高知工科大学

Kochi University of Technology

数学　1

(2005年度版)

解答

＜ 1 ページ. 三角関数 ＞

問 1 の解答

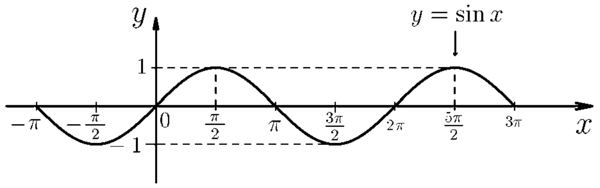
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

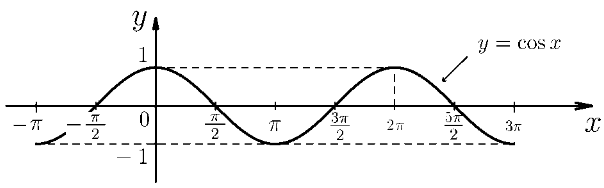
$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

問 2 の解答

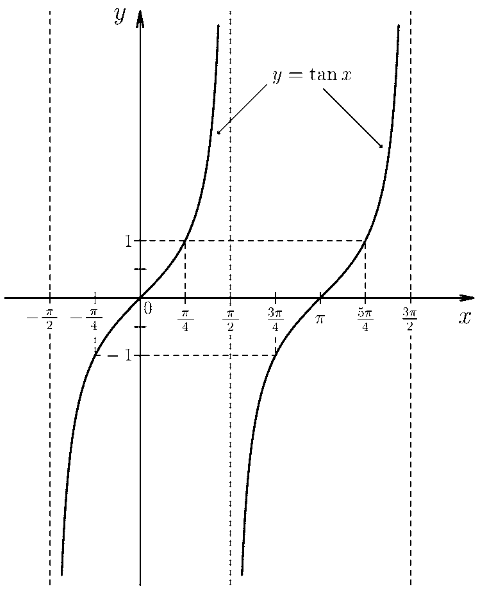
(1)



(2)



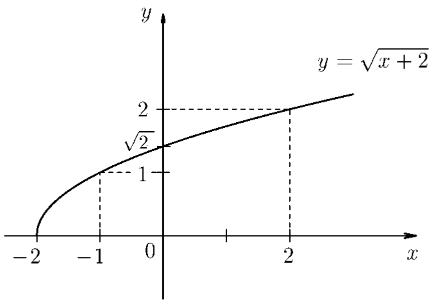
(3)



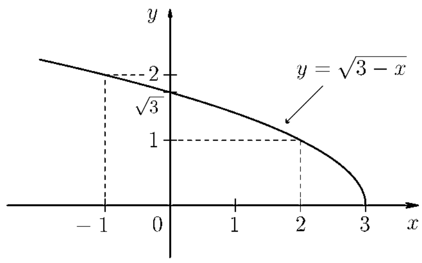
＜2ページ. 無理関数＞

問の解答

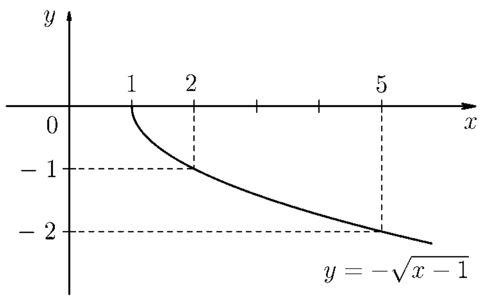
(1) 定義域：$x \geqq -2$
値域：$y \geqq 0$



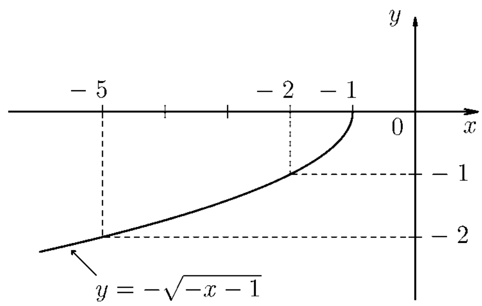
(2) 定義域：$x \leqq 3$
値域：$y \geqq 0$



(3) 定義域：$x \geqq 1$
値域：$y \leqq 0$

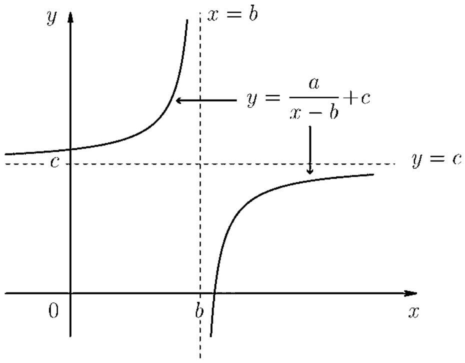


(4) 定義域：$x \leqq -1$
値域：$y \leqq 0$



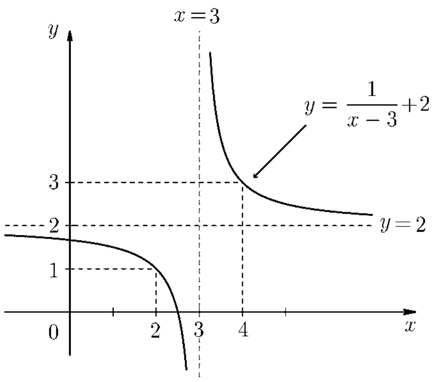
＜ 3ページ. 分数関数 ＞

問 1 の解答

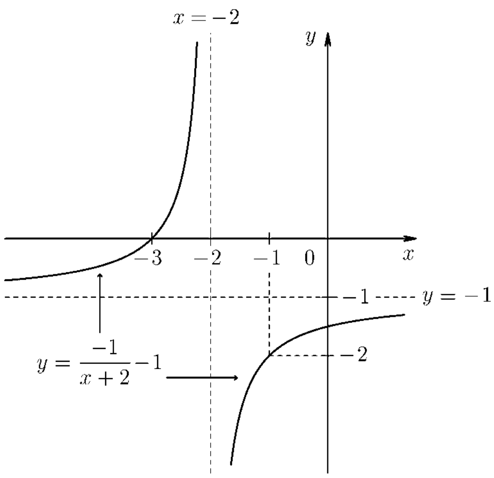


問 2 の解答

(1) 定義域：$x \neq 3$
値域：$y \neq 2$　　漸近線は $x = 3$ と $y = 2$



(2) 定義域：$x \neq -2$
値域：$y \neq -1$　　漸近線は $x = -2$ と $y = -1$



＜ 4ページ. 絶対値 ＞

問 1 の解答

(1) 13.4

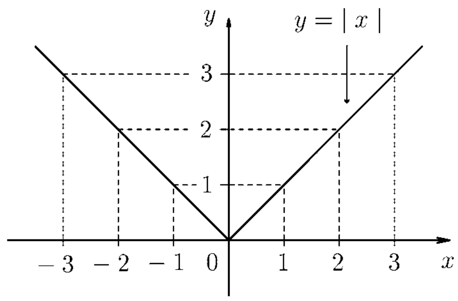
(2) 0.12

(3) 0.5

(4) 10.8

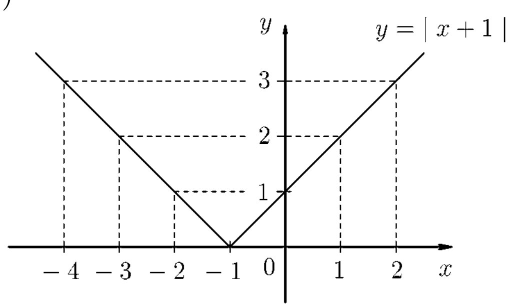
問 2 の解答

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\lvert x \rvert$	3	2	1	0	1	2	3

