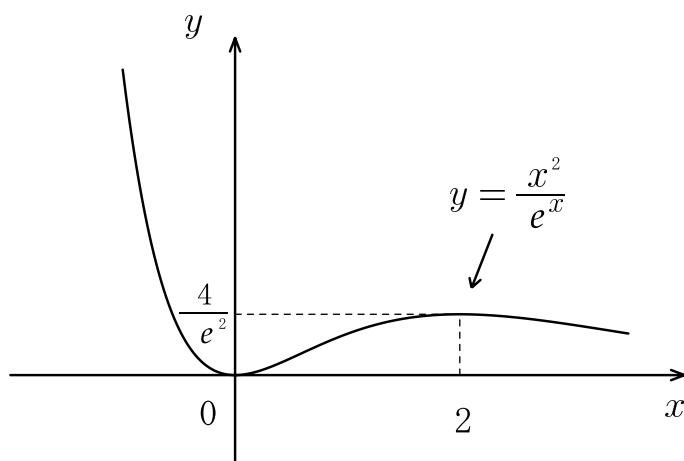




高知工科大学
Kochi University of Technology

数学 1

(2005年度版)



初等関数の微分法

(指数・対数・三角関数の微分法,
積・商・合成関数・逆関数の微分法)

井上 昌昭 著

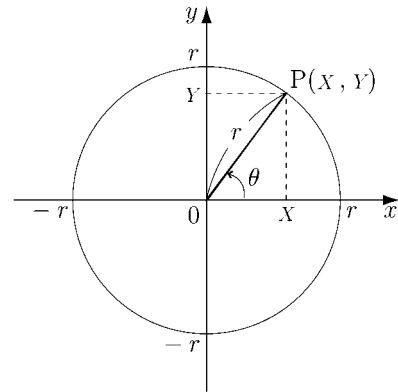
< 三角関数 >

x 軸の正の部分を通る始線とした一般角 θ の動径と、原点を中心とする半径 r の円との交点を $P(X, Y)$ とする。このとき

$$\frac{Y}{r}, \frac{X}{r}, \frac{Y}{X}$$

の値は、円の半径 r に関係なく、角度 θ によって定まる。これらを θ の三角関数といい、次のように書く。

$$\sin \theta = \frac{Y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{X}{r}, \quad \tan \theta = \frac{Y}{X}$$



(注) ただし $\tan \theta$ は $X = 0$ となるような角 θ に対しては定義されない。

三角関数の上記定義より次の性質がわかる。

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \dots (1)$$

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta, \quad \cos(-\theta) = \cos \theta, \quad \tan(-\theta) = -\tan \theta \quad \dots (2)$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, & \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \end{aligned} \quad \text{(加法定理)}$$

問 1 性質 (2) を用いて $\alpha - \beta$ の場合の加法定理を導け。

$$\sin(\alpha - \beta) = \qquad \qquad \qquad \cos(\alpha - \beta) =$$

$$\tan(\alpha - \beta) =$$

問 2 三角関数のグラフを () 内の範囲で描け。

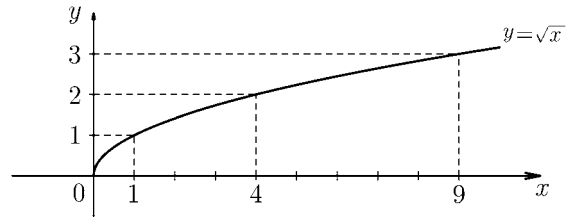
$$(1) y = \sin x \quad (-\pi \leq x \leq 3\pi) \qquad (3) y = \tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$(2) y = \cos x \quad (-\pi \leq x \leq 3\pi)$$

< 無理関数 >

$\sqrt{\quad}$ のついた関数を通常無理関数という。

例 1 無理関数 $y = \sqrt{x}$ の場合, 「 $\sqrt{\quad}$ の中が負になってはいけない」という制限が自動的につく。このような x の範囲 ($x \geq 0$) を **定義域** という。なお $\sqrt{\quad}$ の値は常に 0 以上だから y の範囲は $y \geq 0$ となる。 y の範囲を **値域** という。

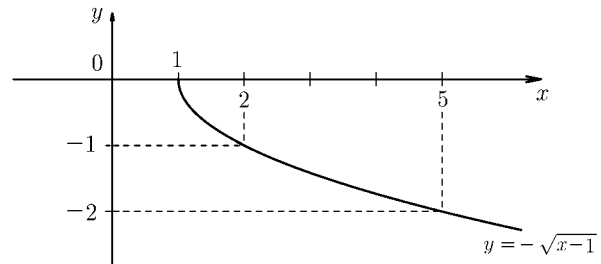


例 2 無理関数 $y = -\sqrt{x-1}$ の場合

定義域: $x \geq 1$

値域: $y \leq 0$

であり, グラフは右のようになる。



問 次の無理関数の定義域と値域を求め, グラフを描け。

(1) $y = \sqrt{x+2}$

(2) $y = \sqrt{3-x}$

(3) $y = -\sqrt{x-1}$

(4) $y = -\sqrt{-x-1}$

< 分数関数 >

定数 a, b, c に対し, 分数関数

$$y = \frac{a}{x-b} + c$$

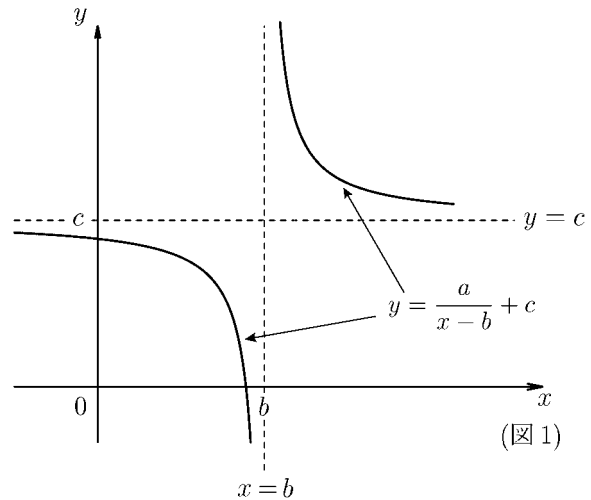
を考える。分母は 0 になってはいけないので $x - b \neq 0$ である。よって定義域は

定義域: $x \neq b$

また $a \neq 0$ であれば $\frac{a}{x-b} \neq 0$ であるから

$y \neq c$ である。よって値域は

値域: $y \neq c$



$a > 0$ のとき グラフは図 1 のようになる。このグラフは $y = \frac{a}{x}$ のグラフを x 軸方向に b , y 軸方向に c だけ平行移動したものである。 x が b から遠ざかり, $x \rightarrow +\infty$ または $x \rightarrow -\infty$ のとき, このグラフは直線 $y = c$ に近づく。また x が b に近づくとき, すなわち $x \rightarrow b+0$ または $x \rightarrow b-0$ のとき, このグラフは直線 $x = b$ に近づく。この 2 直線 $x = b$, $y = c$ をこのグラフの漸近線という。

問 1 $a < 0, b > 0, c > 0$ の場合,

$y = \frac{a}{x-b} + c$ のグラフを描け。

問 2 次の関数の定義域と値域および漸近線を求め, グラフを描け。

(1) $y = \frac{1}{x-3} + 2$

(2) $y = \frac{-1}{x+2} - 1$

< 絶対値 >

実数 x に対し，記号 $|x|$ を

$$\begin{cases} x > 0 \text{ のとき } |x| = x \\ x = 0 \text{ のとき } |0| = 0 \\ x < 0 \text{ のとき } |x| = -x \end{cases}$$

と定め， $|x|$ を x の絶対値という。

例 $|3.5| = 3.5$ ， $|-2| = -(-2) = 2$

問 1 次の値を求めよ。

(1) $|13.4| =$ (2) $|0.12| =$ (3) $|-0.5| =$ (4) $|-10.8| =$

問 2 次の表を完成し， $y = |x|$ のグラフを描け。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$ x $							

