)^3}{3} \right\}' dx$$

$$= \left[x \times \frac{(x-5)^3}{3}\right]_0^5 - \int_0^5 (x)' \times \frac{(x-5)^3}{3}\,dx = 0 - 0 - \int_0^5 \frac{(x-5)^3}{3}\,dx$$

$$= -\left[\frac{(x-5)^4}{12}\right]_0^5 = -\left\{ \frac{0^4}{12} - \frac{(-5)^4}{12} \right\} = -\frac{625}{12}$$

(注)　定積分の部分積分の公式を次のように覚えると使いやすい。

$$\int_a^b 左 \times 右\ dx = \Big[\ (左) \times (右の積分)\ \Big]_a^b - \int_a^b (左の微分) \times (右の積分)\ dx$$

問　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 x(x-1)^3\,dx =$

(2) $\displaystyle\int_0^\pi x\cos x\,dx =$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx =$

(4) $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx =$

< 定積分の部分積分法 (2) >

例 $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} x\log x dx = \int_1^{\sqrt{e}} \left(\frac{x^2}{2}\right)' \times \log x dx = \left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^{\sqrt{e}} - \int_1^{\sqrt{e}} \frac{x^2}{2} \times (\log x)' dx$

$$= \frac{e}{2}\log\sqrt{e} - \frac{1}{2}\log 1 - \int_1^{\sqrt{e}} \frac{x}{2}dx = \frac{e}{4} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^{\sqrt{e}} = \frac{e}{4} - \left(\frac{e}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

問　次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^{e} x\log x dx$

(2) $\displaystyle\int_1^{e} x^2\log x dx$

(3) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} x^3\log x dx$

(4) $\displaystyle\int_1^{e} \log x dx$

< 定積分の部分積分法 (3) >

例 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \times (-\cos x)' dx = \Big[x^2 \times (-\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \times (-\cos x) dx$

$$= \left(-\frac{\pi^2}{4}\cos\frac{\pi}{2} - 0\right) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \times (\sin x)' dx$$

$$= \Big[2x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x)' \sin x dx = \pi\sin\frac{\pi}{2} - 0 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x dx$$

$$= \pi + \Big[2\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi + 2\cos\frac{\pi}{2} - 2\cos 0 = \pi - 2$$

問 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin(2x) dx$

< 定積分の練習 (1) >

問　次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{3} dx$

(2) $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x}$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt[3]{x}dx$

(4) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} (3\sin x - 4\cos x)dx$

(5) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2}dx$

(6) $\displaystyle\int_{1}^{9} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

(7) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$

(8) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{1}{3x+1}dx$

(9) $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{dx}{x^2 - 1}$

(10) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin 2x \cos x dx$

(11) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$

(12) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(2x)dx$

(13) $\displaystyle\int_{-2}^{2} e^{3x-1}dx$

(14) $\displaystyle\int_{-1}^{1} xe^{-x^2}dx$

＜ 定積分の練習 (2) ＞

問　次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(3x+1)^5}dx$

(2) $\displaystyle\int_1^{10} \sqrt{5x-1}dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{(x^3+1)^4}dx$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x}{x^2+1}dx$

(5) $\displaystyle\int_0^1 x(x+1)^4 dx$

(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$

(7) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x dx$

(8) $\displaystyle\int_e^{e^2} \log x dx$

(9) $\displaystyle\int_{-1}^1 xe^x dx$

(10) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\cos x dx$

< 和の記号 $\sum$ >

数列の和を表すのに，記号 $\sum$ を使って次のように表す。

$$a_j + a_{j+1} + a_{j+2} + \cdots + a_n = \sum_{k=j}^{n} a_k$$

例 1　$\displaystyle\sum_{k=1}^{5} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$　，　$\displaystyle\sum_{k=2}^{4} k^3 = 2^3 + 3^3 + 4^3$

$\displaystyle 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 100^2 = \sum_{k=1}^{100} k^2$　，　$\displaystyle 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k$

問 1　次の和を記号 $\sum$ を使って表せ。

(1) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$

(2) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2$

(3) $1 + 2 + 3 + \cdots + n$

(4) $\dfrac{1^2}{n^2} + \dfrac{2^2}{n^2} + \dfrac{3^2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n^2}{n^2}$

記号 $\sum$ の定義から次の公式が得られる。

$$\text{①}\ \sum_{k=1}^{n} 1 = n,\quad \text{②}\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},\quad \text{③}\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\quad \text{④}\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

例 2　$\displaystyle 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2 = \sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 385$

例 3　$\displaystyle \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{kx}{n}\right)^3 \frac{x}{n} = \left(\sum_{k=1}^{n-1} k^3\right) \frac{x^4}{n^4} = \left\{\frac{(n-1)n}{2}\right\}^2 \times \frac{x^4}{n^4} = \frac{(n-1)^2}{4n^2} x^4$

問 2　次の和を求めよ。

(1) $1 + 2 + 3 + \cdots + 1000$

(2) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2$

(3) $\dfrac{1^2}{n^3} + \dfrac{2^2}{n^3} + \dfrac{3^2}{n^3} + \cdots + \dfrac{n^2}{n^3}$

(4) $\displaystyle \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n}$

(5) $\displaystyle \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^3 \times \frac{1}{n}$

(6) $\displaystyle \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{kx}{n}\right)^2 \times \frac{x}{n}$

＜和の極限値＞

例 $$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{n^2}{n^3}\right\}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2\right)\times\frac{1}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\times\frac{1}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

問 次の極限値を求めよ。ただし x は定数である。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right\}$

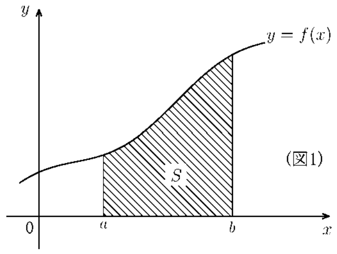
(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^3\times\frac{1}{n}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{kx}{n}\right)^2\times\frac{x}{n}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{kx}{n}\right)^3\times\frac{x}{n}$

< 区分求積法 (1) >

曲線で囲まれた領域の面積を求める方法の 1 つとして以下で述べる区分求積法を紹介する。関数 $f(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ の範囲で正 $(f(x) > 0)$ でかつ増加関数とする。図 1 の斜線部分の面積 S を求めたい。



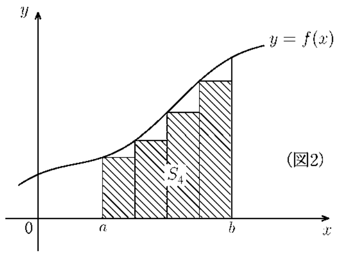
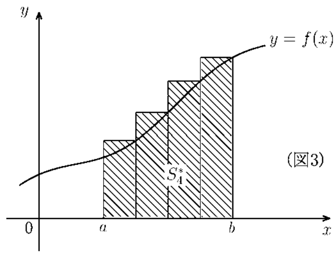


図 2 と図 3 は a から b までを 4 等分して階段状の領域 (斜線部分) の面積を S_4 と S_4^* とする。図より

$$S_4 < S < S_4^*$$

である。



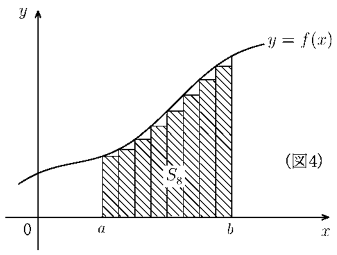
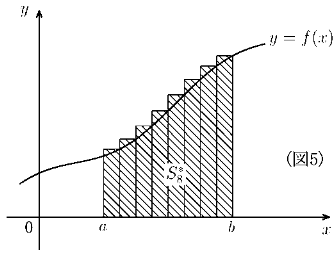


図 4 と図 5 は a から b までを 8 等分し，斜線部分の面積を S_8 と S_8^* とする。図より

$$S_4 < S_8 < S < S_8^* < S_4^*$$

である。



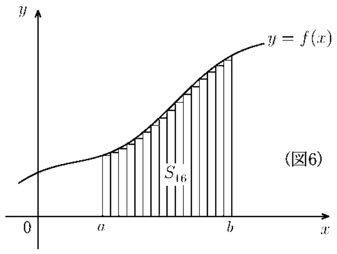
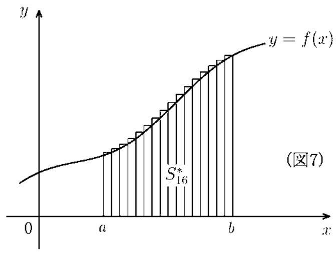


図 6 と図 7 は a から b までを 16 等分し，階段状の領域の面積を S_{16} と S_{16}^* とする。図より

$$S_8 < S_{16} < S < S_{16}^* < S_8^*$$

である。



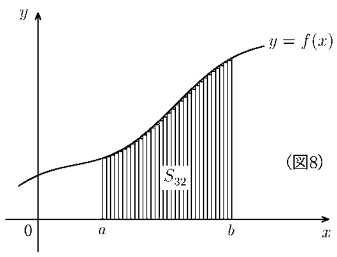
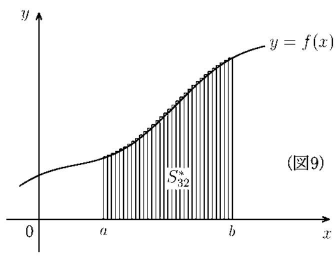


図 8 と図 9 は a から b までを 32 等分し，階段状の領域の面積を S_{32} と S_{32}^* とする。図より

$$S_{16} < S_{32} < S < S_{32}^* < S_{16}^*$$

である。



以上より $S_4 < S_8 < S_{16} < S_{32} < S < S_{32}^* < S_{16}^* < S_8^* < S_4^*$ である。面積 S に最も近いのが S_{32} と S_{32}^* である。等分を細かくしていくほど S に近い値がわかる。そこで a から b までを n 等分し，階段状の領域を作り，その面積を S_n と S_n^* とおくと

$$S_1 < S_2 < \cdots < S_n < \cdots < S < \cdots < S_n^* < \cdots < S_2^* < S_1^*$$