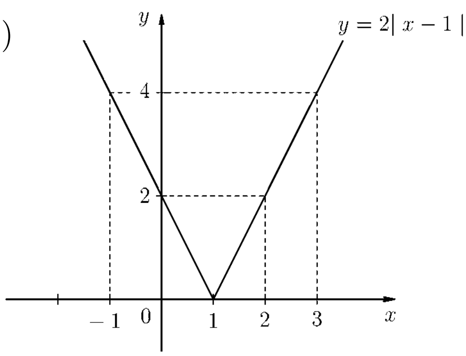


問 3 の解答

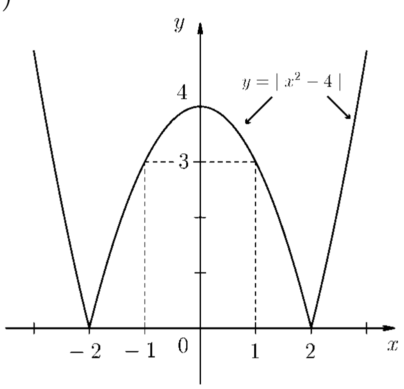
(1)



(2)



(3)



＜ 5 ページ. ガウス記号 ＞

問 1 の解答

(1) 1

(2) 9

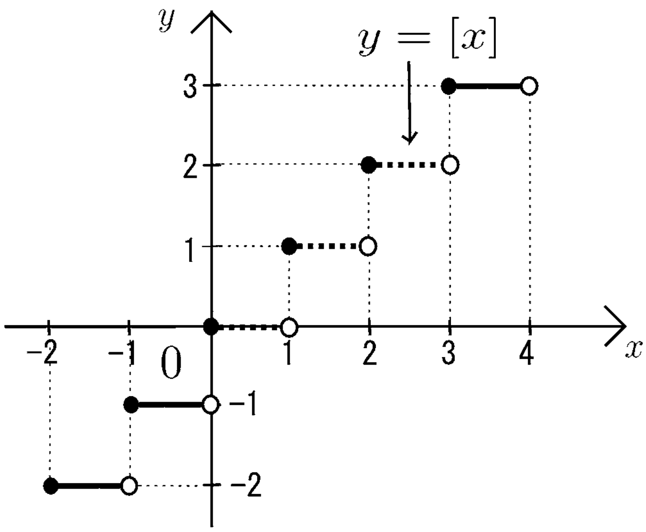
(3) 0

(4) -1

(5) -4

(6) -10

問 2 の解答



< 6ページ. 定義域の制限 >

問の解答

(1) $y \geqq 1$

(2) $y \geqq 2$

(3) $y \geqq 0$

(4) $y \geqq 1$

(5) $0 \leqq y \leqq 1$

(6) $\dfrac{1}{2} \leqq y \leqq 1$

＜ 7 ページ. 単調関数 ＞

問の解答

(1) 単調増加

(2) 単調関数ではない

(3) 単調減少

(4) 単調関数ではない

(5) 単調関数ではない

(6) 単調増加

＜ 8 ページ. 逆関数 1 ＞

問の解答

(1) $f^{-1}(b) = \dfrac{b+2}{3}$

(2) $f^{-1}(b) = \dfrac{1}{b-2} \quad (b > 2)$

(3) $f^{-1}(b) = b^2 \quad (b \geqq 0)$

< 9ページ. 逆関数 2 >

問の解答

(1) $f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{3}$

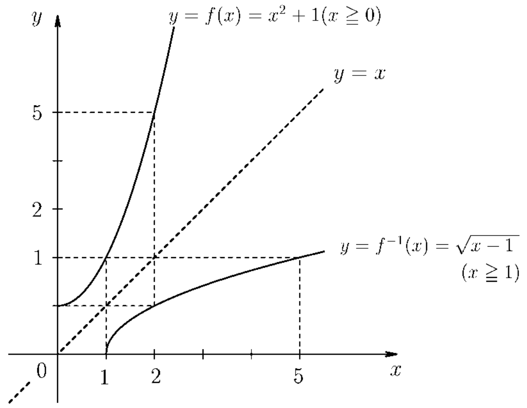
(2) $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x} + 1 \quad (x > 0)$

(3) $f^{-1}(x) = x^3 \quad (x \geqq 0)$

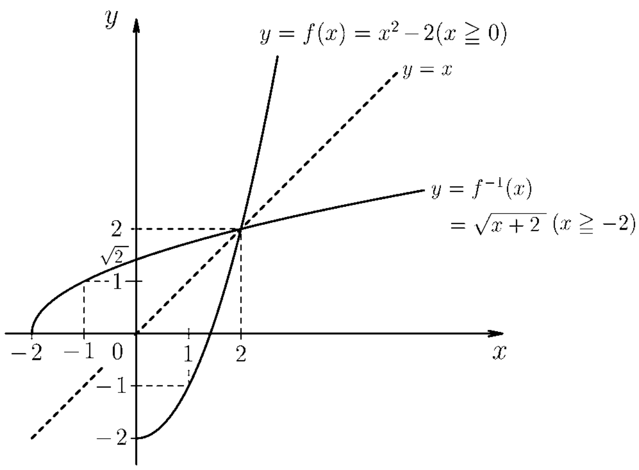
＜ 10 ページ. 逆関数 3 ＞

問の解答

(1) $f^{-1}(x)=\sqrt{x-1} \quad (x \geqq 1)$



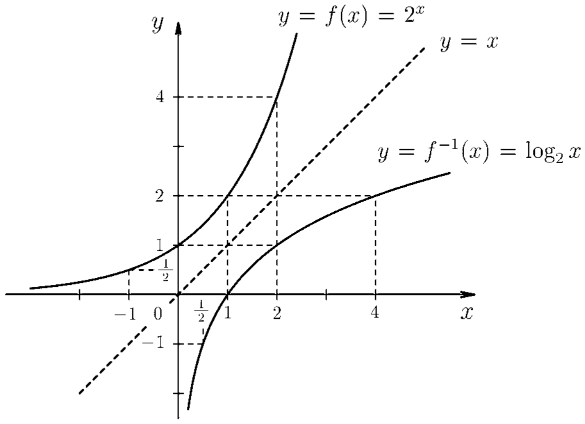
(2) $f^{-1}(x)=x^2-2 \quad (x \geqq 0)$



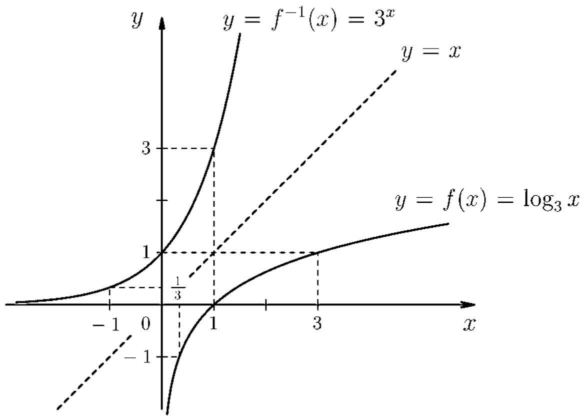
＜ 11 ページ. 逆関数 4 ＞

問 1 の解答

(1) $f^{-1}(x) = \log_2 x$　(定義域は $x > 0$)