問 3 次の関数のグラフを描け。

(1) $y = |x + 1|$

(2) $y = 2|x - 1|$

(3) $y = |x^2 - 4|$

< ガウス記号 >

実数 x に対して、 x を超えない最大の整数を n とすると

$$n \leq x < n + 1, \quad n \text{ は整数}$$

の関係がある。この整数 n は x によって決まるので

$$n = [x]$$

と表す。この記号 $[x]$ を **ガウス記号** という。

- 例
- | | |
|-----------------|-----------------|
| $[1.5] = 1,$ | $[2.76] = 2$ |
| $[3.024] = 3,$ | $[4.8196] = 4$ |
| $[0.135] = 0,$ | $[-0.52] = -1$ |
| $[-1.23] = -2,$ | $[-2.746] = -3$ |

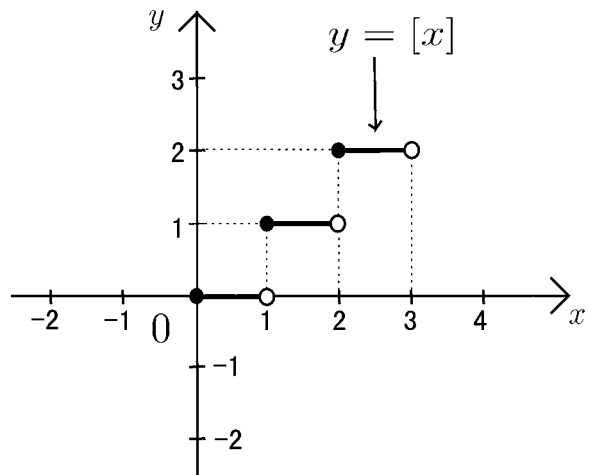
問 1 次の値を求めよ。

- | | | |
|----------------|-----------------|------------------|
| (1) $[1.23] =$ | (2) $[9.87] =$ | (3) $[0.9999] =$ |
| (4) $[-0.1] =$ | (5) $[-3.69] =$ | (6) $[-9.5] =$ |

問 2 関数 $f(x) = [x]$ のグラフを描きたい。

- $0 \leq x < 1$ のとき $[x] = 0$
- $1 \leq x < 2$ のとき $[x] = 1$
- $2 \leq x < 3$ のとき $[x] = 2$

だから $0 \leq x < 3$ の範囲では、 $y = [x]$ のグラフは右図のようになる。このグラフを $-2 \leq x < 4$ の範囲まで拡張せよ。



< 定義域の制限 >

関数の通常定義域をさらに制限する場合がある。
 そのような場合の定義域に対応する値域を考える。

例 1 $y = (x + 1)^2$ の通常定義域は実数全体
 であり、値域は $y \geq 0$ である。

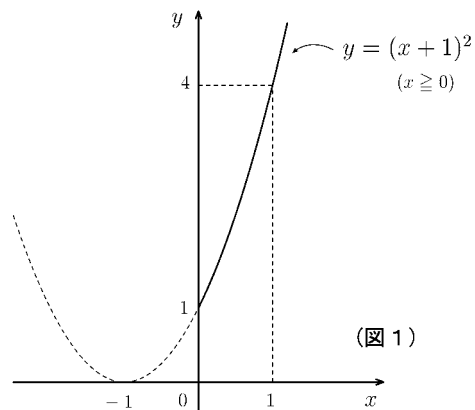
例 2 $y = (x + 1)^2$ の定義域を $x \geq 0$ に制限する
 場合の値域は $y \geq 1$ である。(図 1)

例 3 $y = \sqrt{x + 1}$ の通常定義域は $x \geq -1$ で
 あり値域は $y \geq 0$ である。

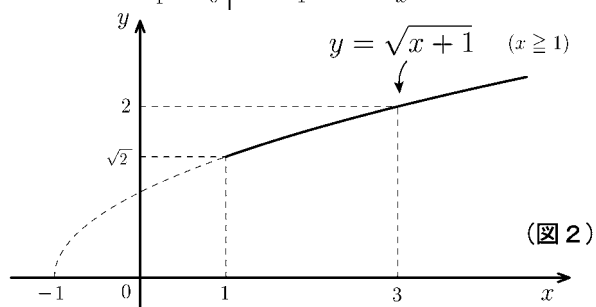
例 4 $y = \sqrt{x + 1}$ の定義域を $x \geq 1$ に制限する
 場合の値域は $y \geq \sqrt{2}$ である。(図 2)

例 5 $y = \log_2 x$ の通常定義域は $x > 0$ で
 あり値域は実数全体である。

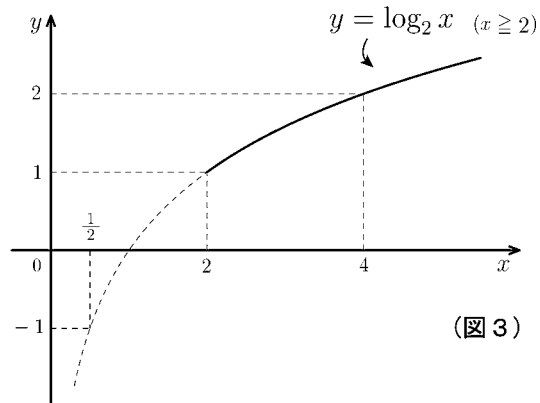
例 6 $y = \log_2 x$ の定義域を $x \geq 2$ に制限する
 場合の値域は $y \geq 1$ である(図 3)



(図 1)



(図 2)



(図 3)

問 次の関数の () 内の定義域に対応する値域を求めよ。

(1) $y = (x - 1)^2$ ($x \geq 2$)

(2) $y = \sqrt{x + 3}$ ($x \geq 1$)

(3) $y = \log_3 x$ ($x \geq 1$)

(4) $y = 2^x$ ($x \geq 0$)

(5) $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$)

(6) $y = \cos x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$)

< 単調関数 >

図 1 のように関数 $f(x)$ の定義域内の任意の 2 点 x_1, x_2 に対し,

$$x_1 < x_2 \quad \text{ならば} \quad f(x_1) < f(x_2)$$

が常に成り立つとき, $f(x)$ は定義域内で**単調増加**という。

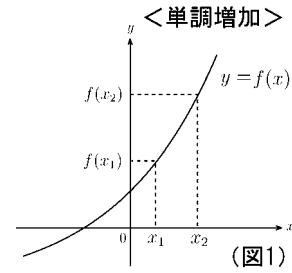
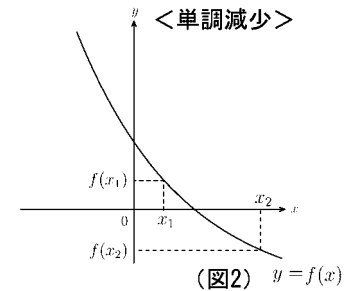


図 2 のように関数 $f(x)$ の定義域内の任意の 2 点 x_1, x_2 に対し,

$$x_1 < x_2 \quad \text{ならば} \quad f(x_1) > f(x_2)$$

が常に成り立つとき, $f(x)$ は定義域内で**単調減少**という。

単調増加関数および単調減少関数をまとめて**単調関数**という。

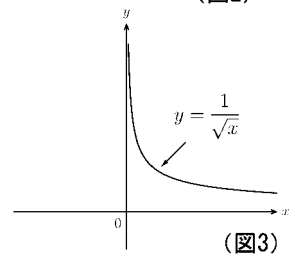


例 1 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ の定義域は $x > 0$ である。

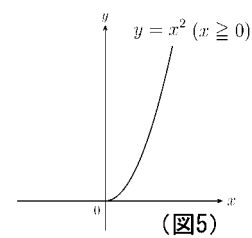
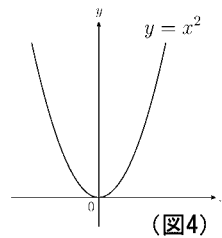
図 3 より定義域内で単調減少である。

例 2 $f(x) = x^2$ の定義域は実数全体である。

図 4 より単調関数ではない。



例 3 $f(x) = x^2$ ($x \geq 0$) は $y = x^2$ の定義域を $x \geq 0$ に制限した関数である。図 5 より定義域 ($x \geq 0$) 内で単調増加である。