となり極限をとると

$$\lim_{n\to\infty} S_n \leqq S \leqq \lim_{n\to\infty} S_n^*$$

である。この両方の極限が一致する時面積 S が求まる。この方法を**区分求積法**という。

< 区分求積法 (2) >

例　曲線 $y = x^2$ と x 軸および直線 $x = 1$ とで囲まれた領域の面積 S(図 1) を求めたい。前ページの区分求積法を適用する。0 から 1 までを n 等分し，分割した分点を

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$$

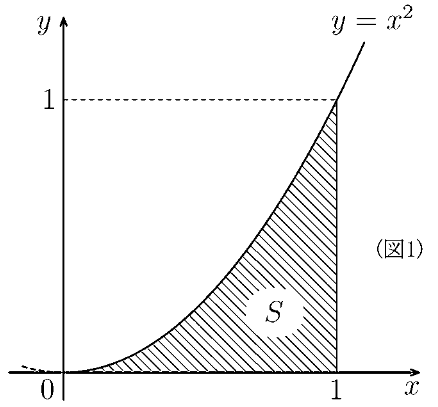
とする。分割した小区間の幅は $\dfrac{1}{n}$ だから

$$x_1 = \frac{1}{n}\ ,\ x_2 = \frac{2}{n}, \cdots\ ,\ x_{n-1} = \frac{n-1}{n}, \quad x_n = \frac{n}{n}$$

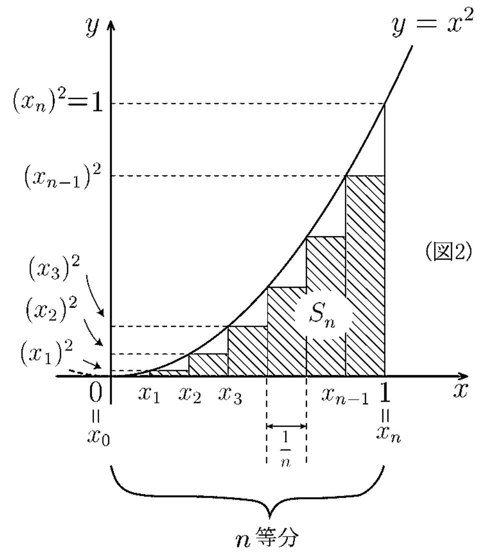
となる。図 2 の斜線部分の面積を S_n とすると

$$S_n = (x_1)^2 \times \frac{1}{n} + (x_2)^2 \times \frac{1}{n} + \cdots + (x_{n-1})^2 \times \frac{1}{n}$$

である。



(図1)



(図2)

問 1　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^2$ の公式を用いて，S_n を n だけの式で表せ。

問 2　次の値を求めよ。

$S_1 =$　　　　　　　　，$S_2 =$　　　　　　　　，$S_3 =$

問 3　S_n の極限値を求めよ。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n =$

< 区分求積法 (3) >

問　前ページの図 1 の斜線部分の面積 S を求めたい。以下の問に答えよ。

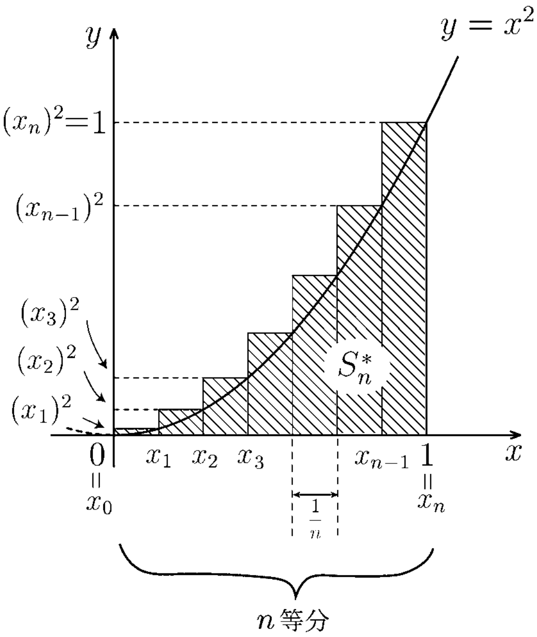
区間 $[0,\ 1] = \{x : 0 \leqq x \leqq 1\}$ を n 等分した分点を

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$$

とおくと

$$x_k = \frac{k}{n} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

となる。これに対し，右図斜線部分の面積を S_n^* とおく。



(1)　S_n^* を n だけの式で表せ。

(2)　次の値を求めよ。

$S_1^* =$　　　　　　　　，$S_2^* =$　　　　　　　　，$S_3^* =$

(3)　S_n^* の極限値を求めよ。

$\lim_{n\to\infty} S_n^* =$

(4)　前ページ図 2 の S_n に対し $S_n < S < S_n^*$ であるから

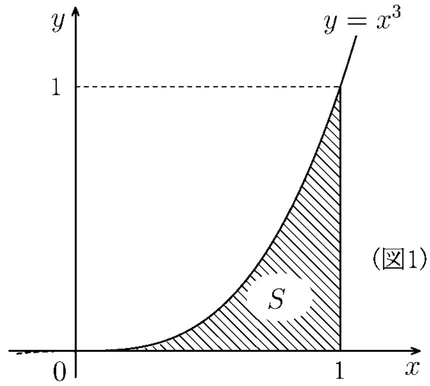
$$\lim_{n\to\infty} S_n \leqq S \leqq \lim_{n\to\infty} S_n^*$$

である。前ページの問 3 と上の (5) の結果を用いて S の値を求めよ。

$S =$

< 区分求積法 (4) >

図 1 の斜線部分の面積 S を求めたい。以下の問に答えよ。



(図1)

問 1　0 から 1 を n 等分し，分点を $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$ とする。図 2 の斜線部分の面積 S_n は

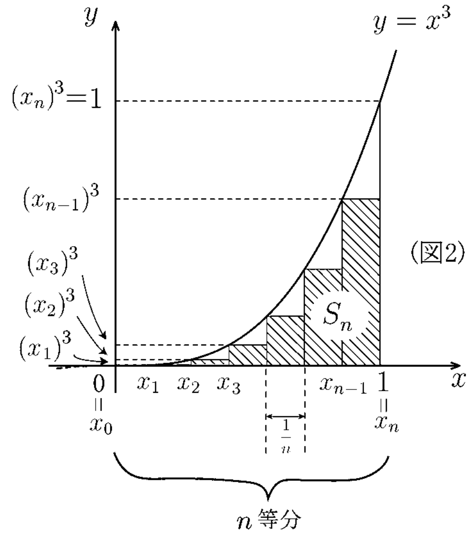
$$S_n = (x_1)^3 \times \frac{1}{n} + (x_2)^3 \times \frac{1}{n} + \cdots + (x_{n-1})^3 \times \frac{1}{n}$$

である。

(1)　S_n を n だけの式で表せ。

(2)　S_n の極限値を求めよ。

$\lim_{n\to\infty} S_n =$



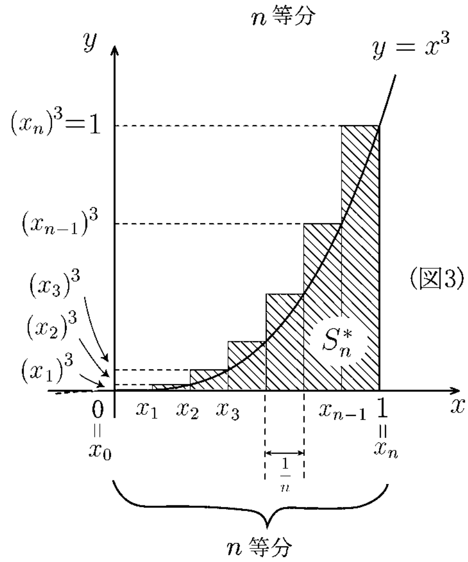
(図2)

問 2　図 3 の斜線部分の面積を S_n^* とする。

S_n^* を n だけの式で表し，その極限値を求めよ。

$S_n^* =$

$\lim_{n\to\infty} S_n^* =$



(図3)

問 3　図 1 の斜線部分の面積 S に対し，図 2 と図 3 より $S_n < S < S_n^*$ であるから

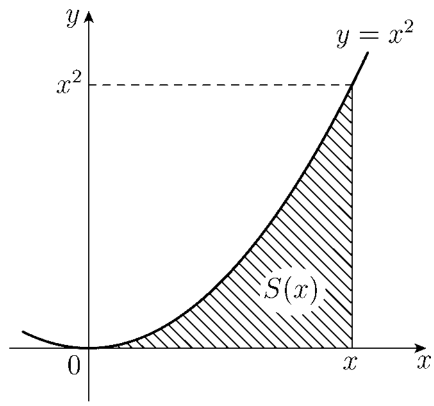
$$\lim_{n\to\infty} S_n \leqq S \leqq \lim_{n\to\infty} S_n^*$$

である。S の値を求めよ。

$S =$

< 区分求積法 (5) >

図 1 の斜線部分の面積 $S(x)$ を求めたい。



(図 1)

問 1　0 から x までを n 等分し，分割した分点を

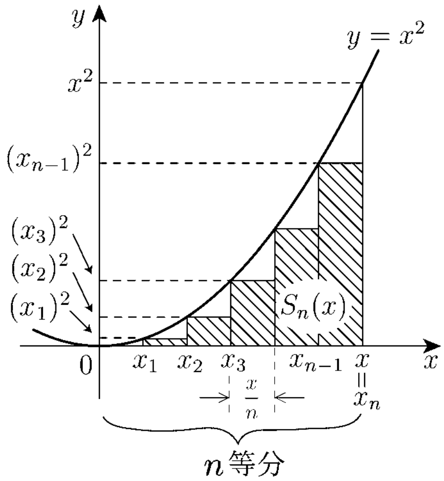
$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = x$$