(2) $f^{-1}(x) = 3^x$　(定義域は実数全体)



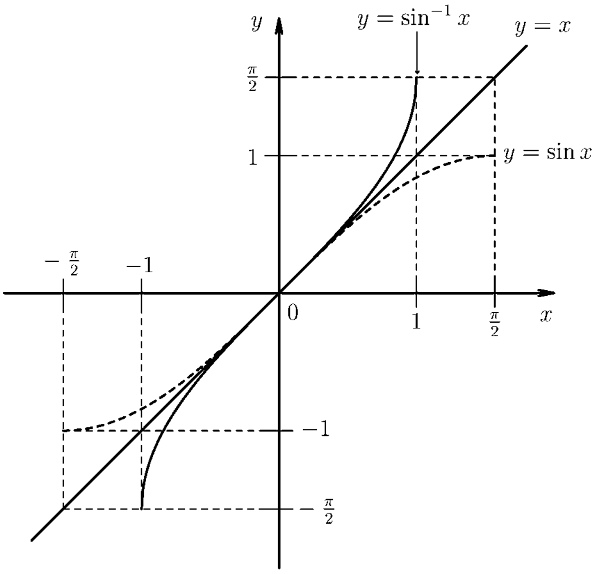
問 2 の解答

(1) $f^{-1}(x) = 2^x$　(定義域は実数全体)

(2) $f^{-1}(x) = \log_3 x$　(定義域は $x > 0$)

＜ 12 ページ. 逆三角関数 1 ＞

問 1 の解答



問 2 の解答

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

問 3 の解答

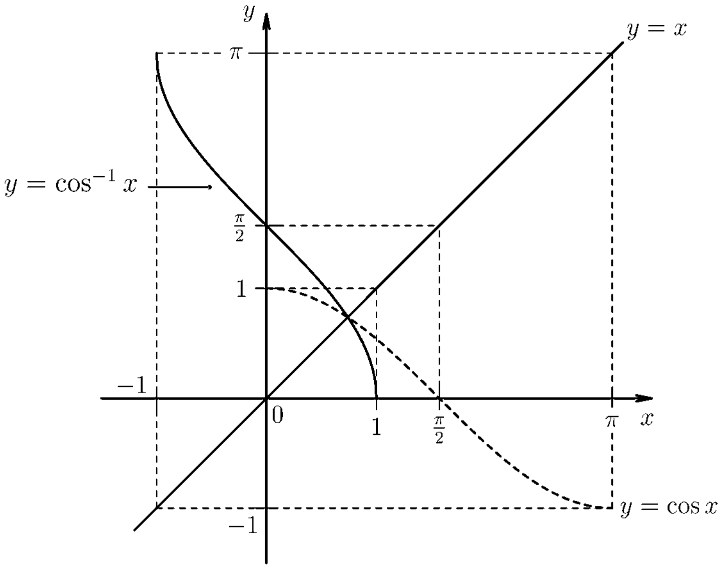
(1) $\dfrac{\pi}{4}$

(2) $-\dfrac{\pi}{3}$

(3) $-\dfrac{\pi}{6}$

＜ 13 ページ. 逆三角関数 2 ＞

問 1 の解答



問 2 の解答

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

問 3 の解答

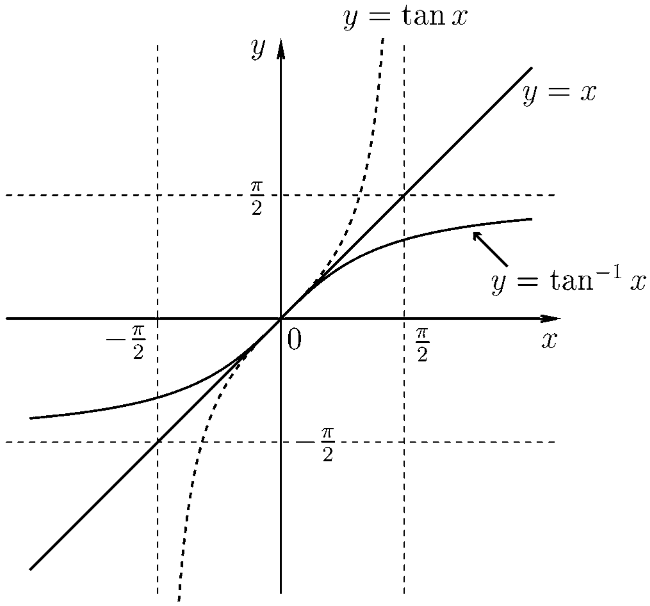
(1) $\dfrac{\pi}{6}$

(2) $\dfrac{3\pi}{4}$

(3) $\dfrac{2\pi}{3}$

＜ 14 ページ. 逆三角関数 3 ＞

問 1 の解答



問 2 の解答

θ	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan\theta$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

問 3 の解答

(1) $\dfrac{\pi}{4}$

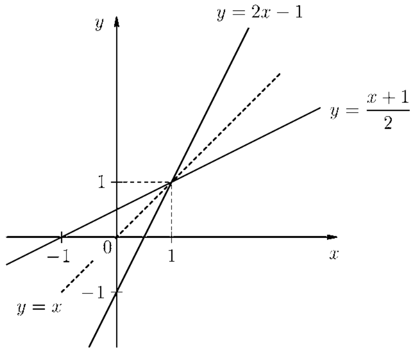
(2) $\dfrac{\pi}{6}$

(3) $-\dfrac{\pi}{3}$

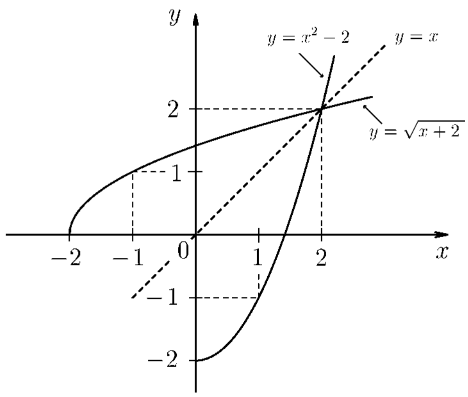
＜ 15 ページ. 逆三角関数の練習 ＞

問 1 の解答

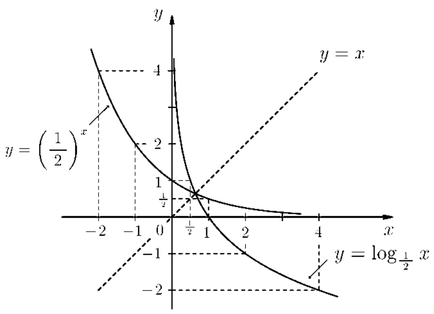
(1) 逆関数　$y = \dfrac{x+1}{2}$



(2) 逆関数　$y = \sqrt{x+2}$　(定義域 : $x \geqq -2$)