問 次の関数が単調関数かどうか判断せよ。もし単調関数であれば, 単調増加か単調減少かを明記せよ。ただし () 内は定義域である。

(1) $y = 3x - 2$

(2) $y = x^3 - 3x$

(3) $y = -(x - 1)^2 \quad (x \geq 2)$

(4) $y = [x]$

(5) $y = \sin x$

(6) $y = \sin x \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$

< 逆関数 1 >

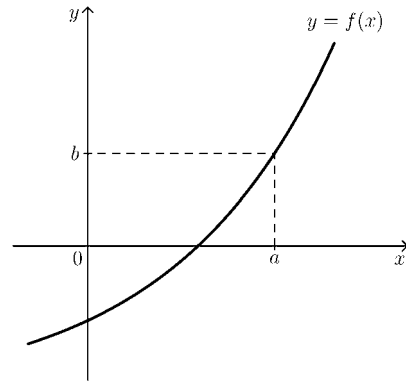
関数 $f(x)$ が単調関数であるとき、 y の値 b に対して、

$$b = f(a)$$

となるような x の値 a がただ 1 つ定まる。このとき

$$a = f^{-1}(b)$$

と書く。



例 $f(x) = 2x - 1$ のとき、

関数 $y = f(x)$ は単調関数である。

$$b = f(a)$$

とおくと、 $f(a) = 2a - 1$ より

$$b = 2a - 1$$

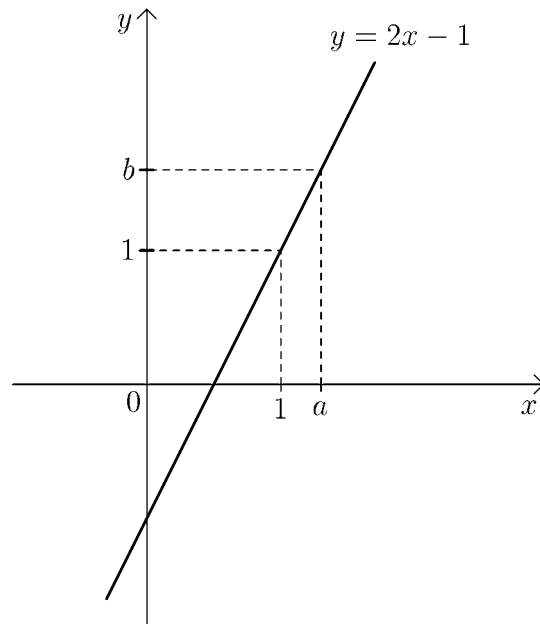
である。これを a について解くと

$$a = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}$$

となる。 $a = f^{-1}(b)$ であるから

$$f^{-1}(b) = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}$$

となる。



問 $f(x)$ が以下の場合に、関数 $y = f(x)$ はすべて定義域内で単調関数である。

このとき $f^{-1}(b)$ を b に関する式で表せ。

(1) $f(x) = 3x - 2$

(2) $f(x) = \frac{1}{x} + 2 \quad (x > 0)$

(3) $f(x) = \sqrt{x} \quad (x \geq 0)$

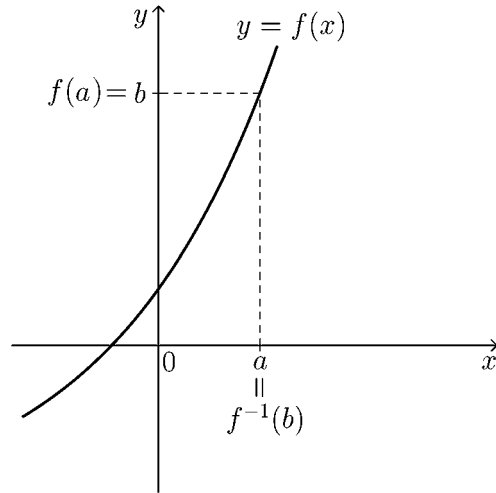
(解)

(解)

(解)

< 逆関数 2 >

関数 $y = f(x)$ が単調関数のとき、 y の値 b に x の値 $f^{-1}(b)$ を対応させる関係は関数と考えられる。この関数を $y = f^{-1}(x)$ と表して、関数 $y = f(x)$ の**逆関数**という。



例 $f(x) = 2x - 1$ の逆関数を求める。

$$b = f(a) \iff a = f^{-1}(b)$$

より

$$b = 2a - 1 \iff a = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2} = f^{-1}(b)$$

だから逆関数は

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

である。

(注) 次のようにして逆関数を求めてよい。

元の関数 : $y = 2x - 1$

↓ < x について解く >

$$x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$$

↓ < x と y を入れ替える >

逆関数 : $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

よって (答) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

問 $f(x)$ が以下の場合に、逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(1) $f(x) = 3x + 2$

(2) $f(x) = \frac{1}{x-1} \quad (x > 1)$

(3) $f(x) = \sqrt[3]{x} \quad (x \geq 0)$

< 逆関数 3 >

問 $f(x)$ が次の各場合に逆関数 $f^{-1}(x)$ を求め、元の関数と逆関数のグラフを同じ座標平面上に描け。

(1) $f(x) = x^2 + 1$ (定義域 $x \geq 0$)

(2) $f(x) = \sqrt{x+2}$ (定義域 $x \geq -2$)

< 逆関数 4 >

問 1 $f(x)$ が次の各場合に逆関数 $f^{-1}(x)$ とその定義域を求め、元の関数 $y = f(x)$ と逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフを同じ座標平面上に描け。

(1) $f(x) = 2^x$

(2) $f(x) = \log_3 x \quad (x > 0)$

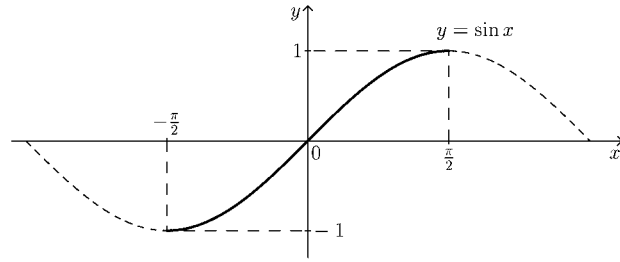
問 2 $f(x)$ が次の各場合に、逆関数 $f^{-1}(x)$ とその定義域を求めよ。

(1) $f(x) = \log_2 x \quad (x > 0)$

(2) $f(x) = 3^x$

< 逆三角関数 1 >

正弦関数 $y = \sin x$ の通常の変域は実数全体であり、値域は $-1 \leq y \leq 1$ である。この関数の変域を $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ に制限すると、単調増加になる。このとき、関数



$$y = \sin x \quad (\text{変域: } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \text{ 値域: } -1 \leq y \leq 1)$$

の逆関数が存在して、これを、

$$\boxed{y = \sin^{-1} x} \quad \text{又は} \quad \boxed{y = \arcsin x} \quad (\text{変域: } -1 \leq x \leq 1, \text{ 値域: } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2})$$

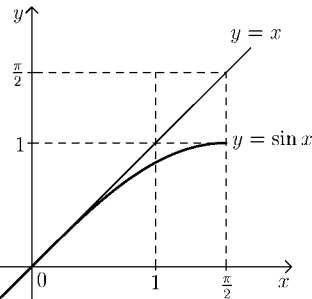
(インバースサイン) (アークサイン)

と表す。 $y = \sin^{-1} x$ のグラフは、 $y = \sin x$ のグラフを直線 $y = x$ に関して対称に折り返したものである。

(注) $\sin^{-1} x$ は $\frac{1}{\sin x}$ ではない。これを区別するため

$$\frac{1}{\sin x} = \operatorname{cosec} x \quad \text{と書く。}$$

問 1 右の座標平面上に $y = \sin^{-1} x$ のグラフを描け。



例 逆関数の定義より、

$$a = \sin^{-1} b \iff b = \sin a$$

である。例えば $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ の値 θ を求めようとすると、

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \iff \frac{1}{2} = \sin \theta$$

より、 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で $\sin \theta$ が

$\frac{1}{2}$ となる角度 θ を求める。右表より

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	-1				0	$\frac{1}{2}$			1

$\theta = \frac{\pi}{6}$ であるから (答) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

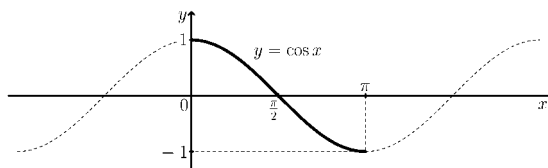
問 2 表を完成させよ。

問 3 次の値を求めよ。

$$(1) \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \quad (2) \sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \quad (3) \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) =$$