とする。分割した小区間の幅は $\dfrac{x}{n}$ であるから

$$x_1 = \frac{x}{n},\ \ x_2 = \frac{2x}{n},\ \ \cdots,\ \ x_n = \frac{nx}{n}$$

となる。

(1)　図 2 の斜線部分の面積を $S_n(x)$ とする。
$S_n(x)$ を n と x だけの式で表せ。



(図 2)

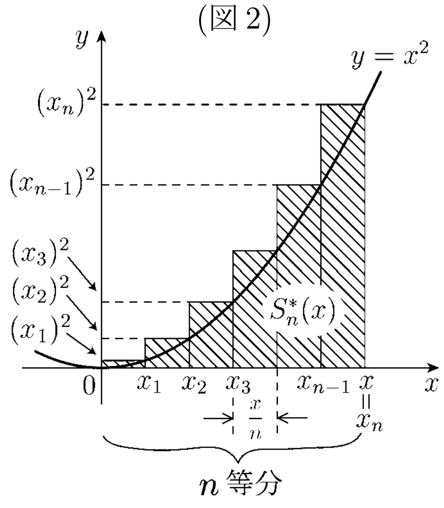
(2)　$S_n(x)$ の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) =$$

問 2　図 3 の斜線部分の面積を $S_n^*(x)$ とする。

(1)　$S_n^*(x)$ を n と x だけの式で表せ。

$S_n^*(x) =$



(図 3)

(2)　$S_n^*(x)$ の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} S_n^*(x) =$$

問 3　図より $S_n(x) < S(x) < S_n^*(x)$ であるから

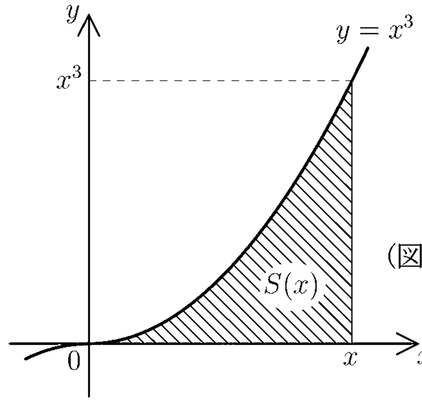
$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) \leqq S(x) \leqq \lim_{n\to\infty} S_n^*(x)$$

である。$S(x)$ を求めよ。

$S(x) =$

< 区分求積法 (6) >

図 1 の斜線部分の面積 $S(x)$ を求めたい。



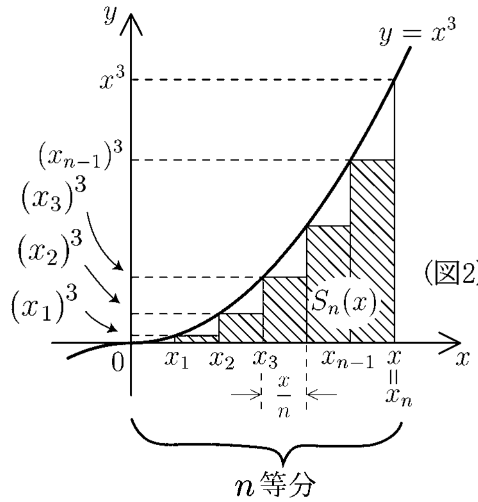
(図1)

問 1　0 から x までを n 等分し，分割した分点を

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = x$$

とする。

(1)　図 2 の斜線部分の面積を $S_n(x)$ とする。
$S_n(x)$ を n と x だけの式で表せ。



(図2)

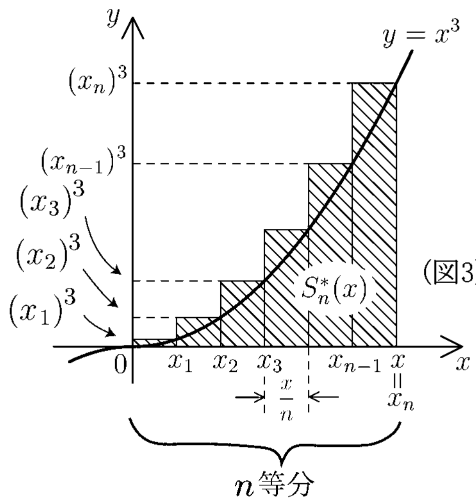
(2)　$S_n(x)$ の極限値を求めよ。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n(x) =$

問 2　図 3 の斜線部分の面積を $S_n^*(x)$ とする。

(1)　$S_n^*(x)$ を n と x だけの式で表せ。

$S_n^*(x) =$



(図3)

(2)　$S_n^*(x)$ の極限値を求めよ。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n^*(x) =$

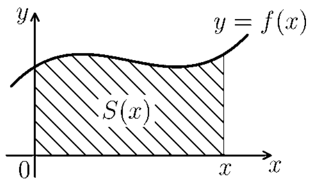
問 3　図より $S_n(x) < S(x) < S_n^*(x)$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) \leqq S(x) \leqq \lim_{n\to\infty} S_n^*(x)$$

である。$S(x)$ を求めよ。

$S(x) =$

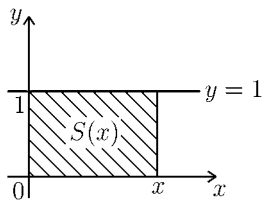
< 面積関数 (1) >



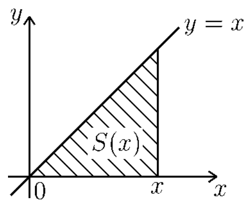
正の値をとる関数 $f(x)$ に対し，右図の斜線部分の面積を $S(x)$ とする。

問 1 下図を参考にして，次の場合の $S(x)$ を求めよ。

(1) $f(x)=1$ のとき $S(x)=$

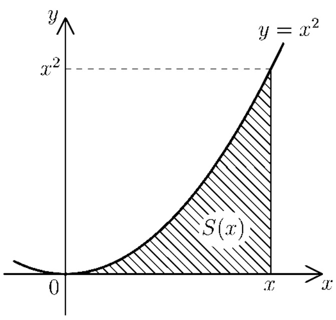


(2) $f(x)=x$ のとき $S(x)=$

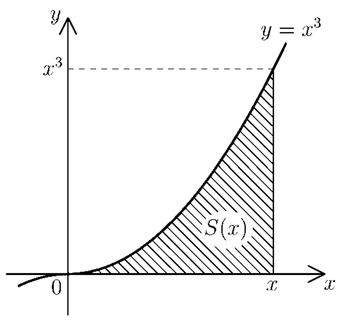


問 2 下図と 37，38 ページの結果を参考にして，次の場合の $S(x)$ を求めよ。

(1) $f(x)=x^2$ のとき $S(x)=$



(2) $f(x)=x^3$ のとき $S(x)=$



問 3 上記の結果を参考にして，次の場合の $S(x)$ を類推せよ。

(1) $f(x)=x^4$ のとき $S(x)=$

(2) $f(x)=x^n$ のとき $S(x)=$

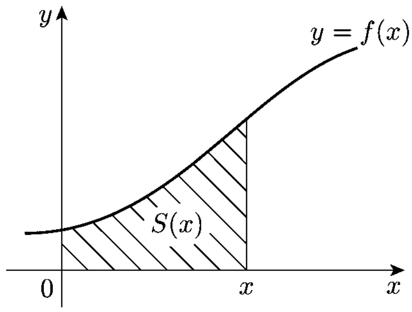
問 4 上の結果から考えて，一般の正の関数 $f(x)$ に関する面積関数を $S(x)$ とするとき，$f(x)$ と $S(x)$ にはどんな関係があるか類推せよ。

< 面積関数 (2) >

　正の値をとる関数 $f(x)$ に対し，右図の斜線部分の面積を $S(x)$ とすると

$$(*) \quad \boxed{S'(x) = f(x)}$$

が成り立つ。



(図 1)

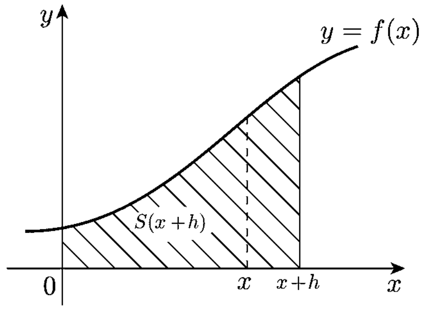
[証明のアイデア]

関数 $f(x)$ が**単調増加**すなわち

$$\boxed{x_1 < x_2 \text{ のとき } f(x_1) < f(x_2)}$$

であるとき (∗) を証明する。
導関数の定義より

$$S'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h}$$



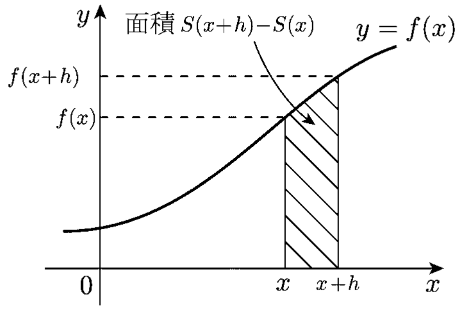
(図 2)

である。ここで $S(x+h) - S(x)$ は図 3 の斜線部分の面積を意味する。図 4 の 2 つの長方形の面積と比べると

$$f(x) \times h \leqq S(x+h) - S(x) \leqq f(x+h) \times h$$

であるから

$$f(x) \leqq \frac{S(x+h) - S(x)}{h} \leqq f(x+h)$$



(図 3)