(3) 逆関数　$y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$



問 2 の解答

(1) $\dfrac{\pi}{6}$　　(2) $\dfrac{2\pi}{3}$　　(3) $\dfrac{\pi}{3}$

(4) $\dfrac{\pi}{4}$　　(5) $\dfrac{\pi}{6}$　　(6) $-\dfrac{\pi}{4}$

(7) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　(8) -2　　(9) -1

＜ 16 ページ. 合成関数 ＞

問 1 の解答

(1) $g(f(x)) = 3x^2 + 3$, $f(g(x)) = 9x^2 + 1$

(2) $g(f(x)) = (\tan x) + 2$, $f(g(x)) = \tan(x + 2)$

(3) $g(f(x)) = x - 1$, $f(g(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$

(4) $g(f(x)) = \log_2(x^2 + 2)$, $f(g(x)) = (\log_2 x)^2 + 2$

問 2 の解答

(1) $f^{-1}(f(a)) = a$

(2) $f(f^{-1}(b)) = b$

問 3 の解答

(1) $g(f(x)) = x$, $f(g(x)) = x$

(2) $g(f(x)) = x$, $f(g(x)) = x$

(3) $g(f(x)) = x$, $f(g(x)) = x$

問 4 の解答

(1) x

(2) x

(3) x

(4) x

(5) $\dfrac{\pi}{4}$

(6) 1

＜ 17 ページ. 数列 ＞

問 1 の解答

$a_n = a + (n-1)d$

問 2 の解答

(1) $a_n = 2n - 1$

(2) $a_n = 4n + 1$

問 3 の解答

$a_n = ar^{n-1}$

問 4 の解答

(1) $a_n = 3 \times 2^{n-1}$

(2) $a_n = 4 \times 3^{n-1}$

(3) $a_n = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 3^{5-n}$

(4) $a_n = 8 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(5) $a_n = r^{n-1}$

< 18ページ.等比数列の和 >

問 1 の解答

$$\frac{a(1-r^n)}{1-r} \left(= \frac{a(r^n-1)}{r-1}\right)$$

問 2 の解答

(1) $2^n - 1$

(2) $2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

(3) $\dfrac{5}{2}(3^n - 1)$

(4) $\dfrac{1}{3}\bigl(1 - (\frac{1}{10})^n\bigr)$

＜ 19 ページ. 数列の極限 1 ＞

問の解答

(1) 0

(2) 2

(3) $\dfrac{2}{3}$

(4) 0

(5) 0

(6) 0

＜ 20 ページ. 数列の極限 2 ＞

問の解答

(1) ∞

(2) 0

(3) ∞

(4) 0

(5) ∞

(6) 0

(7) 3

(8) $\dfrac{2}{1-\varepsilon}$

(9) 1

(10) ∞

(11) 0

(12) 10

(13) 0

(14) 0

(15) 0

(16) ∞

< 21 ページ. 数列の極限 3 >

問 1 の解答

(1) $-\infty$

(2) $+\infty$

(3) $+\infty$

(4) $-\infty$

問 2 の解答

(1) 0

(2) $+\infty$

(3) 0

＜ 22 ページ. 無限級数 ＞

問の解答

(1) $\dfrac{1}{2}$

(2) $\dfrac{1}{9}$

< 23 ページ. 無限等比級数 >

問 1 の解答

(1) 0

(2) $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

(3) $S = \dfrac{a}{1-r}$

問 2 の解答

(1) 8

(2) $\dfrac{1}{3}$

問 3 の解答

略

< 24 ページ. 循環小数 1 >

問の解答

(1) 0.6875

(2) 0.024

(3) 0.3875

(4) $0.41\dot{6}$

(5) $0.\dot{1}\dot{2}$

(6) $0.\dot{4}0\dot{5}$

< 25 ページ. 循環小数 2 >

問の解答

(1) $\dfrac{5}{9}$

(2) 1

(3) $\dfrac{4}{33}$

(4) $\dfrac{43}{99}$

(5) $\dfrac{41}{333}$

< 26 ページ. 小数の表示 >

問 1 の解答

(1) 0.001

(2) 0.0001

問 2 の解答

(1) 10

(2) 0.2

(3) 2.79

(4) 5.0124

< 27 ページ. 関数の極限 >

問の解答

(1) 2

(2) $\dfrac{1}{2}$

(3) 0

(4) -1

(5) 1

(6) 0

(7) -2

(8) -5

< 28 ページ. 左極限・右極限 1 >

問 1 の解答

(1) 10 の左表現 $= 9.\dot{9}$, 10 の右表現 $= 10.\dot{0}$

(2) 5.3 の左表現 $= 5.2\dot{9}$, 5.3 の右表現 $= 5.3\dot{0}$

問 2 の解答

(1) 0

(2) 1

(3) 2

(4) 3

< 29 ページ. 左極限・右極限 2 >

問 1 の解答

(1) -1

(2) 0

問 2 の解答

(1) $+\infty$

(2) $-\infty$

＜ 30 ページ. 左極限・右極限 3 ＞

問の解答

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2+0}|x-2|=0$ $\qquad\displaystyle\lim_{x\to 2-0}|x-2|=0$

よって $\displaystyle\lim_{x\to 2}|x-2|=0$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{|x|}{x}=1$ $\qquad\displaystyle\lim_{x\to -0}\frac{|x|}{x}=-1$

＜ 31 ページ. 極限の練習 ＞

問 1 の解答

(1) $\dfrac{1}{3}$

(2) $\dfrac{1}{3}$

問 2 の解答

(1) $0.91\dot{6}$

(2) $0.\dot{4}2857\dot{1}$

問 3 の解答

(1) $\dfrac{7}{9}$

(2) $\dfrac{13}{99}$

問 4 の解答

(1) × $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x-1}=+\infty,\ \lim_{x\to 1-0}\frac{1}{x-1}=-\infty$

左右の極限値が違うので，$x\to 1$ の極限値は存在しない。

(2) × $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{|x|}{x}=1,\ \lim_{x\to -0}\frac{|x|}{x}=-1$

左右の極限値が違うので，$x\to 0$ の極限値は存在しない。

(3) ○

問 5 の解答

$\displaystyle\lim_{x\to +0}f(x)=+\infty$ ， $\displaystyle\lim_{x\to -0}f(x)=-\infty$ ， $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=$ 存在しない

$\displaystyle\lim_{x\to a+0}f(x)=0$ ， $\displaystyle\lim_{x\to a-0}f(x)=0$ ， $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=0$