< 逆三角関数 2 >

余弦関数 $y = \cos x$ の通常の見域域は実数全体であり、値域は $-1 \leq y \leq 1$ である。この関数の見域域を $0 \leq x \leq \pi$ に制限すると、単調減少になる。そのとき、関数



$$y = \cos x \quad (\text{見域域: } 0 \leq x \leq \pi, \text{ 値域: } -1 \leq y \leq 1)$$

の逆関数が存在して、これを、

$$\boxed{y = \cos^{-1} x} \quad \text{又は} \quad \boxed{y = \arccos x} \quad (\text{見域域: } -1 \leq x \leq 1, \text{ 値域: } 0 \leq y \leq \pi)$$

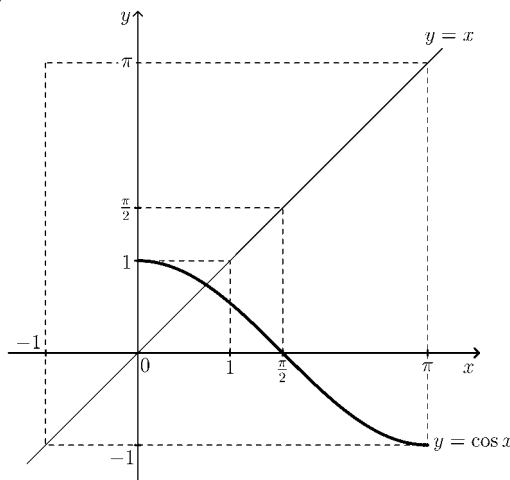
(インバースコサイン) (アークコサイン)

と表す。 $y = \cos^{-1} x$ のグラフは、 $y = \cos x$ のグラフを直線 $y = x$ に関して対称に折り返したものである。

(注) $\cos^{-1} x$ は $\frac{1}{\cos x}$ ではない。これを区別するため

$$\frac{1}{\cos x} = \sec x \quad \text{と書く。}$$

問 1 右の座標平面上に $y = \cos^{-1} x$ のグラフを描け。



例 逆関数の見域域より、

$$a = \cos^{-1} b \iff b = \cos a$$

である。例えば $\cos^{-1} \left(\frac{1}{2} \right)$ の値 θ を求めようとすると、

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) \iff \frac{1}{2} = \cos \theta$$

より、 $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲で $\cos \theta$ が $\frac{1}{2}$ となる角度 θ を求める。右表より

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos \theta$	1			$\frac{1}{2}$	0				-1

$$\theta = \frac{\pi}{3} \quad \text{であるから (答) } \cos^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{3}$$

問 2 表を完成させよ。

問 3 次の値を求めよ。

$$(1) \cos^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \quad (2) \cos^{-1} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \quad (3) \cos^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right) =$$

< 逆三角関数 3 >

正接関数 $y = \tan x$ の通常 の定義域は $\frac{\pi}{2} + n\pi$ (n は整数) 以外の実数であり、
 値域は実数全体である。この関数の
 定義域を $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ に制限すると、
 単調増加になる。そのとき、関数

$$y = \tan x \quad \left(\text{定義域: } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \text{ 値域: 実数全体} \right)$$

の逆関数が存在して、これを、

$$\boxed{y = \tan^{-1} x} \quad \text{又は} \quad \boxed{y = \arctan x} \quad \left(\text{定義域: 実数全体, 値域: } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \right)$$

(インバースタンジェント) (アークタンジェント)

と表す。 $y = \tan^{-1} x$ のグラフは、 $y = \tan x$ のグラフを直線 $y = x$ に関して対称に折り返したものである。

(注) $\tan^{-1} x$ は $\frac{1}{\tan x}$ ではない。これを区別するため

$$\frac{1}{\tan x} = \cot x \text{ と書く。}$$

問 1 右の座標平面上に $y = \tan^{-1} x$ のグラフを描け。

例 逆関数の定義より、

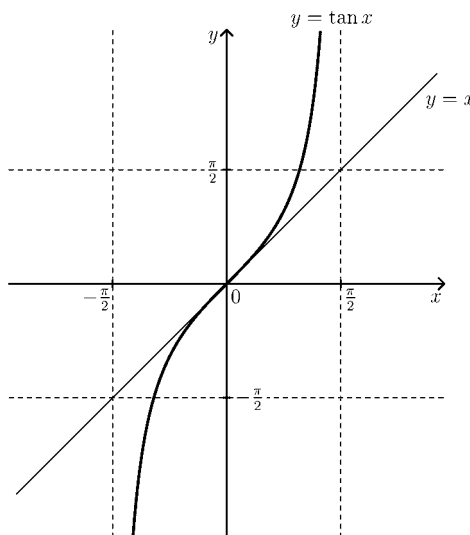
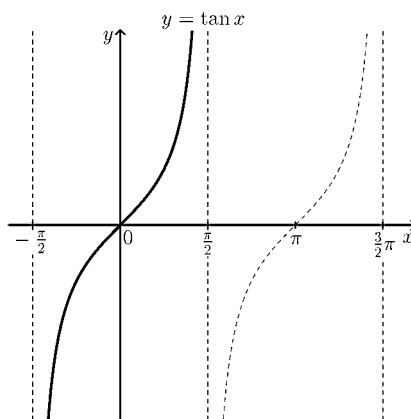
$$a = \tan^{-1} b \iff b = \tan a$$

である。例えば $\tan^{-1}(\sqrt{3})$ の値 θ を
 求めようとするとき、

$$\theta = \tan^{-1}(\sqrt{3}) \iff \sqrt{3} = \tan \theta$$

より、 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で $\tan \theta$ が
 $\sqrt{3}$ となる角度 θ を求める。右表より
 $\theta = \frac{\pi}{3}$ であるから

$$\text{(答) } \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$



θ	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan \theta$				0			$\sqrt{3}$

問 2 表を完成させよ。

問 3 次の値を求めよ。

$$(1) \tan^{-1}(1) = \quad (2) \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \quad (3) \tan^{-1}(-\sqrt{3}) =$$

< 逆三角関数の練習 >

問 1 次の関数の逆関数を求め、元の関数と逆関数のグラフを
同じ座標平面上に描け。

(1) $y = 2x - 1$

(2) $y = x^2 - 2$ (定義域 $x \geq 0$)

(3) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ (定義域 $x > 0$)

問 2 次の関数の値を求めよ。

(1) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

(2) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

(3) $\tan^{-1}(\sqrt{3})$

(4) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(5) $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(6) $\arctan(-1)$

(7) $\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

(8) $\sec\left(\frac{2}{3}\pi\right)$

(9) $\cot\left(\frac{3}{4}\pi\right)$

< 数列 >

ある規則に従って並んでいる数の列を**数列**という。数列の各数を**項**といい、最初の項から順に**第1項**，**第2項**，**第3項**， \dots ，**第 n 項**， \dots という。特に第1項を**初項**という。第 n 項が n についての式で表されるとき、これを**一般項**という。第 n 項が a_n である数列を $\{a_n\}$ のように表す。

問1 数列の各項と1つ前の項との差が一定の数の場合に、その数列を**等差数列**といい、前の項との差を**公差**という。

初項 a ，公差 d の等差数列

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, \dots$$

の一般項 a_n を求めよ。

問2 次の等差数列の一般項 a_n を求めよ。

(1) $1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$

(2) $5, 9, 13, 17, 21, 25, \dots$

問3 数列の各項と1つ前の項との比が一定の数のとき、その数列を**等比数列**といい、前の項との比を**公比**という。

初項 a ，公比 r の等比数列

$$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \dots$$

の一般項 a_n を求めよ。

問4 次の等比数列の一般項 a_n を求めよ。

(1) $3, 6, 12, 24, 48, 96, \dots$

(2) $4, 12, 36, 108, 324, 972, \dots$

(3) $81, 27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \dots$

(4) $8, -4, 2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \dots$

(5) $1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, \dots$

< 等比数列の和 >

問 1 初項 a ，公比 $r(\neq 1)$ の等比数列の第 n 項までの和

$$S = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \quad \cdots \textcircled{1}$$