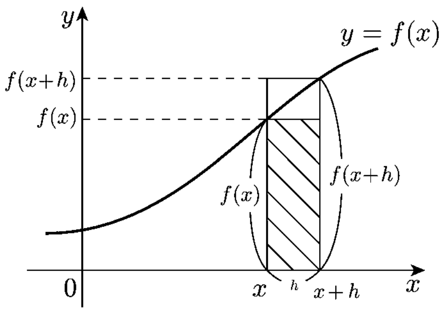
となる。ここで $h \to 0$ の極限値を考えると

$$f(x) \leqq \lim_{h \to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} \leqq \lim_{h \to 0} f(x+h)$$

であるから

$$f(x) \leqq S'(x) \leqq f(x)$$

となって (∗) が成立する。

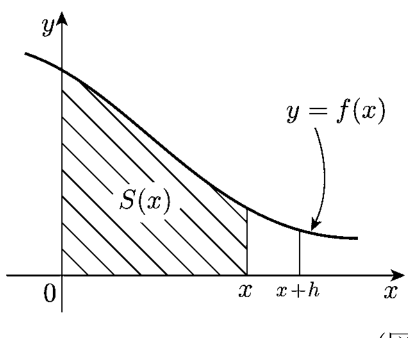


(図 4)

問　$f(x)$ が**単調減少**すなわち

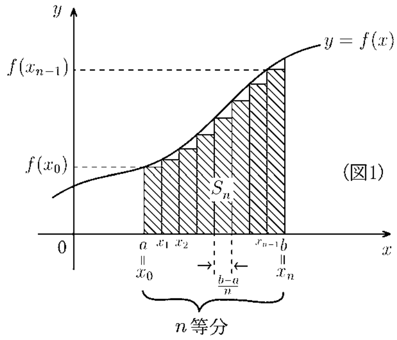
$$\boxed{x_1 < x_2 \text{ のとき } f(x_1) > f(x_2)}$$

　であるとき (図 5),「$S'(x) = f(x)$」を証明せよ。



(図 5)

< 区分求積法による定積分の特徴付け >



(図1)

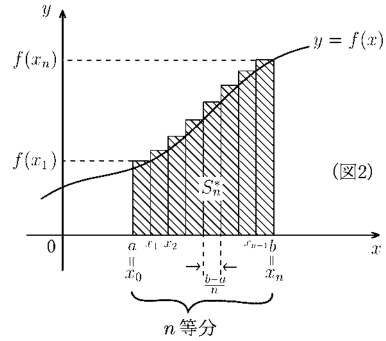
定数 a, b $(a < b)$ に対し、区間 $[a, b] = \{x : a \leqq x \leqq b\}$ を n 等分した分点を

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

とおくと

$$\boxed{x_k = a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

となる。$[a, b]$ で連続な関数 $f(x)$ に対し、



(図2)

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \times \left(\frac{b-a}{n}\right) = \big\{f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\big\}\frac{b-a}{n}$$

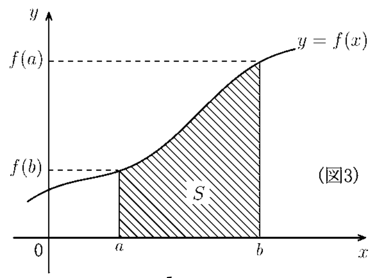
$$S_n^* = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \times \left(\frac{b-a}{n}\right) = \big\{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\big\}\frac{b-a}{n}$$

とおく。

[定理 1]　次の極限値が両方とも存在する。

$$\lim_{n\to\infty} S_n \qquad , \qquad \lim_{n\to\infty} S_n^*$$

(証明略)



(図3)

[定理 2]　$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_n^*}$

(証明) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}(S_n^* - S_n) = \lim_{n\to\infty}\big\{f(x_n) - f(x_0)\big\}\frac{b-a}{n} = \lim_{n\to\infty}\big\{f(b) - f(a)\big\}\frac{b-a}{n} = 0$

よって定理 2 が示された。

[定理 3]　定理 2 の極限値は $f(x)$ の a から b までの定積分の値に等しい。

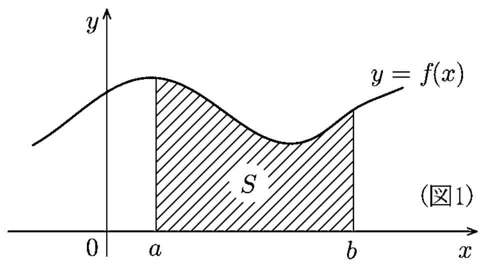
$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\left(\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\left(\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx}$$

(証明略)

(注 1)　定理 3 を「区分求積法による定積分の特徴付け」ということにする。

(注 2)　$f(x)$ が正 $\big(f(x) > 0\big)$ で増加関数のとき、S_n と S_n^* は図 1 と図 2 の斜線部分の面積を表す。図 3 の斜線部分の面積を S とすると $S_n \leqq S \leqq S_n^*$ である。従って $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n \leqq S \leqq \lim_{n\to\infty} S_n^*$ である。定理 2 より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_n^* = S$。従って $f(x)$ が正で増加関数の場合は定理 3 より $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = S$ がわかる。$f(x)$ が減少関数の場合も同様である。一般の連続関数は増加関数と減少関数の和として表される。

＜ 面積 (1) ＞



(図1)

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ の場合に a から b までの定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ の値は図 1 の斜線部分の面積 S の値を表す。

$$(*)\quad \boxed{S=\int_a^b f(x)dx}$$

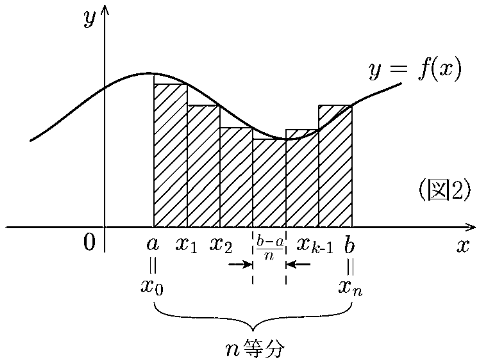
＜ (∗) 式の概略 ＞

区分求積法による定積分の特徴付けより

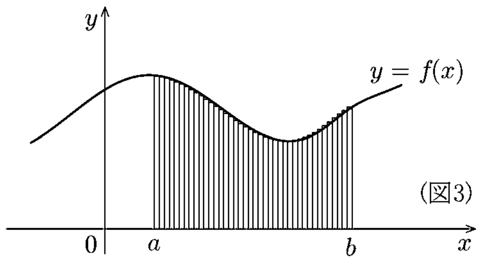
$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\frac{b-a}{n}\quad \left(x_k=a+k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

において $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\frac{b-a}{n}$ は図 2 の斜線部分の面積である。n が限りなく大きくなると図 3 のようになり，図 1 の面積 S に近づく。すなわち

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\frac{b-a}{n}=S$$



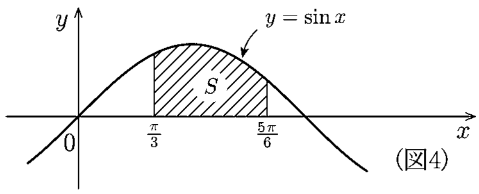
(図2)



(図3)

例　曲線 $y=\sin x$ と 2 直線 $x=\dfrac{\pi}{3}$ と $x=\dfrac{5\pi}{6}$ および x 軸で囲まれる部分の面積 S(図 4) を求める。

$$S=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{6}\pi}\sin x dx=\Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{6}\pi}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$



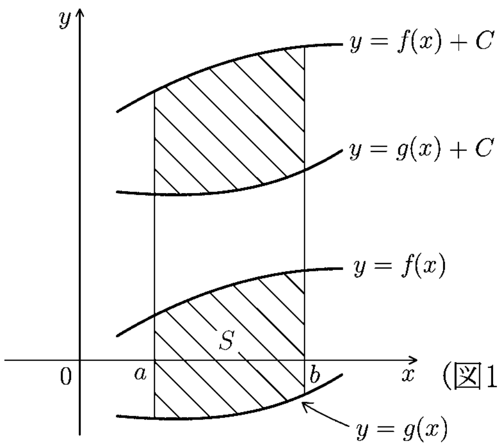
(図4)

問　次の曲線と 2 直線および x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。

(1)　$y=e^x$，$x=0$，$x=1$　　(2)　$y=\sqrt{x}$，$x=1$，$x=9$

(3)　$y=\dfrac{1}{x^2}$，$x=1$，$x=2$　　(4)　$y=\dfrac{1}{x}$，$x=1$，$x=2$

< 面積 (2) >



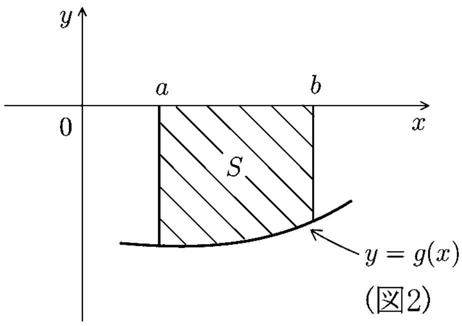
(図1)

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq g(x)$ である場合，2 曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ と 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれる部分の面積 S は

$$(*)\quad \boxed{S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx}$$

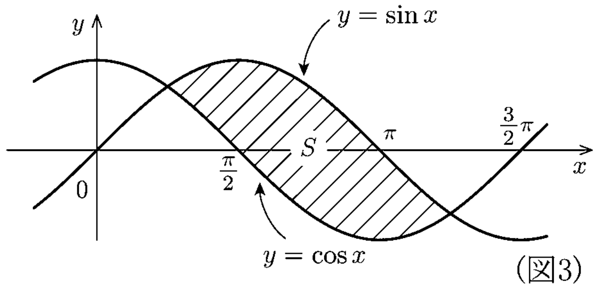
< 証明略 >

問 1　$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $g(x) < 0$ の場合，曲線 $y = g(x)$ と 2 直線 $x = a$，$x = b$ および x 軸で囲まれる部分の面積 S を $g(x)$ に関する定積分で表せ。