$\displaystyle\lim_{x\to b+0}f(x)=q$ ， $\displaystyle\lim_{x\to b-0}f(x)=s$ ， $\displaystyle\lim_{x\to b}f(x)=$ 存在しない

$\displaystyle\lim_{x\to c+0}f(x)=p$ ， $\displaystyle\lim_{x\to c-0}f(x)=p$ ， $\displaystyle\lim_{x\to c}f(x)=p$

< 32 ページ. 弧度法の復習 >

問 1 の解答

度数法	$180°/\pi$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$180°$	$360°$
弧度法 θ	1	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	2π
弧の長さ ℓ	r	$\frac{1}{4}\pi r$	$\frac{\pi}{3}r$	$\frac{\pi}{2}r$	$\frac{2\pi}{3}r$	πr	$2\pi r$
面積 S	$\frac{1}{2}r^2$	$\frac{\pi}{8}r^2$	$\frac{\pi}{6}r^2$	$\frac{1}{4}\pi r^2$	$\frac{\pi}{3}r^2$	$\frac{1}{2}\pi r^2$	πr^2

問 2 の解答

$\ell = \theta r$

$S = \dfrac{1}{2}\theta r^2$

< 33 ページ. 三角関数の極限 1 >

問の解答

$\sin\theta < \theta$ の両辺を θ で割ると $\dfrac{\sin\theta}{\theta} < 1 \quad \cdots$ ①

$\theta < \tan\theta$ の両辺に $\dfrac{\cos\theta}{\theta}$ をかけると $\cos\theta < \dfrac{\sin\theta}{\theta} \quad \cdots$ ②

①と②より $(**)$ が導かれる。

< 34ページ.三角関数の極限 2 >

問の解答

(1) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\cos x} = 1$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

(3) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(5x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin(3x)}{3x}}{\frac{\sin(5x)}{5x}} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$

(4) $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \sin x (1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{1 + \cos x}$$
$$= \frac{1}{2}$$

(5) $$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x^2 - 1}{x(\cos x + 1)} = \lim_{x \to 0} -\frac{\sin x}{x} \times \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$
$$= 0$$

< 35 ページ. 三角関数の極限 3 >

問の解答

(1) $$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(\frac{\pi}{3}+h)-\sin\frac{\pi}{3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{3}\cos h+\cos\frac{\pi}{3}\sin h-\sin\frac{\pi}{3}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\sin\frac{\pi}{3}\left(\frac{\cos h-1}{h}\right)+\cos\frac{\pi}{3}\left(\frac{\sin h}{h}\right)\right\}$$
$$=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

(2) $$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\sin x\left(\frac{\cos h-1}{h}\right)+\cos x\left(\frac{\sin h}{h}\right)\right\}$$
$$=\cos x$$

(3) $$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\cos x\left(\frac{\cos h-1}{h}\right)-\sin x\left(\frac{\sin h}{h}\right)\right\}$$
$$=-\sin x$$

＜ 36 ページ. 関数の連続性 ＞

問の解答

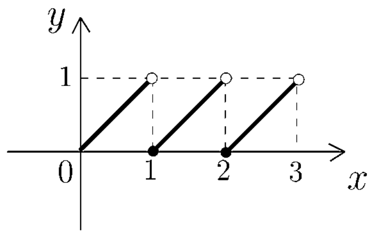
(1) $x = \dfrac{\pi}{2}$ は $\tan x$ の定義域にないので $x = \dfrac{\pi}{2}$ で連続ではない。

(2) $$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+0}|x| = \lim_{x\to+0} x = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to-0}|x| = \lim_{x\to-0}(-x) = 0 \end{array}\right\} \text{ より } \lim_{x\to0}|x| = 0 = |0|$$

よって $x = 0$ で $f(x) = |x|$ は連続である。

(3) $\displaystyle\lim_{x\to1+0} f(x) = 0,\ \lim_{x\to1-0} f(x) = 1$ より左右の極限が異なるので

$f(x) = x - [x]$ は $x = 1$ で連続ではない。



＜ 37 ページ. 微分可能性 1 ＞

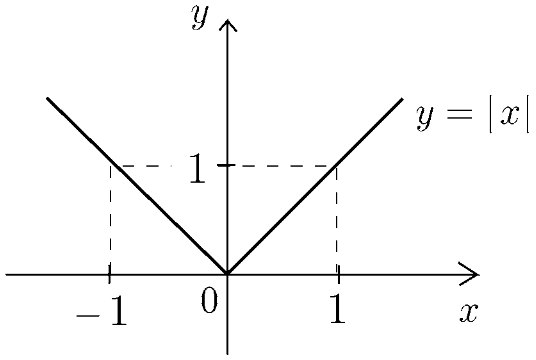
問 1 の解答

$f'_+(a) = f'_-(a)$

問 2 の解答

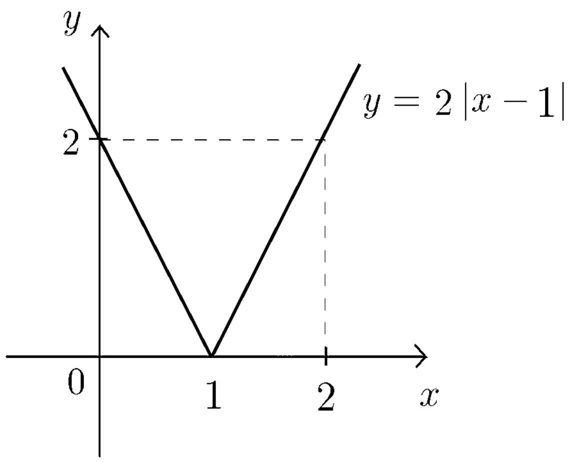
(1) $f'_+(0) = 1$

$f'_-(0) = -1$



(2) $f'_+(1) = 2$

$f'_-(1) = -2$



< 38 ページ. 微分可能性 2 >

問 1 の解答

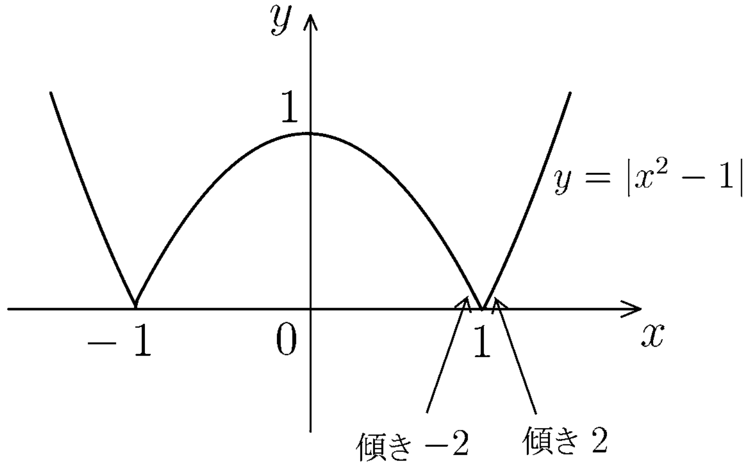
$f'_+(2) = 0$

$f'_-(2) = +\infty$

問 2 の解答

$f'_+(1) = 2$

$f'_-(1) = -2$



$<$ 39 ページ. 導関数 1 $>$

問の解答

(1) $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h+1}-\sqrt{x+1}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h+1)-(x+1)}{h(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