を求めたい。①式を r 倍すると

$$rS = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。①式 - ②式から S を求めよ。

問 2 次の等比数列の和を求めよ。

(1) $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1}$

(2) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$

(3) $5 + 5 \times 3 + 5 \times 3^2 + \cdots + 5 \times 3^{n-1}$

(4) $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \cdots + \frac{3}{10^n}$

< 数列の極限 2 >

$n \rightarrow \infty$ のとき数列 a_n が限りなく大きくなるとき $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ と書き、数列 $\{a_n\}$ は**正の無限大に発散する**という。次の定理が成り立つ。

1. $\boxed{\text{定数 } \varepsilon > 0 \text{ に対し, } \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon \times n = \infty}$ (塵も積もれば山となる)

2. $\boxed{r > 1 \text{ である定数 } r \text{ に対し, } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty}$

3. $\boxed{0 < r < 1 \text{ である定数 } r \text{ に対し, } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0}$

問 次の極限值を求めよ。ただし $1 > \varepsilon > 0$ とする。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} 0.001n$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + 0.001^n}$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1.01)^n$

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} 3 \times (0.9)^n$

(7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}}$

(8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(1 - \varepsilon^n)}{1 - \varepsilon}$

(9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{2^n + 3^n}$

(10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{2^n + 3^n}$

(11) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{4^n + 3^n}$

(12) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (0.9)^n}{1 - 0.9}$

(13) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n}$

(14) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n}$

(15) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^{-n}$

(16) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{-n}$

< 数列の極限 3 >

$n \rightarrow \infty$ のとき数列 a_n は負の数で、絶対値が限りなく大きくなるとき、 $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty}$ と書き、数列 $\{a_n\}$ は負の無限大に発散するという。

例 1 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - n^2) = -\infty$

(注) 通常の無限大 (∞) を 負の無限大 ($-\infty$) と区別するために $+\infty$ と書くことがある。 $+\infty$ を正の無限大といい、 $-\infty$ を負の無限大という。

例 2 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^3 - n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) = +\infty \times (1 - 0) = +\infty$

例 3 $\lim_{n \rightarrow \infty} (2^n - 3^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \times \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right) = +\infty \times (0 - 1) = -\infty$

問 1 次の極限值を求めよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^3 - n^4)$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^5 - n^4)$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (4^n - 3^n)$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (4^n - 5^n)$

例 4 $\lim_{n \rightarrow -\infty} 2^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$

問 2 次の極限值を求めよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow -\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n$

(2) $\lim_{n \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$

(3) $\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{4^n}{2^n + 3^n}$

< 無限級数 >

数列 $\{a_n\}$ の各項を順に加えていった式

$$(1) a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

を**無限級数**という。数列 $\{a_n\}$ について、

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

を初項から第 n 項までの**部分和**という。部分和を作る数列

$$S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n, \cdots$$

が収束して、その極限值が S (つまり $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$) のとき、無限級数 (1) は S に**収束する**といい、

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = S$$

と書いて、 S を**無限級数の和**という。

例 無限級数

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

の部分 and を S_n とすると S_n は

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \quad (\text{初項 } \frac{1}{2}, \text{ 公比 } \frac{1}{2} \text{ の等比数列の和})$$

だから、18 ページより

$$S_n = \frac{\frac{1}{2} (1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$n \rightarrow \infty$ のとき $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$ だから

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) = 1$$

(注) この例のように数列が等比数列の場合に、この無限級数を**無限等比級数**という。

問 次の無限級数の和 S を求めよ。

$$(1) \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \cdots$$

$$(2) \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots + \frac{1}{10^n} + \cdots$$

< 無限等比級数 >

問 1 $0 < r < 1$ とする。初項 a ，公比 r の無限等比級数

$$S = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

を求めたい。次の各問に答えよ。

(1) 次の極限值を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ar^n =$$

(2) 第 n 項までの部分 and $S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$ を求めよ。

(3) S を求めよ。

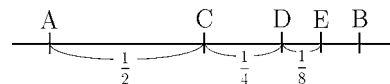
問 2 問 1 の結果を用いて次の等比級数の和を求めよ。

(1) $4 + 2 + 1 + \cdots + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots$

(2) $\frac{3}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{3}{10} \times \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \cdots + \frac{3}{10} \times \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} + \cdots$

問 3 古代ギリシヤの哲学者ゼノン（前 5 世紀頃）の示した次の逆理（パラドックス）に反論せよ。

< 逆理 > 「運動している物体が点 A から点 B に進む時には、その中間点 C を通過しなければならない。さらに C に到達したら C と B の中間点 D を通過しなければならない。このような中間点は無限にあるから点 B には決して到達できない。」



< 循環小数 1 >

分数は有限小数かまたは循環する無限小数で表される。

例 1 $\frac{1}{8} = 0.125$, $\frac{1}{25} = 0.04$, $\frac{3}{40} = 0.075$

(注) 分母が 2 または 5 の積の場合は必ず有限小数で表される。

それ以外の場合は必ず循環する無限小数になる。これは
小数を 10 進法で表しているからである。

例 2 $\frac{1}{3} = 0.3333333\cdots$, $\frac{1}{6} = 0.166666\cdots$
 $\frac{7}{12} = 0.583333\cdots$, $\frac{4}{11} = 0.363636\cdots$
 $\frac{853}{1665} = 0.5123123123123\cdots$

$$\begin{array}{r} 0.3636 \\ \hline 11 \overline{) 40} \\ \underline{33} \\ 70 \\ \underline{66} \\ 40 \\ \underline{33} \\ 70 \\ \underline{66} \\ 4 \end{array}$$

このように同じ数が無限に繰り返される小数を**循環小数**という。

限りなく続くことをあらわすために、
繰り返される最初と最後の数の
上にドット(黒丸)を付けて表す。

例えば

$$\frac{1}{3} = 0.3333\cdots = 0.\dot{3}$$

$$\frac{1}{6} = 0.16666\cdots = 0.1\dot{6}$$

$$\frac{7}{12} = 0.58333\cdots = 0.58\dot{3}$$

$$\frac{4}{11} = 0.363636\cdots = 0.\dot{3}\dot{6}$$

$$\frac{853}{1665} = 0.5123123123\cdots = 0.51\dot{2}\dot{3}$$

$$\begin{array}{r} 0.5123123 \\ \hline 1665 \overline{) 8530} \\ \underline{8325} \\ \boxed{2050} \\ \underline{1665} \\ 3850 \\ \underline{3330} \\ 5200 \\ \underline{4995} \\ \boxed{2050} \\ \underline{1665} \\ 3850 \\ \underline{3330} \\ 5200 \\ \underline{4995} \\ \boxed{2050} \end{array}$$

等で表す。

問 次の分数を小数になおせ。

(1) $\frac{11}{16}$

(2) $\frac{3}{125}$

(3) $\frac{31}{80}$

(4) $\frac{5}{12}$

(5) $\frac{4}{33}$

(6) $\frac{15}{37}$

< 循環小数 2 >

例 (1) $0.\dot{3} = 0.3333\cdots = 0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + 0.00003 + \cdots$

$$= \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \frac{3}{100000} + \cdots$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{3}{10} \times \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{3}{10} \times \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \frac{3}{10} \times \left(\frac{1}{10}\right)^4 + \cdots$$

より初項 $a = \frac{3}{10}$, 公比 $r = \frac{1}{10}$ の無限等比級数の和であるから

$$0.\dot{3} = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

(2) $0.\dot{3}\dot{6} = 0.36363636\cdots = 0.36 + 0.0036 + 0.000036 + 0.00000036 + \cdots$

$$= \frac{36}{100} + \frac{36}{10000} + \frac{36}{1000000} + \frac{36}{100000000} + \cdots$$

$$= \frac{36}{100} + \frac{36}{100} \times \left(\frac{1}{100}\right) + \frac{36}{100} \times \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \frac{36}{100} \times \left(\frac{1}{100}\right)^3 + \cdots$$

$$= \frac{\frac{36}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$$

問 次の循環小数を分数になおせ。

(1) $0.\dot{5} = 0.5555\cdots =$

(2) $0.\dot{9} = 0.9999\cdots =$

(3) $0.\dot{1}\dot{2} = 0.12121212\cdots =$

(4) $0.\dot{4}\dot{3} = 0.434343\cdots =$

(5) $0.\dot{1}2\dot{3} = 0.123123123123\cdots =$

< 小数の表示 >

例 1 (1) $0.\dot{9} = 0.9999\cdots = 1$ (前ページ問(2)より)