(図2)

問 2　図 3 の斜線部分の面積 S を求めよ。



(図3)

問 3　次の曲線や直線で囲まれる部分の面積を求めよ。

(1)　$y = \sqrt{x}$，$y = x^2$

(2)　$y = \dfrac{1}{x}$，$y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4}$

< 面積 (3) >

例　半径 3 の円の面積 S を求めたい。原点を中心として半径 3 の円の方程式は

$$x^2+y^2=9$$

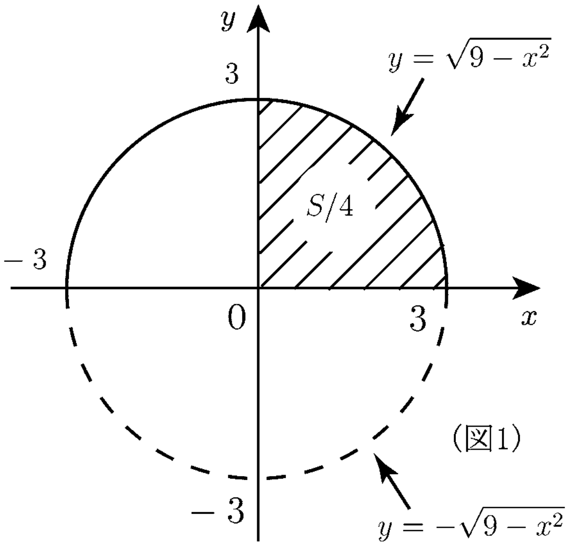
である。y について解くと

$$y=\pm\sqrt{9-x^2}$$

である。これは円を上半円 $(y=\sqrt{9-x^2})$ と下半円 $(y=-\sqrt{9-x^2})$ に分けたものである。従って $\dfrac{1}{4}$ 円の面積は

$$S/4=\int_0^3\sqrt{9-x^2}dx$$

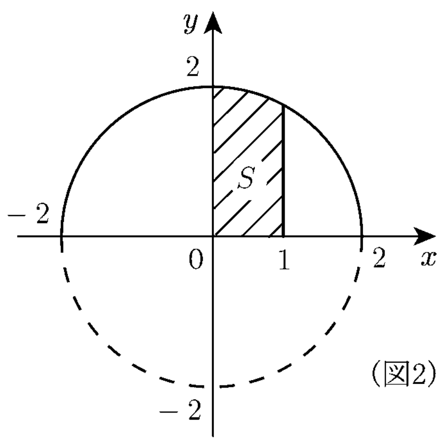
である。25 ページ例題より $\displaystyle\int_0^3\sqrt{9-x^2}dx=\frac{9\pi}{4}$。 よって (答) $\underline{S=9\pi}$



(図1)

問 1　半径 a の円の面積を求めよ。

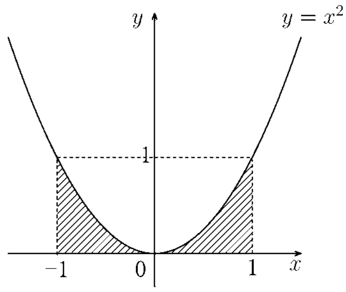
問 2　図 2 の斜線部分の面積 S を求めよ。



(図2)

＜偶関数・奇関数の定積分＞

例 1　$\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}\times 1^3 - \frac{1}{3}\times(-1)^3 = \frac{1}{3}+\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$



(注) 定積分の幾何学的意味より、$\int_{-1}^{1} x^2dx$ は右図斜線部分の面積を表す。$y=x^2$ は y 軸対象だから左右の面積が等しいので

$$\int_{-1}^{0} x^2dx = \int_{0}^{1} x^2dx$$

となるから

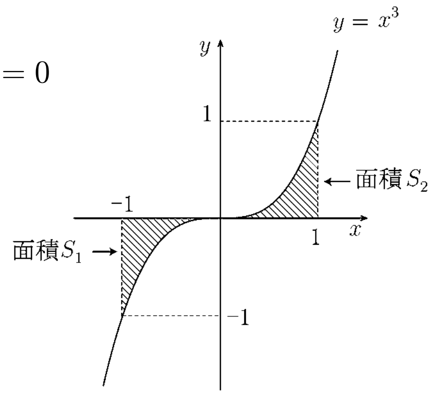
$$\int_{-1}^{1} x^2dx = \int_{-1}^{0} x^2dx + \int_{0}^{1} x^2dx = 2\int_{0}^{1} x^2dx = 2\times\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{1} = 2\times\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

一般に $f(x)=x^{2n}$ (n は自然数) のときは $f(-x)=f(x)$ (y 軸対称) になる。
このような関数 $f(x)$ を**偶関数**といい、

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx}\quad \Big(f(x)\text{ は偶関数}\Big)$$

がなりたつ。

例 2　$\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\times 1^4 - \frac{1}{4}\times(-1)^4 = \frac{1}{4}-\frac{1}{4} = 0$



(注) 右図斜線部分の面積を S_1 と S_2 とおくと

$$\int_{-1}^{0} x^3dx = -S_1,\quad \int_{0}^{1} x^3dx = S_2$$

より

$$\int_{-1}^{1} x^3dx = \int_{-1}^{0} x^3dx + \int_{0}^{1} x^3dx = -S_1+S_2$$

となる。一方 $y=x^3$ は原点対称だから $S_1=S_2$ より

$$\int_{-1}^{1} x^3dx = 0$$

一般に $f(x)=x^{2n-1}$ (n は自然数) のときは $f(-x)=-f(x)$ (原点対称) になる。
このような関数 $f(x)$ を**奇関数**といい

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0}\quad \Big(f(x)\text{ は奇関数}\Big)$$

がなりたつ。

例 3　$\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^3+x^4)d = \int_{-1}^{1} x^3dx + \int_{-1}^{1} x^4dx = 0 + 2\int_{0}^{1} x^4dx = 2\times\frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

問　次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^3+x^4+x^5)dx =$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x+x^3+x^6)dx =$

(3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x+\cos x)dx =$

(4) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x}+\tan x\right)dx =$

< 定積分の応用問題 >

問 1 次の和を求めよ。

(1) $1+2+3+\cdots+100$　(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+20^2$　(3) $1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3$

問 2 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)\times\frac{1}{n}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\times\frac{1}{n}$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\times\frac{1}{n}$

問 3 区分求積法による定積分の特徴付けを用いて、次の極限値を定積分で表せ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)\times\frac{b-a}{n}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\times\frac{1}{n}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\times\frac{1}{n}$

問 4 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x+x^2+x^3+x^4+x^5)dx$

(2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(\sin x+\cos x+\tan x)dx$

問 5 次の面積を求めよ。ただし $a>0$ である。

(1) 曲線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ と x 軸および 2 直線 $x=1$ と $x=4$ で囲まれた部分

(2) 曲線 $y=-x^2+3$ と $y=x^2-2x-1$ で囲まれた部分の面積

(3) $y=x^3$ と $y=x$ で囲まれた部分の面積

(4) $y=\log x$ と x 軸および直線 $x=e$ で囲まれた部分の面積

< 関数の極限 >

例 1 $\displaystyle \lim_{x\to 3}\frac{x^3-8}{x-2}=\frac{27-8}{3-2}=19$

例 2 $\displaystyle \lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)=12$

例 3 $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^3+x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^3+x^2+x+1)=4$

(注) 初項 a^{n-1} , 公比 $\frac{b}{a}$ の等比数列の和の公式より

$$a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+a^{n-4}b^3+\cdots+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1}=\frac{a^n-b^n}{a-b}$$

よって

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+a^{n-4}b^3+\cdots+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

例 4 $\displaystyle \lim_{x\to 3}\frac{x^5-3^5}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^4+x^3\times 3+x^2\times 3^2+x\times 3^3+3^4)}{x-3}$

$$=\lim_{x\to 3}(x^4+3x^3+9x^2+27x+81)=81\times 5=405$$

問 次の関数の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{x^2-16}{x-4}$

(2) $\displaystyle \lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}$

(3) $\displaystyle \lim_{x\to 2}\frac{x^3-27}{x-3}$

(4) $\displaystyle \lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}$

(5) $\displaystyle \lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}$

(6) $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x-1}$

< ロピタルの定理 (1) >

関数 $f(x)$ と $g(x)$ の $x=a$ における微分係数は

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad , \qquad g'(a)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

である。もし $f(a)=g(a)=0$, $g'(a)\neq 0$ のときは

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

となるので

$$\boxed{\begin{array}{c} f(a)=g(a)=0 \\ \left(\frac{0}{0}\ \text{の型}\right)\end{array} \ \text{のとき}\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}} \qquad \text{(ロピタルの定理)}$$

が成り立つ。これを**ロピタルの定理**という。

例 1 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x-1}$ を求めたい。 $x=1$ を代入すると $\dfrac{0}{0}$ の型になる。分子を因数分解して

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^4+x^3+x^2+x+1)=5$$

と計算するが、この因数分解は難しい。ロピタルの定理を使うと以下のように求まる。

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^5-1)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{5x^4}{1}=5\times 1^4=5$$

例 2 $\displaystyle\lim_{x\to e}\frac{\log x-1}{x-e}$ を求めたい。 $x=e$ を代入すると分母・分子共に 0 となるので

ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to e}\frac{\log x-1}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{(\log x-1)'}{(x-e)'}=\lim_{x\to e}\frac{\frac{1}{x}-0}{1-0}=\lim_{x\to e}\frac{1}{x}=\frac{1}{e}$$