(2) $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2}$$

< 40 ページ. 導関数 2 >

問の解答

(1) $5x^4$

(2) $6x^5$

(3) $-12x^3$

(4) $5x^4 + 8x^3$

(5) $8x^3 - 15x^4$

(6) $3x^2 - 2x + 1$

(7) $3x^2 - 6x - 4$

(8) $4x^3 + 3x^2 - 1$

＜ 41 ページ. 積の微分 1 ＞

問 1 の解答

略

問 2 の解答

(1) $3x^2 - 2x + 1$

(2) $4x^3 - 12x^2 + 2x - 4$

(4) $3(x+1)^2$

(3) $4(x+1)^3$

< 42 ページ. 積の微分 2 >

問 1 の解答

(1) $(x\sqrt{x})' = x' \times \sqrt{x} + x \times (\sqrt{x})' = 1 \times \sqrt{x} + x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$= \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

(2) $(k\sqrt{x})' = k' \times \sqrt{x} + k \times (\sqrt{x})' = 0 \times \sqrt{x} + k \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$= \frac{k}{2\sqrt{x}}$$

問 2 の解答

略

問 3 の解答

$$\begin{aligned}(f(x)g(x)h(x))' &= \{f(x)g(x)\}' \times h(x) + f(x)g(x) \times (h(x))' \\ &= \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\} \times h(x) + f(x)g(x)h'(x) \\ &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)\end{aligned}$$

< 43ページ. 商の微分 >

問 1 の解答

略

問 2 の解答

略

問 3 の解答

(1) $-\dfrac{2}{x^3}$

(2) $-\dfrac{1}{x^3}$

(3) $-\dfrac{x+2}{x^3}$

(4) $\dfrac{2x^3+3x^2}{(x+1)^2}$

＜ 44 ページ. 三角関数の微分 ＞

問 1 の解答

略

問 2 の解答

(1) $3\cos x - 4\sin x$

(2) $3\sin x + \dfrac{5}{\cos^2 x}$

(3) $\cos^2 x - \sin^2 x$

(4) $2\sin x\cos x$

(5) $-2\cos x\sin x$

(6) $\tan x + \dfrac{x}{\cos^2 x}$

(7) $\dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$

(8) $\dfrac{-x\sin x - \cos x}{x^2}$

問 3 の解答

(1) $-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$

(2) $\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

(3) $-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

< 45 ページ. 微分記号 >

問の解答

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 2x - 1$

(2) $\dfrac{dy}{dt} = \cos t$

(3) $\dfrac{d\ell}{dt} = 6t - 2$

(4) $\dfrac{dS}{dr} = 2\pi r$

(5) $\dfrac{dV}{dr} = 4\pi r^2$

＜ 46 ページ. 増分記号 Δ(デルタ) ＞

問の解答

(1) $\displaystyle \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^5 - x^5}{\Delta x} = (x^5)' = 5x^4$

(2) $\displaystyle \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin(t+\Delta t) - \sin(t)}{\Delta t} = (\sin t)' = \cos t$

(3) $\displaystyle \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\cos(u+\Delta u) - \cos(u)}{\Delta u} = (\cos u)' = -\sin u$

$<$ 47 ページ. 合成関数の微分 1 $>$

問 1 の解答

$$\frac{dy}{dx} = \left(\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\cos(u+\Delta u) - \cos u}{\Delta u}\right) \times \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^4 - x^4}{\Delta x}\right)$$

$$= (\cos u)' \times (x^4)'$$

$$= -\sin u \times 4x^3 = -4x^3 \sin(x^4)$$

問 2 の解答

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\left(\begin{array}{l} u = x^3 + 2x^2 \\ \\ \Delta u = (x+\Delta x)^3 + 2(x+\Delta x)^2 - (x^3 - 2x^2) \\ \\ \Delta y = \sin(u+\Delta u) - \sin n \ \text{とおく} \end{array}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\Big((x+\Delta x)^3 + 2(x+\Delta x)^2\Big) - \sin(x^3 + 2x^2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(u+\Delta u) - \sin u}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\sin(u+\Delta u) - \sin u}{\Delta u} \times \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 + 2(x+\Delta x)^2 - (x^3 + 2x^2)}{\Delta x}$$

$$= (\sin u)' \times (x^3 + 2x^2)' = \cos(u) \times (3x^2 + 4x) = (3x^2 + 4x)\cos(x^3 + 2x^2)$$

＜ 48 ページ. 合成関数の微分 2 ＞

問 1 の解答

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}}$$

問 2 の解答

(1) $\begin{pmatrix} u = x^2 - 2x + 5 \text{ とおくと} \\ \\ y = u^3 \end{pmatrix}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(u^3) \times \frac{d}{dx}(x^2 - 2x + 5)$$

$$= 3u^2 \times (2x - 2) = 6(x-1)(x^2 - 2x + 5)^2$$

(2) $\begin{pmatrix} u = 2x - 3 \text{ とおくと} \\ \\ y = \cos u \end{pmatrix}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(\cos u) \times \frac{d}{dx}(2x - 3) = -\sin u \times 2 = -2\sin(2x - 3)$$

(3) $\begin{pmatrix} u = x^5 - 2x^2 \text{ とおくと} \\ \\ y = \sin u \end{pmatrix}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(\sin u) \times \frac{d}{dx}(x^5 - 2x^2)$$

$$= \cos u \times (5x^4 - 4x)$$

$$= (5x^4 - 4x)\cos(x^5 - 2x^2)$$

< 49 ページ. 微分の練習 1 >

問の解答

(1) $\left((x+4)^2\right)' = 2(x+4)$

(2) $\left((x+4)^3\right)' = 3(x+4)^2$

(3) $\left(\dfrac{1}{x^3}\right)' = -\dfrac{3x^2}{x^6} = -\dfrac{3}{x^4}$

(4) $\left(\dfrac{2x}{x+1}\right)' = \dfrac{2(x+1)-2x\times 1}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{(x+1)^2}$

(5) $\left(4\sin x - 5\cos x\right)' = 4\cos x + 5\sin x$

(6) $\left(x^2\sin x\right)' = 2x\sin x + x^2\cos x$

(7) $\left(x^3\cos x\right)' = 3x^2\cos x - x^3\sin x$

(8) $\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)' = \dfrac{\frac{x}{\cos^2 x} - \tan x}{x^2} = \dfrac{x - \sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}$

(9) $\left((3x+5)^4\right)' = 12(3x+5)^3$

(10) $\left((4x-1)^7\right)' = 28(4x-1)^6$

(11) $\left((x^4-2x^3)^{10}\right)' = 10(4x^3-6x^2)(x^4-2x^3)^9 = 20(2x^3-3x^2)(x^4-2x^3)^9$

(12) $\left((2\sin x + 3\cos x)^5\right)' = 5(2\cos x - 3\sin x)(2\sin x + 3\cos x)^4$