(2) $0.0\dot{9} = 0.09999\cdots = 0.09 + 0.009 + 0.0009 + 0.00009 + \cdots$

$$= 0.09 + 0.09 \times \frac{1}{10} + 0.09 \times \left(\frac{1}{10}\right)^2 + 0.09 \times \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \cdots$$

$$= \frac{0.09}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{0.09}{\frac{9}{10}} = \frac{0.9}{9} = 0.1$$

例 2 $0.00\dot{9} = 0.009999\cdots = 0.009 + 0.0009 + 0.00009 + 0.000009 + \cdots$

$$= 0.009 + 0.009 \times \frac{1}{10} + 0.009 \times \left(\frac{1}{10}\right)^2 + 0.009 \times \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \cdots$$

$$= \frac{0.009}{1 - \frac{1}{10}} = 0.01$$

問 1 次の循環小数を有限小数になおせ。

(1) $0.000\dot{9} =$

(2) $0.0000\dot{9} =$

例 3 (1) $1.\dot{9} = 1.9999\cdots = 1 + 0.9999\cdots = 1 + 0.\dot{9} = 1 + 1 = 2$

(2) $2.4\dot{9} = 2.4 + 0.0\dot{9} = 2.4 + 0.1 = 2.5$

(3) $3.13\dot{9} = 3.13 + 0.00\dot{9} = 3.13 + 0.01 = 3.14$

問 2 次の循環小数を整数または有限小数になおせ。

(1) $9.\dot{9} =$

(2) $0.1\dot{9} =$

(3) $2.78\dot{9} =$

(4) $5.0123\dot{9} =$

< 関数の極限 >

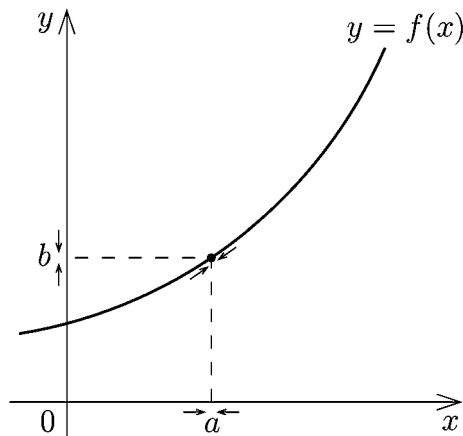
関数 $f(x)$ の定義域内で、 x が a と異なる値をとりながら、 a に限りなく近づくとき、どのように近づいても $f(x)$ の値が一定の値 b に限りなく近づくならば、これを

$$x \rightarrow a \text{ のとき } f(x) \rightarrow b$$

または

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

と表し、 b を、 x が a に限りなく近づくときの $f(x)$ の極限值という。



例 1 $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x^2 + 2x} = \sqrt{3^2 + 2 \times 3} = \sqrt{9 + 6} = \sqrt{15}$

例 2 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{2^2 - 1}{2 - 1} = 3$

例 3 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$

(注) 例 3 の場合 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ は $x = 1$ では定義されていない。無理に代入すると $f(1) = \frac{0}{0}$ の形で計算できないので、分子を因数分解して代入できる形になおしてから $x = 1$ を代入する。

例 4 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x - 2)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x - 2) = -1 - 2 = -3$

問 次の極限值を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x + 1}$

(2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \cos x$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x$

(4) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \log_2 x$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

(6) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1}$

(7) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$

(8) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x + 2}$

< 左極限・右極限 1 >

1. < 左表現・右表現 >

P26 の結果より 1 を循環小数によって 2 通りに表すことができる。

$$1 = 0.\dot{9} = 0.99999\dots \quad (\text{左表現})$$

$$1 = 1.\dot{0} = 1.00000\dots \quad (\text{右表現})$$

この場合に $0.\dot{9}$ を 1 の **左表現** , $1.\dot{0}$ を 1 の **右表現** ということにする。

(注) この用語「左表現」「右表現」は数学で一般的に使われる用語ではなく、ワークブックだけで便宜上用いる言葉である。

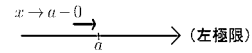
- 例 1** (1) 3 の左表現 = $2.\dot{9}$, 3 の右表現 = $3.\dot{0}$
 (2) 2.5 の左表現 = $2.4\dot{9}$, 2.5 の右表現 = $2.5\dot{0}$

- 問 1** (1) 10 の左表現 = _____ , 10 の右表現 = _____
 (2) 5.3 の左表現 = _____ , 5.3 の右表現 = _____

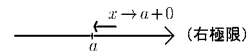
2. < 左極限・右極限 >

変数 x が a に近づくとき、

- (1) a より小さい値をとりながら a に近づく場合に $x \rightarrow a - 0$



- (2) a より大きい値をとりながら a に近づく場合に $x \rightarrow a + 0$



と表し、(1) を a への**左側からの極限 (左極限)**、(2) を a への**右側からの極限 (右極限)** という。

例 2 $\lim_{x \rightarrow 2-0} [x]$ を考える。

$x \rightarrow 2-0$ とは $x = 1.9, x = 1.99, x = 1.999, \dots$

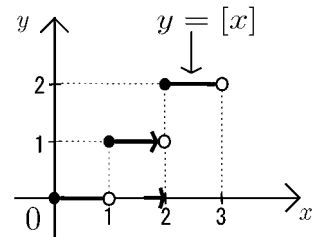
というふうに 2 より小さい値をとりながら 2 に近づく極限である。

ガウス記号 $[x]$ の定義より

$$[1.9] = 1, [1.99] = 1, [1.999] = 1, \dots$$

より

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} [x] = 1$$



例 3 $\lim_{x \rightarrow 2+0} [x]$ を考える。

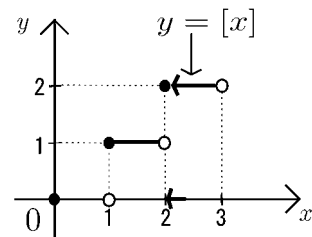
$x \rightarrow 2+0$ とは $x = 2.1, x = 2.01, x = 2.001, \dots$

というふうに 2 より大きい値をとりながら 2 に近づく極限である。

$$[2.1] = 2, [2.01] = 2, [2.001] = 2, \dots$$

より

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} [x] = 2$$



問 2 次の極限值を求めよ。

- (1) $\lim_{x \rightarrow 1-0} [x] =$ (2) $\lim_{x \rightarrow 1+0} [x] =$
 (3) $\lim_{x \rightarrow 3-0} [x] =$ (4) $\lim_{x \rightarrow 3+0} [x] =$

< 左極限・右極限 3 >

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$	\iff	x が a 以外の値をとりながら a に限りなく近づくとき、 どのように近づいても $f(x)$ の値は b に限りなく近づく
-----------------------------------	--------	--

より、次の定理が成り立つ。

[定理]

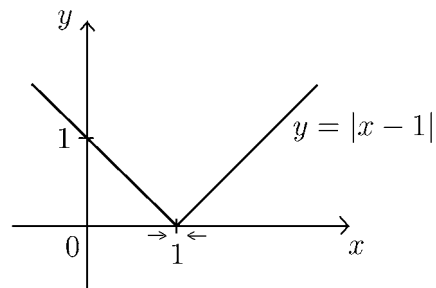
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$	であることと	$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$ かつ $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$	は
同等である。			

例 1 $f(x) = |x - 1|$ のとき

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} |x - 1| = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x - 1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} |x - 1| = \lim_{x \rightarrow 1-0} -(x - 1) = 0$$

より左右の極限が一致するので $\lim_{x \rightarrow 1} |x - 1| = 0$ である。

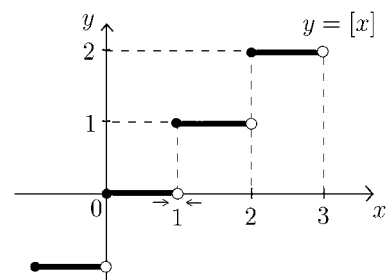


例 2 $f(x) = [x]$ (ガウス記号) の場合

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} [x] = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} [x] = 0$$