問　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

＜ ロピタルの定理 (2) ＞

前ページより $f(a)=0$, $g(a)=0$, $g'(a)\neq 0$ のとき

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}} \qquad \text{(ロピタルの定理)}$$

がなり立つと書いたが正確には右辺の極限 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば $g'(a)=0$ であってもロピタルの定理はなりたつ。

例 1 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^6-6x+5}{(x-1)^2}$ を求めたい。 $x=1$ を代入すれば $\dfrac{0}{0}$ の形になるので

ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^6-6x+5}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^6-6x+5)'}{\left((x-1)^2\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{6x^5-6}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1}3\times\frac{x^5-1}{x-1}$$

となるが、最後の式は前ページ例 1 の結果 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x-1}=5$ より

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^6-6x+5}{(x-1)^2}=3\times\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x-1}=3\times 5=15$$

(注) 極限が $\dfrac{0}{0}$ の形であればロピタルの定理が何度でも使える。

上の例 1 は次のように計算してよい。

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^6-6x+5}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^6-6x+5)'}{\left((x-1)^2\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{6x^5-6}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(6x^5-6)'}{\left(2(x-1)\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{30x^4}{2}=15$$

例 2 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$

問 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1-5(x-1)}{(x-1)^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^5-32-80(x-2)}{(x-2)^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1-4(x-1)-6(x-1)^2}{(x-1)^3}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1-5(x-1)-10(x-1)^2-10(x-1)^3}{(x-1)^4}$

< 微分記号 >

変数 x の関数 $f(x)$ の導関数

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

を以下の記号で表す。

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}\{f(x)\}$$

全て同じ意味である。ここで $\dfrac{d}{dx}$ という記号は「変数 x で微分する」という意味である。

例　定数 a, b, c に対し次式が成り立つ。

(1) $\dfrac{d}{dx}(a) = 0$　　(2) $\dfrac{d}{dx}(ax+b) = a$

(3) $\dfrac{d}{dx}(ax^2+bx+c) = 2ax+b$　　(4) $\dfrac{d}{dx}\{(ax+b)^3\} = 3a(ax+b)^2$

(5) $\dfrac{d}{dx}(a^3x^5) = 5a^3x^4$　　(6) $\dfrac{d}{dx}\{2a^3(x-a)^4\} = 8a^3(x-a)^3$

(注) (1) のように x のついていない項を微分すると 0(ゼロ) になる。

問　定数 a, b, c に対し次の導関数を求めよ。

(1) $\dfrac{d}{dx}\{a^3+b^4+c^2\}$　, (2) $\dfrac{d}{dx}\{a^3+b^4x+c^5x^2\}$

(3) $\dfrac{d}{dx}\{(a+b)^3-c^4\}$　, (4) $\dfrac{d}{dx}\{(a-b)^2x-c^3\}$

(5) $\dfrac{d}{dx}\{a^4(x-b)\}$　, (6) $\dfrac{d}{dx}\{a^3(x+c)^2\}$

(7) $\dfrac{d}{dx}\{(ax+b)^4\}$　, (8) $\dfrac{d}{dx}\{(x-a)^5\}$

(9) $\dfrac{d}{dx}\{a^3(x-a)^3\}$　, (10) $\dfrac{d}{dx}\{4a^3(x-b)^4\}$

(11) $\dfrac{d}{dx}\{x^2-a^2-2a(x-a)\}$

(12) $\dfrac{d}{dx}\{x^3-a^3-3a^2(x-a)-6a(x-a)^2\}$

＜ロピタルの定理 (3)＞

ロピタルの定理を微分記号 $\frac{d}{dx}$ を用いて書きなおすと以下のようになる。

＜ロピタルの定理＞

関数　$f(x)$　,　$g(x)$　と定数 a に対して、

$$f(a)=0 \quad , \quad g(a)=0$$

でありかつ極限値

$$\lim_{x\to a}\frac{\frac{d}{dx}f(x)}{\frac{d}{dx}g(x)} \quad = \quad \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が存在すれば

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \quad = \quad \lim_{x\to a}\frac{\frac{d}{dx}f(x)}{\frac{d}{dx}g(x)}$$

例　$\displaystyle \lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3-3a^2(x-a)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{d}{dx}\{x^3-a^3-3a^2(x-a)\}}{\frac{d}{dx}\{(x-a)^2\}}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{3x^2-3a^2}{2(x-a)} \qquad =\lim_{x\to a}\frac{\frac{d}{dx}\{3x^2-3a^2\}}{\frac{d}{dx}\{2(x-a)\}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{6x}{2} \quad = \quad \frac{6a}{2} \quad = \quad 3a$$

問　(1) $\displaystyle \lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2-2a(x-a)}{(x-a)^2}$

(2) $\displaystyle \lim_{x\to a}\frac{x^4-a^4-4a^3(x-a)}{(x-a)^2}$

(3) $\displaystyle \lim_{x\to a}\frac{x^5-a^5-5a^4(x-a)}{(x-a)^2}$

＜ロピタルの定理 (4)＞

例

$$\lim_{x\to a}\frac{x^5-a^5-5a^4(x-a)-10a^3(x-a)^2}{(x-a)^3}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\frac{d}{dx}\{x^5-a^5-5a^4(x-a)-10a^3(x-a)^2\}}{\frac{d}{dx}\{(x-a)^3\}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{5x^4-5a^4-20a^3(x-a)}{3(x-a)^2}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\frac{d}{dx}\{5x^4-5a^4-20a^3(x-a)\}}{\frac{d}{dx}\{3(x-a)^2\}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{20x^3-20a^3}{6(x-a)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\frac{d}{dx}\{20x^3-20a^3\}}{\frac{d}{dx}\{6(x-a)\}}=\lim_{x\to a}\frac{60x^2}{6}=10a^2$$

問　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^4-a^4-4a^3(x-a)-6a^2(x-a)^2}{(x-a)^3}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^6-a^6-6a^5(x-a)-15a^4(x-a)^2}{(x-a)^3}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^7-a^7-7a^6(x-a)-21a^5(x-a)^2-35a^4(x-a)^3}{(x-a)^4}$

< 関数の 1 次近似 >

関数 $y = f(x)$ の $x = a$ における微分係数は $f'(a) = \displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ である。

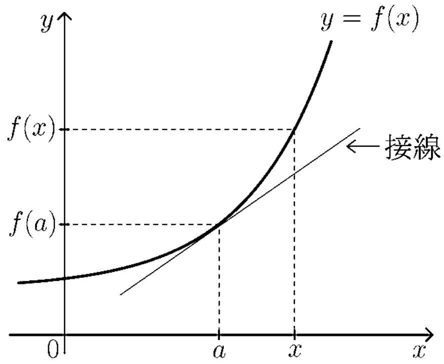
$x = a + \Delta x$ とおけば, $\Delta x \to 0$ のとき $x \to a$ より

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

である。従って、x が a に十分近いとき ($x \fallingdotseq a$ のとき)

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \fallingdotseq f'(a)$$

とみなせる。よって



$$\boxed{x \fallingdotseq a \text{ のとき } f(x) \fallingdotseq f(a) + f'(a)(x-a)}$$

が成り立つ。右辺は x の 1 次式であるから，これを $x = a$ の近くでの **1 次近似式**という。右辺の式は直線

$$\boxed{y = f(a) + f'(a)(x-a)} \qquad \text{(接線)}$$

を表すが，これは曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式である。

すなわち，曲線を接線で近似するのが一次近似式である。

例　$f(x) = x^4$ のとき $f'(x) = 4x^3$，$f(a) = a^4$，$f'(a) = 4a^3$ より

x^4 の 1 次近似式は

$$\underline{x \fallingdotseq a \text{ のとき} \quad x^4 \fallingdotseq a^4 + 4a^3(x-a)}$$

問　$f(x)$ が次の関数の場合に $x = a$ の近くでの 1 次近似式を求めよ。

(1)　$f(x) = x^6$　　　　(2)　$f(x) = \sqrt{x}$

(3)　$f(x) = \log x$　　　　(4)　$f(x) = \sin x$

(5)　$f(a) = \cos x$　　　　(6)　$f(x) = e^x$

< 関数の高次近似 (1) >

例　関数 $f(x)$ と定数 a に対し、$f(a),\ f'(a),\ f''(a)$ は定数だから

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = f'(x) \quad , \quad \frac{d}{dx}\{f(a)\} = 0$$

$$\frac{d}{dx}\{f'(x)\} = f''(x) \quad , \quad \frac{d}{dx}\{f'(a)\} = 0$$

$$\frac{d}{dx}\{f''(x)\} = f'''(x) \quad , \quad \frac{d}{dx}\{f''(a)\} = 0$$

である。これらを組み合わせると，

$$\frac{d}{dx}\{f(x) - f(a)\} = f'(x) \quad , \quad \frac{d}{dx}\{f'(x) - f'(a)\} = f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\{f'(a)(x-a)\} = f'(a) \times \frac{d}{dx}\{(x-a)\} = f'(a) \times 1 = f'(a)$$

$$\frac{d}{dx}\{f''(a)(x-a)^2\} = f''(a) \times \frac{d}{dx}\{(x-a)^2\} = f''(a) \times 2(x-a) = 2f''(a)(x-a)$$

等がわかる。

問　関数 $f(x)$ と定数 a に対して，次の導関数を求めよ。

(1) $\dfrac{d}{dx}\{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)\}$

(2) $\dfrac{d}{dx}\{f'(x) - f'(a) - f''(a)(x-a)\}$

(3) $\dfrac{d}{dx}\{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \dfrac{1}{2}f''(a)(x-a)^2\}$

(4) $\dfrac{d}{dx}\{f'(x) - f'(a) - f''(a)(x-a) - \dfrac{1}{2}f'''(a)(x-a)^2\}$

(5) $\dfrac{d}{dx}\{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \dfrac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 - \dfrac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3\}$