(13) $\left(\sin(5x-4)\right)' = 5\cos(5x-4)$

(14) $\left(\cos(4x+3)\right)' = -4\sin(4x+3)$

(15) $\left(\sin(x^3-5x)\right)' = (3x^2-5)\cos(x^3-5x)$

(16) $\left(\tan(3x-4)\right)' = \dfrac{3}{\cos^2(3x-4)}$

< 50 ページ. ネピアの数 >

問の解答

$$\lim_{h \to +0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

$$\lim_{h \to -0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

$$\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$$

＜ 51 ページ. 対数関数の導関数 ＞

問 1 の解答

(1) $f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\Delta x} \log_{10}\left(1 + \dfrac{\Delta x}{3}\right)$

ここで $\dfrac{\Delta x}{3} = h$ とおくと $\Delta x \to 0$ のとき $h \to 0$ より

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{3h} \log_{10}(1+h) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{3} \log_{10}(1+h)^{\frac{1}{h}} = \frac{1}{3} \log_{10} e$$

(2) $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\Delta x} \log_{10}\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)$

ここで $\dfrac{\Delta x}{x} = h$ とおくと $\Delta x \to 0$ のとき $h \to 0$ より

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{xh} \log_{10}(1+h) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{x} \log_{10}(1+h)^{\frac{1}{h}} = \frac{1}{x} \log_{10} e$$

問 2 の解答

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

ここで $\dfrac{\Delta x}{x} = h$ とおくと $\Delta x \to 0$ のとき $h \to 0$ より

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{xh} \log_a(1+h) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{x} \log_a(1+h)^{\frac{1}{h}} = \frac{1}{x} \log_a e$$

＜ 52 ページ. 自然対数 ＞

問 1 の解答

(1) $(\log_{10} x)' = \dfrac{1}{x}\log_{10} e$

(2) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x}\log_a e$

問 2 の解答

(答) $(\log_e x)' = \dfrac{1}{x}\log_e e = \dfrac{1}{x}$

問 3 の解答

(1) $\log e = 1$ (2) $\log(\sqrt[3]{e}) = \dfrac{1}{3}$ (3) $\log\left(\dfrac{1}{e}\right) = -1$ (4) $\log 1 = 0$

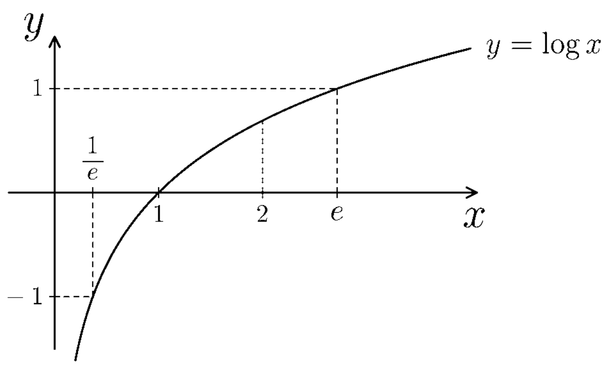
(5) $\ln\left(\dfrac{1}{e}\right) = -1$ (6) $\ln(\sqrt[4]{e}) = \dfrac{1}{4}$ (7) $\ln(e) = 1$ (8) $\ln(e\sqrt{e}) = \dfrac{3}{2}$

問 4 の解答

(1) $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$

(2) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

問 5 の解答



< 53 ページ.$\log f(x)$ の導関数 >

問 1 の解答

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2+2}{x^3+2x-5}$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

(3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin x}{5-\cos x}$

問 2 の解答

$$\boxed{\Big(\log(f(x))\Big)' = \frac{f'(x)}{f(x)}}$$

問 3 の解答

(1) $\Big(\log(x^2+2x)\Big)' = \dfrac{2x+2}{x^2+2x}$

(2) $\Big(\log(x^6+3x^4)\Big)' = \dfrac{6x^5+12x^3}{x^6+3x^4} = \dfrac{6x^2+12}{x^3+3x}$

(3) $\Big(\log(\sin x)\Big)' = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \cot x$

＜ 54 ページ. 逆関数の微分 1 ＞

問 1 の解答

$y = \cos^{-1} x \iff x = \cos y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}(\cos y)} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

よって $(\cos^{-1} x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

問 2 の解答

$y = \tan^{-1} x \iff x = \tan y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}(\tan y)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

よって $(\tan^{-1} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

＜ 55 ページ. 逆関数の微分 2 ＞

問 1 の解答

(1) $y = x^{\frac{1}{4}} \Longleftrightarrow x = y^4$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}(y^4)} = \frac{1}{4y^3} = \frac{1}{4x^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$$

よって $(x^{\frac{1}{4}})' = \dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$

(2) $y = x^{\frac{1}{n}} \Longleftrightarrow x = y^n$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}(y^n)} = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = nx^{\frac{1}{n}-1}$$

よって $(x^{\frac{1}{n}})' = nx^{\frac{1}{n}-1}$

問 2 の解答

(1) $y = 2^x \Longleftrightarrow x = \log_2 y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}(\log_2 y)} = \frac{1}{\frac{1}{y}\log_2 e} = \frac{y}{\log_2 e} = \frac{2^x}{\log_2 e}$$

よって $(2^x)' = \dfrac{2^x}{\log_2 e} = 2^x \log_e 2$

(2) $y = a^x \Longleftrightarrow x = \log_a y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}(\log_a y)} = \frac{1}{\frac{1}{y}\log_a e} = \frac{y}{\log_a e} = \frac{a^x}{\log_a e}$$

よって $(a^x)' = \dfrac{a^x}{\log_a e} = a^x \log_e a$

＜ 56 ページ. 指数関数の微分 ＞

問 1 の解答

(1) $\left(e^{3x}\right)' = 3e^{3x}$

(2) $\left(e^{x^2+3}\right)' = 2xe^{x^2+3}$

(3) $\left(e^{-x^2+2x}\right)' = (-2x+2)e^{-x^2+2x}$

問 2 の解答

$$\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} \times f'(x)$$

問 3 の解答

(1) $\left(e^{-3x}\right)' = -3e^{-3x}$

(2) $\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' - xe^{-\frac{x^2}{2}}$

< 57 ページ. 対数微分法 1 >

問 1 の解答

(解) $\log y = x \log 3$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \log 3 \Rightarrow y' = y \times \log 3 = 3^x \log 3$$

よって $(3^x)' = 3^x \log 3$

問 2 の解答

(解) $\log y = x \log a$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \log a \Rightarrow y' = a^x \log a$$

よって $(a^x)' = a^x \log a$

問 3 の解答

(答) $(e^x)' = e^x \log e = e^x$

< 58 ページ. 対数微分法 2 >

問 1 の解答

(解) $\log y = \dfrac{4}{3}\log x$ である. この両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{4}{3} \times \frac{1}{x} \times y = \frac{4}{3} \times \frac{1}{x} x^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}}$$

(答) $\left(x^{\frac{4}{3}}\right)' = \dfrac{4}{3} \times x^{\frac{1}{3}}$

問 2 の解答

(解) $y = x^r$ の両辺の自然対数をとると

$\log y = r \log x$ であり, この両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{r}{x} \Rightarrow y' = \frac{r}{x} \times y = \frac{r}{x} \times x^r = r x^{r-1}$$