であるから左極限と右極限の値がちがうので、
 極限值 $\lim_{x \rightarrow 1} [x]$ は、存在しない。



問 $f(x)$ が以下の場合、次の左極限と右極限を求め、両方が一致した場合は $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ の形で書け。

(1) $f(x) = |x - 2|$ $\lim_{x \rightarrow 2+0} |x - 2| =$ $\lim_{x \rightarrow 2-0} |x - 2| =$

(2) $f(x) = \frac{|x|}{x}$ $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{|x|}{x} =$ $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{|x|}{x} =$

< 極限の練習 >

問 1 次の無限等比級数の和を求めよ。

(1) $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$

(2) $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \dots$

問 2 次の分数を小数になおせ。

(1) $\frac{11}{12}$

(2) $\frac{3}{7}$

問 3 次の循環小数を分数になおせ。

(1) $0.\dot{7} = 0.777\dots =$

(2) $0.\dot{1}\dot{3} = 0.13131313\dots =$

問 4 次の等式で正しいものは○, 正しくないものには×をつけ, 正しくない理由を書け。

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = 1$

(3) $\lim_{x \rightarrow 1-0} [x] = 0$

問 5 関数 $y = f(x)$ のグラフが右図のような場合に

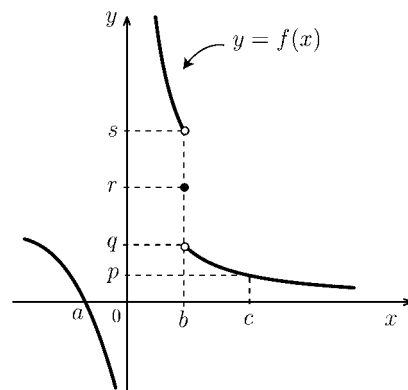
次の極限值を求めよ。(極限值が存在しない場合はそのように記せ。)

$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) =$, $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) =$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) =$, $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) =$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$

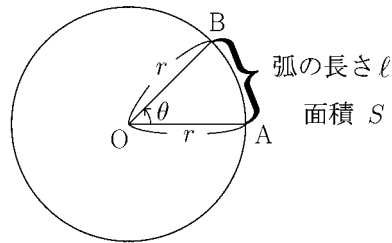
$\lim_{x \rightarrow b+0} f(x) =$, $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) =$, $\lim_{x \rightarrow b} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow c+0} f(x) =$, $\lim_{x \rightarrow c-0} f(x) =$, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) =$



< 弧度法の復習 >

中心角 θ ，半径 r の扇形 OAB
 の弧の長さ l と扇形 OAB の
 面積 S を求めたい。



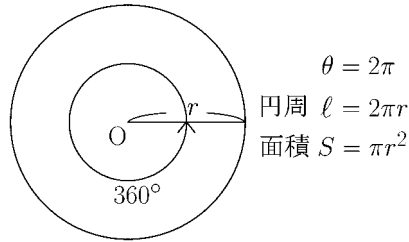
(1) $\theta = 2\pi$ (ラジアン) = 360° のときは

l は円周の長さだから

$$l = 2\pi r$$

であり S は円の面積だから

$$S = \pi r^2$$

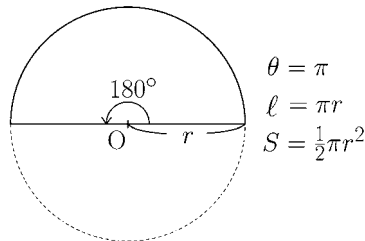


(2) $\theta = \pi$ (ラジアン) = 180° のときは

(1) の半分であるから

$$l = \pi r$$

$$S = \frac{1}{2}\pi r^2$$



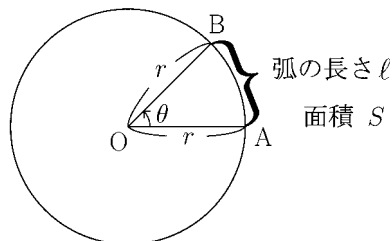
問 1 次の表を完成させよ。

度数法	$180^\circ/\pi$		60°	90°	120°		360°
弧度法 θ	1	$\frac{\pi}{4}$				π	
弧の長さ l		$\frac{1}{4}\pi r$				πr	$2\pi r$
面積 S				$\frac{1}{4}\pi r^2$			πr^2

問 2 上の表を参考にして，一般に角度が θ (ラジアン) であるとき
 弧の長さ l と扇形 OAB の面積 S を r と θ を用いて表せ。

$l =$

$S =$

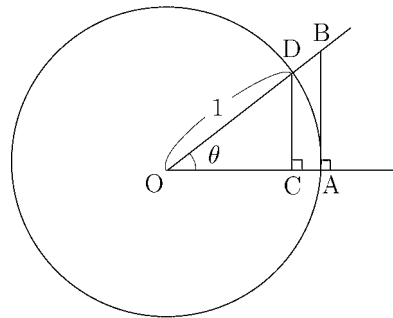


< 三角関数の極限 1 >

[定理] $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$

[証明] 次の不等式が成り立つ。

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき $\sin \theta < \theta < \tan \theta$ (*)



これは右図のような中心 O, 半径 1 の円 (OA=OD=1) で,
 CD の長さ = $\sin \theta$, 弧 AD の長さ = θ , AB の長さ = $\tan \theta$ であり,
 CD < 弧 AD < AB による。この不等式 (*) の厳密な証明はワークブックの
 ホームページで「数学小話」の中の「三角関数の極限について」に書いてある。

(*) 式より

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき $\cos \theta < \frac{\sin \theta}{\theta} < 1$ (**)

が導かれる。ここで $\theta \rightarrow +0$ のときは

$$\lim_{\theta \rightarrow +0} \cos \theta \leq \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\sin \theta}{\theta} \leq 1$$

であり, $\cos 0 = 1$ より

$$\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \quad (***)$$

また $\theta \rightarrow -0$ のときは $\theta = -\theta_1$ とおくと $\theta_1 \rightarrow +0$ だから

$$\lim_{\theta \rightarrow -0} \frac{\sin \theta}{\theta} = \lim_{\theta_1 \rightarrow +0} \frac{\sin(-\theta_1)}{-\theta_1} = \lim_{\theta_1 \rightarrow +0} \frac{-\sin \theta_1}{-\theta_1} = \lim_{\theta_1 \rightarrow +0} \frac{\sin \theta_1}{\theta_1} = 1$$

より

$$\lim_{\theta \rightarrow -0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \quad (***)$$

がわかる。(***) と (***) より定理が証明された。 (証明終)

問 (*) から (**) を導け。

< 三角関数の極限 2 >

前ページの結果より

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

が成り立つ。この極限の応用問題を練習する。

$$\text{例 1} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \times \frac{\sin(2x)}{2x} = 2 \times 1 = 2$$

$$\begin{aligned} \text{例 2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1^2 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \frac{1}{1 + \cos x} = 1^2 \times \frac{1}{1 + \cos 0} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

問 次の極限值を求めよ。

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{3x}$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(5x)}$$

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$$

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$$

< 三角関数の極限 3 >

前ページの結果より

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$$

が成り立つ。

$$\begin{aligned} \text{例} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + h\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin\frac{\pi}{2} \cos h + \cos\frac{\pi}{2} \sin h - \sin\frac{\pi}{2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin\frac{\pi}{2} (\cos h - 1) + \cos\frac{\pi}{2} \sin h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin\frac{\pi}{2} (\cos h - 1)}{h} + \frac{\cos\frac{\pi}{2} \sin h}{h} \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \left(\sin\frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \left(\cos\frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{\sin h}{h}\right) \right\} = \left(\sin\frac{\pi}{2}\right) \times 0 + \left(\cos\frac{\pi}{2}\right) \times 1 \\ &= \cos\frac{\pi}{2} = 0 \end{aligned}$$