< 関数の高次近似 (2) >

例　関数 $f(x)$ と定数 a に対し，極限 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}$

を求めたい。$x=a$ を代入すると $\frac{0}{0}$ の型になるのでロピタルの定理が使える。

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{d}{dx}\{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)\}}{\frac{d}{dx}(x-a)^2}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{2(x-a)}=\frac{\frac{d}{dx}\{f'(x)-f'(a)\}}{\frac{d}{dx}\{2(x-a)\}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{2}=\frac{1}{2}f''(a)$$

問　例のようにロピタルの定理を何回か使って次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2}{(x-a)^3}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2-\frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3}{(x-a)^4}$

< 関数の高次近似 (3) >

例 1　前ページの例より

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}=\frac{1}{2}f''(a)$$

である。従って x が a に十分近い時は

$$\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}\fallingdotseq\frac{1}{2}f''(a)$$

とみなせる。両辺に $(x-a)^2$ をかけると

$$f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)\fallingdotseq\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$$

よって $f(a)+f'(a)(x-a)$ を両辺に加えると

$$\boxed{x\fallingdotseq a \text{ のとき}\quad f(x)\fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2}$$

が成り立つ。右辺は x の 2 次式であるから，これを $x=a$ の近くでの

2 次近似式という。

例 2　前ページの問 (1) の結果より

$$x\fallingdotseq a \text{ のとき}\quad \frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2}{(x-a)^3}\fallingdotseq\frac{1}{6}f'''(a)$$

とみなせる。両辺に $(x-a)^3$ をかけると，

$$f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2\fallingdotseq\frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3$$

よって

$$\boxed{x\fallingdotseq a \text{ のとき}\quad f(x)\fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3}$$

が成り立つ。この場合は 3 次式なので $x=a$ の近くでの **3 次近似式**という。

問　前ページの問 (2) の結果を使って，関数 $f(x)$ の $x=a$ の近くでの 4 次近似式を求めよ。

(解)

4 次近似式

$x\fallingdotseq a$ のとき

$f(x)\fallingdotseq$

< 高階微分係数 >

関数 $f(x)$ の n 階導関数を $f^{(n)}(x)$ と書く。たとえば

$$f'(x) = f^{(1)}(x),\ f''(x) = f^{(2)}(x),\ f'''(x) = f^{(3)}(x),\ f''''(x) = f^{(4)}(x)$$

のように書く。又、n 階導関数の $x = a$ における値 $f^{(n)}(a)$ を $x = a$ における n **階微分係数**という。

例 (1) $f(x) = x^5$ のとき

$f^{(1)}(x) = 5x^4,\ f^{(2)}(x) = 20x^3,\ f^{(3)}(x) = 60x^2,\ f^{(4)}(x) = 120x$

より，$x = 2$ における 4 階までの微分係数は，

$f^{(1)}(2) = 80,\ f^{(2)}(2) = 160,\ f^{(3)}(2) = 240,\ f^{(4)}(2) = 240$

(2) $f(x) = \cos x$ のとき

$f^{(1)}(x) = -\sin x,\ f^{(2)}(x) = -\cos x,\ f^{(3)}(x) = \sin x,\ f^{(4)}(x) = \cos x$

$f^{(5)}(x) = -\sin x,\ f^{(6)}(x) = -\cos x,\ f^{(7)}(x) = \sin x,\ f^{(8)}(x) = \cos x$

より $x = 0$ における 8 階までの微分係数は

$f^{(1)}(0) = 0,\ f^{(2)}(0) = -1,\ f^{(3)}(0) = 0, f^{(4)}(0) = 1$

$f^{(5)}(0) = 0,\ f^{(6)}(0) = -1,\ f^{(7)}(0) = 0, f^{(8)}(0) = 1$

問 (1) $f(x) = e^x$ の 4 階導関数 $f^{(4)}(x)$ を求め，$x = 0$ における 4 階微分係数 $f^{(4)}(0)$ を求めよ。

(2) $f(x) = e^x$ の n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ を求め，$x = 0$ における n 階微分係数 $f^{(n)}(0)$ を求めよ。

(3) $f(x) = \sin x$ の 8 階までの導関数 $(f^{(1)}(x) \sim f^{(8)}(x))$ を求め，$x = 0$ における 8 階微分係数 $(f^{(1)}(0) \sim f^{(8)}(0))$ を求めよ。

$<$ 関数の n 次近似 $>$

56 ページの結果から，関数 $f(x)$ の $x=a$ の近くでの 4 次近似式は

$$f(n) \fallingdotseq f(a) + f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{1}{2}f^{(2)}(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(a)(x-a)^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(a)(x-a)^4$$

となる。ここで階乗 $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$ の記号を用いると、

$1! = 1,\ 2! = 2,\ 3! = 6,\ 4! = 24$ より，$f(x)$ の 4 次近似式は

> $x \fallingdotseq a$ のとき
>
> $$f(n) \fallingdotseq f(a) + \frac{1}{1!}f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(a)(x-a)^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(a)(x-a)^4$$

となる。一般に n 次近似式は

> $x \fallingdotseq a$ のとき
>
> $$f(n) \fallingdotseq f(a) + \frac{1}{1!}f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

(n 次近似式)

となる。

例　$f(x) = e^x$ のとき $f^{(n)}(x) = e^x$ より $f^{(n)}(4) = e^4$ である。

従って $f(x) = e^x$ の $x = 4$ の近くでの n 次近似式は

$x \fallingdotseq 4$ のとき

$$e^x \fallingdotseq e^4 + e^4(x-4) + \frac{1}{2!}e^4(x-4)^2 + \frac{1}{3!}e^4(x-4)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}e^4(x-4)^n$$

である。

問　$f(x) = e^x$ に対し，次の n 次近似式を求めよ。

(1) $x = a$ の近くでの n 次近似式

$x \fallingdotseq a$ のとき

$e^x \fallingdotseq$

(2) $x = 1$ の近くでの n 次近似式

(3) $x = 0$ の近くでの n 次近似式

＜テーラー展開＞

関数 $f(x)$ の $x=a$ の近くでの n 次近似式

$$f(x) \fallingdotseq f(a) + \frac{1}{1!}f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

は，次数 n が大きくなるほど，近似の精度が上がる。x が a に十分近くなくても，n を大きくすれば近似できる。ここで n を限りなく大きくすると，近似式の右辺は無限級数となり，それが収束する場合は両辺が一致する。

この極限の式

$$\boxed{f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(a)(x-a)^3 + \cdots}$$

を関数 $f(x)$ の $x=a$ の近くでの**テーラー展開**という。

(注) 近似式 ($\fallingdotseq$) ではなく，等式 ($=$) であることに注意する。

例　$f(x)=e^x$ の $x=2$ の近くでのテーラー展開を求めたい。$f^{(n)}(x)=e^x$ であるから

$$f(2)=e^2,\ f^{(1)}(2)=e^2,\ f^{(2)}(2)=e^2,\ f^3(2)=e^2,\ \cdots\ f^{(n)}(2)=e^2$$

となるので $x=2$ の近くでのテーラー展開は

$$e^x = e^2 + e^2(x-2) + \frac{1}{2!}e^2(x-2)^2 + \frac{1}{3!}e^2(x-2)^3 + \frac{1}{4!}e^2(x-2)^4 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{1}{n!}e^2(x-2)^n + \cdots$$

となる。

問 1　$f(x)=e^x$ に対し，$x=a$ の近くでのテーラー展開を求めよ。

問 2　$f(x)=e^x$ に対し，a が次の場合の $x=a$ の近くでのテーラー展開を求めよ。

(1) $a=1$

(2) $a=0$

< マクローリン展開 (1) >

関数 $f(x)$ の $x=0$ の近くでのテーラー展開

$$f(x)=f(0)+\frac{1}{1!}f^{(1)}(0)x+\frac{1}{2!}f^{(2)}(0)x^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(0)x^3+\cdots$$

を**マクローリン展開**という。前ページの問 2(2) では $f(x)=e^x$ の

マクローリン展開を求めた。

すなわち

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\cdots$$

となる。

例　$f(x)=\cos(x)$ のとき，57 ページの例より

$$f^{(1)}(0)=0,\ f^{(2)}(0)=-1,\ f^{(3)}(0)=0,\ f^{(4)}(0)=1$$

$$f^{(5)}(0)=0,\ f^{(6)}(0)=-1,\ f^{(7)}(0)=0,\ f^{(8)}(0)=1$$

で数列 $\{f^{(n)}(0)\}$ は，$0,-1,0,1$ を 4 項おきに繰り返す。

又，$f(0)=\cos 0=1$ だから $f(x)=\cos x$ のマクローリン展開は

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\frac{1}{8!}x^8-\frac{1}{10!}x^{10}+\cdots$$

となる。

問 1　57 ページの結果を使って，$f(x)=\sin x$ のマクローリン展開を求めよ。

問 2　次の極限値を求め，答えを階乗を用いた分数で表せ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3-\frac{1}{4!}x^4}{x^5}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{4!}x^4}{x^6}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x+\frac{1}{3!}x^3-\frac{1}{5!}x^5}{x^7}$

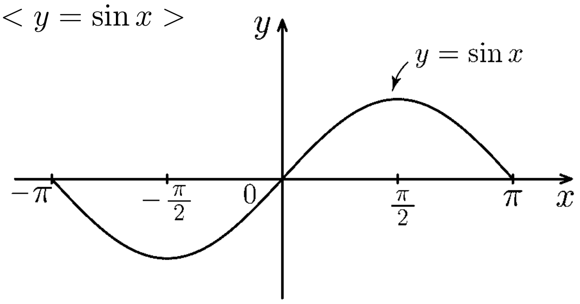
＜マクローリン展開 (2)＞

例 1　前ページより $\sin x$ のマクローリン展開は

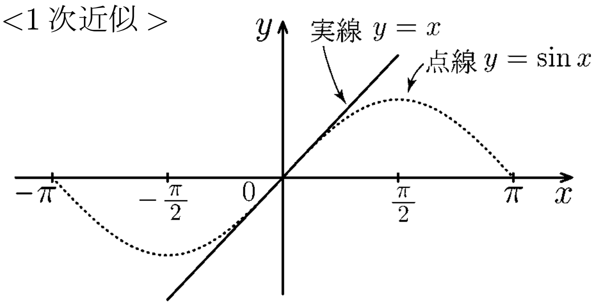
$$\boxed{\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \cdots}$$