(答) $(x^r)' = r x^{r-1}$

$<$ 59 ページ.x^r の導関数 $>$

問 1 の解答

(1) $\left(\sqrt[4]{x^5}\right)' = \dfrac{5}{4}x^{\frac{1}{4}} = \dfrac{5}{4}\sqrt[4]{x}$

(2) $\left(\sqrt[5]{x^7}\right)' = \dfrac{7}{5}x^{\frac{2}{3}} = \dfrac{7}{5}\sqrt[5]{x^2}$

(3) $\left(\sqrt{x^3}\right)' = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

問 2 の解答

(1) $\left(\dfrac{1}{x^3}\right)' = -3x^{-4} = -\dfrac{3}{x^4}$

(2) $\left(\dfrac{1}{x^4}\right)' = -4x^{-5} = -\dfrac{4}{x^5}$

(3) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$

問 3 の解答

(1) $\left(\sqrt[4]{x}\right)' = \dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

(2) $\left(\sqrt[5]{x^4}\right)' = \dfrac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}} = \dfrac{4}{5\sqrt[5]{x}}$

(3) $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

問 4 の解答

(1) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)' = -\dfrac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}-1} = -\dfrac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$

(2) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)' = -\dfrac{1}{4}x^{-\frac{1}{4}-1} = -\dfrac{1}{4x\sqrt[4]{x}}$

(3) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

< 60 ページ.$\log|x|$ の導関数 >

問の解答

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan x} = \dfrac{1}{\sin x \cos x}$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x+3}{x^2+3x}$

(3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

＜ 61 ページ. 微分の練習 2 ＞

問 1 の解答

(1) $\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

(2) $\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

問 2 の解答

(1) $(2e^x)' = 2e^x$

(2) $(3\log x)' = \frac{3}{x}$

(3) $(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

(4) $\left(\frac{1}{x^3}\right)' = -\frac{3}{x^4}$

(5) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

(6) $(e^{4x+1})' = 4e^{4x+1}$

(7) $\left(\log(5x)\right)' = \frac{1}{x}$

(8) $\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$

(9) $\left(\log\left(x^3\right)\right)' = \frac{3}{x}$

(10) $(\log|4x|)' = \frac{1}{x}$

(11) $(\log|\sin x|)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$

(12) $(x\sqrt{x})' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

(13) $\left(e^x \sin x\right)' = e^x \sin x + e^x \cos x$

(14) $\left(e^{3x}\cos(4x)\right)' = 3e^{3x}\cos(4x) - 4e^{3x}\sin(4x)$

(15) $(xe^{-x})' = e^{-x} - xe^{-x}$

(16) $(x^2\log|x|)' = 2x\log|x| + x$

問 3

$$\log y = x\log x$$

$$\frac{y'}{y} = 1\log x + 1$$

$$\begin{aligned} y' &= y \times (\log x + 1) \\ &= \underline{x^x(\log x + 1)} \end{aligned}$$

< 62 ページ. 接線の方程式 1 >

問の解答

(1) $y = x + 1$

(2) $y = x - 1$

(3) $y = x$

(4) $y = \dfrac{1}{4}x + 1$

(5) $y = -x + 2$

＜ 63 ページ. 接線の方程式 2 ＞

問の解答

(1) $y = 3x - \dfrac{\pi}{3} + \sqrt{3}$

(2) $y = -5\sqrt{3}x + \dfrac{5\sqrt{3}\pi}{6} + \dfrac{5}{2}$

(3) $y = 4x$

(4) $y = -\dfrac{1}{2}x - 1$

(5) $y = \dfrac{1}{6}x + \dfrac{3}{2}$

(6) $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{3}$

(7) $y = -\dfrac{1}{16}x + \dfrac{3}{4}$

(8) $y = -2x + 3$

(9) $y = 2x + 1$

(10) $y = 2ex - e$

(11) $y = \dfrac{1}{e}x$

(12) $y = x - 1 + \log 2$

< 64 ページ. 平均値の定理 >

問１の解答

$(a,\, b) = \{x : a < x < b\}$ $(a,\, +\infty) = \{x : a < x\}$ $(-\infty,\, b) = \{x : x < b\}$

$(a,\, b] = \{x : a < x \leqq b\}$ $[a,\, b) = \{x : a \leqq x < b\}$ $[a,\, +\infty) = \{x : a \leqq x\}$

問２の解答

$$\frac{b^2 - a^2}{b - a} = \frac{(b-a)(b+a)}{b-a} = b + a = f^{'}(c) = 2c$$

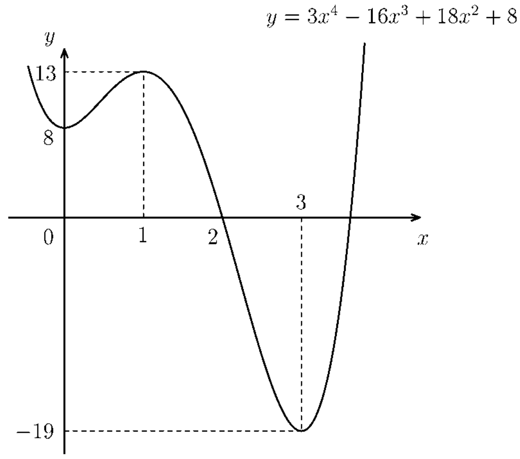
$$2c = a + b \Rightarrow \underline{c = \frac{a+b}{2}}$$

< 65 ページ. 関数の増減 >

問の解答

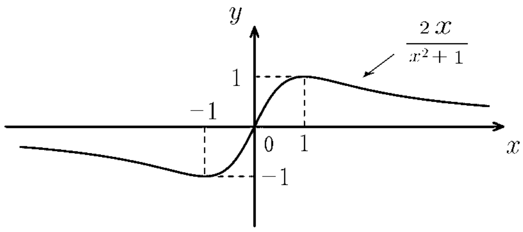
(1) $$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^3 - 48x^2 + 36x \\ &= 12x(x^2 - 4x + 3) \\ &= 12x(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	8	$\nearrow$	13	$\searrow$	-19	$\nearrow$



(2) $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x^2+1) - 2x \times 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2 - 2x^2}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$



＜ 66 ページ. 極大・極小 ＞

問の解答

(1) $y' = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$\times$	$-$	0	$+$
y	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$

$x=1$ のとき 極小値 $y=-1$

(極大値なし)

(2) $y' = (1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	$-\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\searrow$

$x=1$ のとき 極大値 $y=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

$x=-1$ のとき 極小値 $y=-\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

(3) $y' = 3x^2e^x + x^3e^x = x^2(3+x)e^x$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$\searrow$	$-\frac{27}{e^3}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

$x=-3$ のとき 極小値 $y=-\dfrac{27}{e^3}$

(極大値なし)

(4) $y' = \dfrac{2x(x-1)-x^2\times 1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\times$	$\searrow$	4	$\nearrow$

$x=0$ のとき 極大値 $y=0$

$x=2$ のとき 極小値 $y=4$