となる。以下の図のように $\sin x$ のグラフの $x = 0$ の近くを近似していることがわかる。

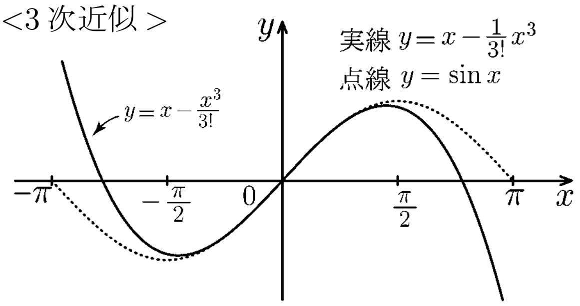
＜ $y = \sin x$ ＞



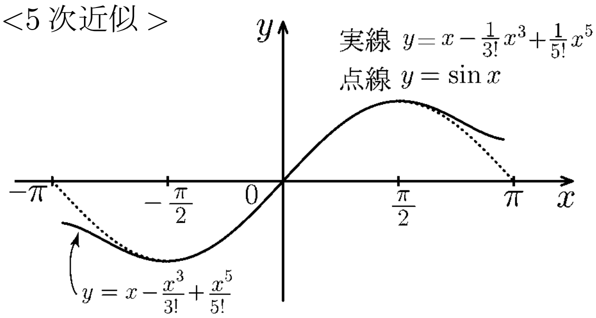
＜1 次近似＞



＜3 次近似＞



＜5 次近似＞

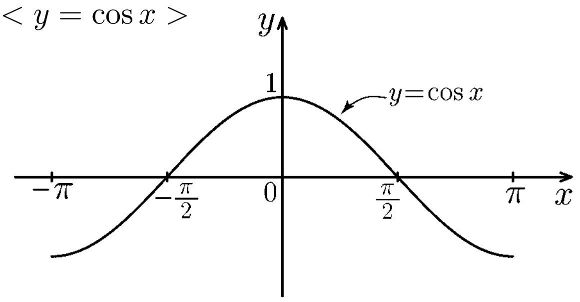


例 2　$\cos x$ のマクローリン展開は

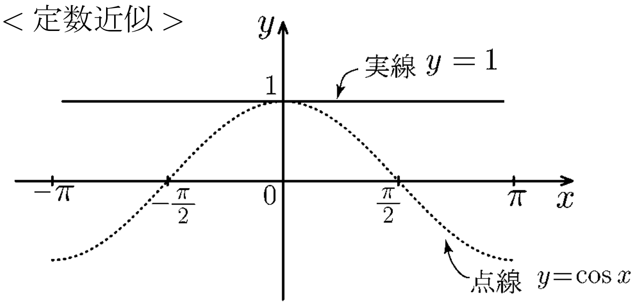
$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \frac{1}{10!}x^{10} + \cdots}$$

となる。以下の図のように $\cos x$ のグラフの $x = 0$ の近くを近似していることがわかる。

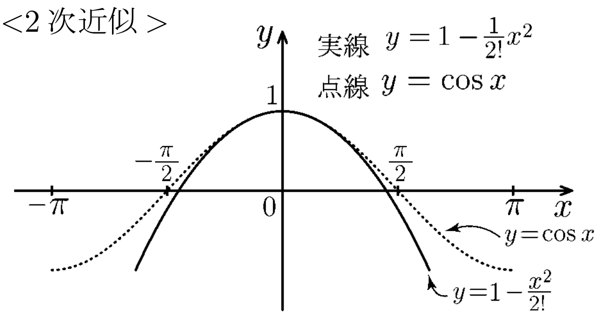
＜ $y = \cos x$ ＞



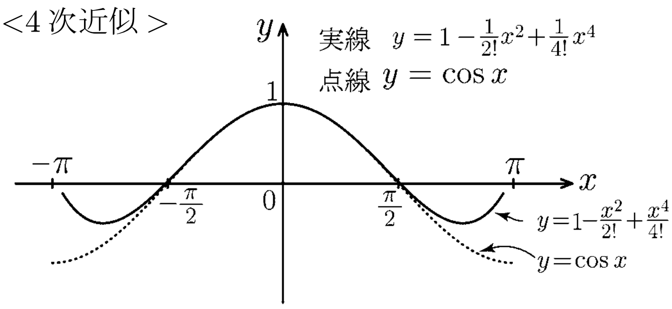
＜定数近似＞



＜2 次近似＞



＜4 次近似＞



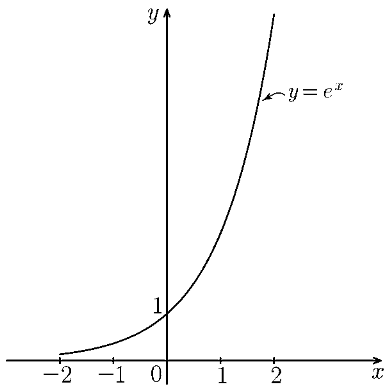
＜マクローリン展開 (3)＞

指数関数 e^x のマクローリン展開は

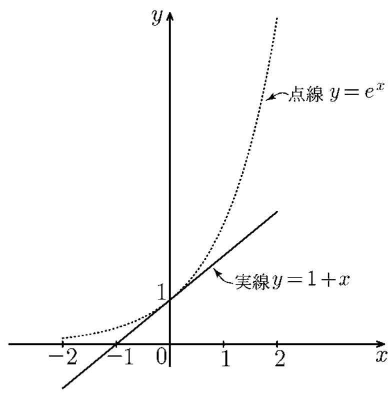
$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots}$$

となる。以下の図のように e^x のグラフの $x = 0$ の近くを近似していることがわかる。

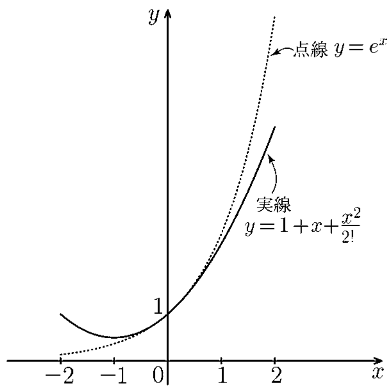
$< y = e^x >$



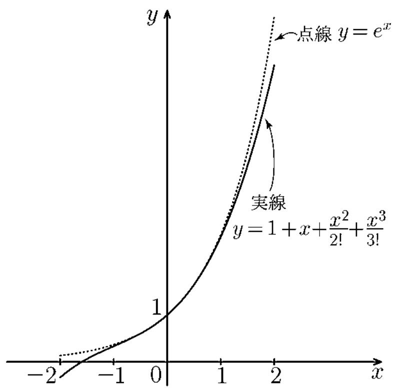
＜1 次近似＞



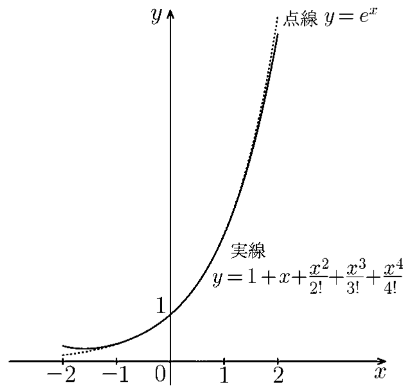
＜2 次近似＞



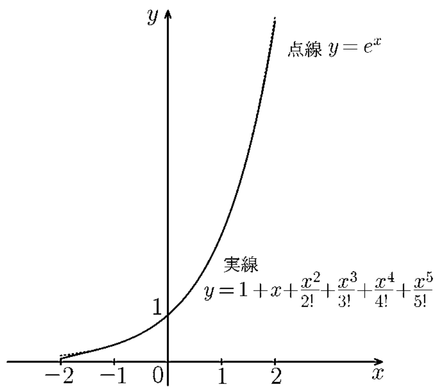
＜3 次近似＞



＜4 次近似＞



＜5 次近似＞



上の図からわかるように 4 次関数 $1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4$ は $-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲で e^x のグラフとほぼ一致している。従って次の近似式が成り立つ。

$$\boxed{-1 \leqq x \leqq 1 \quad \text{のとき} \quad e^x \fallingdotseq 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4}$$

問　この近似式で $x = 1$ とおくと

$$e \fallingdotseq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$$

となる。この式の右辺を計算することにより e の近似値を求めよ。

< 練習問題 >

問 1　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^6-1}{x-1}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{e^x-e^2-e^2(x-2)}{(x-2)^2}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^4-a^4-4a^3(x-a)-6a^2(x-a)^2}{(x-a)^3}$

問 2　次の近似式を求めよ。

(1) $f(x)=\sin x$ の $x=a$ における 1 次近似式

(2) $f(x)=e^x$ の $x=a$ における 1 次近似式

(3) $f(x)=x^7$ の $x=a$ における 1 次近似式

(4) $f(x)$ の $x=a$ における 2 次近似式

問 3　$f(x)$ が次の各場合にマクローリン展開を求めよ。

(1) $f(x)=e^x$

(2) $f(x)=\sin x$

(3) $f(x)=\cos x$

問 4　マクローリン展開を利用して，次の値を無限数列の和で表せ。

(1) e

(2) $\sin 1$

(3) $\cos 1$