問 次の極限值を求めよ。

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} + h\right) - \sin\frac{\pi}{3}}{h}$$

$$(2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x + h) - \sin x}{h}$$

$$(3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x + h) - \cos x}{h}$$

< 関数の連続性 >

関数 $f(x)$ の定義域内の点 a に対し

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

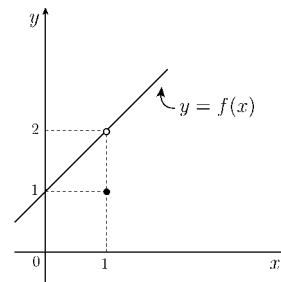
が成り立つとき、 $f(x)$ は $x = a$ で連続であるという。

例 1 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ は $x = 1$ が定義域にないので、 $x = 1$ で連続ではない。

例 2 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & : x \neq 1 \\ 1 & : x = 1 \end{cases}$ のとき

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

$f(1) = 1$ より $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$ だから $x = 1$ で $f(x)$ は連続ではない。



例 3 $f(x) = [x]$ (ガウス記号) のとき、

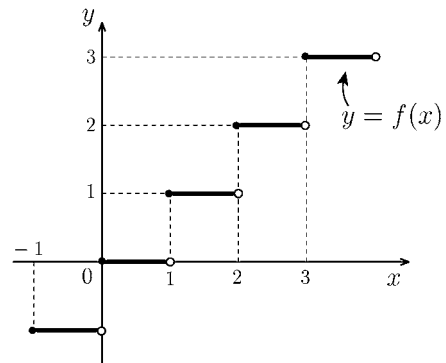
$[x]$ は x を超えない最大の整数であるから、

$y = f(x)$ のグラフは右図のようになる。これから

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 1$$

であるから、 $x \rightarrow 1$ のときの $f(x)$ の極限はない。

従って $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ の値が存在しないので、 $x = 1$ で連続ではない。



(注) 例 2, 例 3 のように連続でない場合を**不連続**という。不連続の場合はグラフが繋がっていない。

問 $f(x)$ が次の関数のとき、() 内の点で連続かどうか判定し、その理由を述べよ。

(1) $f(x) = \tan x$ ($x = \frac{\pi}{2}$)

(2) $f(x) = |x|$ ($x = 0$)

(3) $f(x) = x - [x]$ ($x = 1$)

< 微分可能性 1 >

関数 $f(x)$ と定数 a において, 極限值

$$(*) \quad \boxed{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}} \quad (= f'(a)) \quad : \quad \text{微分係数}$$

が存在するとき, 関数 $f(x)$ は $x = a$ で**微分可能**であるという。

この極限値を $x = a$ における**微分係数**といい, $f'(a)$ で表す。

(*) の右極限と左極限を

$$(*)_+ \quad \boxed{\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}} \quad (= f'_+(a)) \quad : \quad \text{右微分係数}$$

$$(*)_- \quad \boxed{\lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}} \quad (= f'_-(a)) \quad : \quad \text{左微分係数}$$

と書き, $f(x)$ の $x = a$ における**右微分係数**および**左微分係数**という。

問 1 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるためにはどんな条件が必要か?

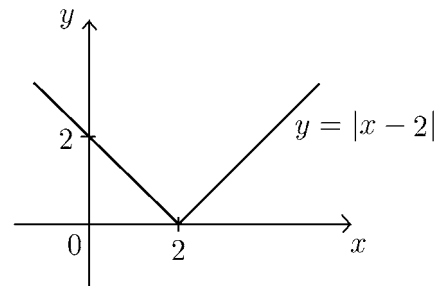
左右の微分係数 $f'_+(a)$, $f'_-(a)$ を用いて表せ。

例 $f(x) = |x - 2|$ のとき $x = 2$ における左右微分係数は

$$f'_+(2) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{|h| - |0|}{h} = 1$$

$$f'_-(2) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{|h| - |0|}{h} = -1$$

となり, $f'_+(2) \neq f'_-(2)$ より $x = 2$ で微分可能ではない。



問 2 $f(x)$ と a が以下の場合に $y = f(x)$ のグラフを描き, $x = a$ における左右の

微分係数を求めよ。

(1) $f(x) = |x|$, $a = 0$

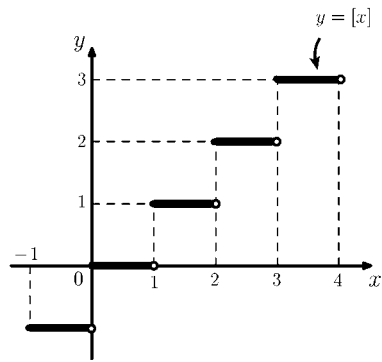
(2) $f(x) = 2|x - 1|$, $a = 1$

< 微分可能性 2 >

例 1 $f(x) = [x]$ (ガウス記号) に対し、 $y = [x]$ の

グラフは右図のようであり、 $x = 1$ で不連続

である。このときの左右の微分係数は



$$f'_+(1) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{[1+h] - [1]}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{1-1}{h} = 0$$

$$f'_-(1) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{[1+h] - [1]}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{0-1}{h} = +\infty$$

より $f'_+(1) \neq f'_-(1)$ から $x = 1$ で微分可能ではない。

問 1 $f(x) = [x]$ に対し、 $x = 2$ における左右の微分係数を求めよ。

$$f'_+(2) = \qquad \qquad \qquad f'_-(2) =$$

一般に不連続であれば微分可能ではない。逆に言うと、微分可能であれば連続である。

[定理] 関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能であれば、 $x = a$ で連続である。

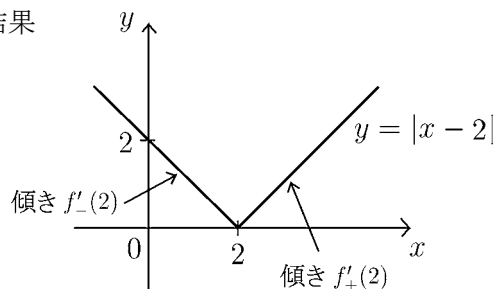
証明略

例 2 $f(x) = |x - 2|$ は $x = 2$ で連続であるが、前ページの結果

より微分可能ではない。

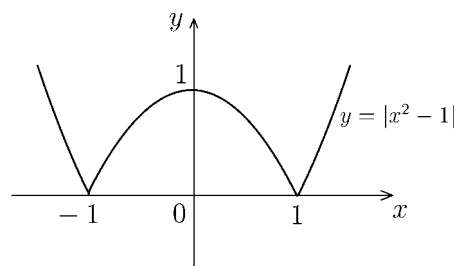
右微分係数 $f'_+(2) = 1$ は $x = 2$ の右側の傾きを表し、

左微分係数 $f'_-(2) = -1$ は $x = 2$ の左側の傾きを表す。



問 2 $f(x) = |x^2 - 1|$ のとき、 $f'_+(1)$ と $f'_-(1)$ の値を求めよ。

またこの値は右図のグラフの何を意味するか?



< 導関数 1 >

関数 $f(x)$ が定義域内のある範囲の全ての値で微分可能であるとき、 $f(x)$ はその範囲で微分可能であるという。

関数 $f(x)$ が、ある範囲で微分可能であるとき、その範囲の任意の値 a に微分係数 $f'(a)$ を対応させる関数を、 $f(x)$ の**導関数**といい、 $f'(x)$ で表す。導関数 $f'(x)$ は次の式で定義される。

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}} \quad (\text{導関数の定義})$$

例 $f(x) = \sqrt{x}$ の導関数を定義に従って求める。

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

関数 $f(x)$ から、その導関数 $f'(x)$ を求めることを、 $f(x)$ を**微分する**という。

問 次の関数を、定義に従って微分せよ。

(1) $f(x) = \sqrt{x+1}$

(2) $f(x) = \frac{1}{x}$

< 導関数 2 >

例 1 前ページの例の場合 $f(x) = \sqrt{x}$ のとき $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ であった。これを

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

と略記する。

基礎数学ワークブック入門編 No.2 で次のことが成り立つことを学んでいる。

$$\boxed{(k)' = 0} \quad (k \text{ は定数})$$

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}} \quad (n \text{ は自然数})$$

さらに $f(x)$, $g(x)$ がともに微分可能であるとき次式が成り立つ。

1. $\{kf(x)\}' = kf'(x)$	(k は定数)
2. $\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$	
3. $\{f(x) - g(x)\}' = f'(x) - g'(x)$	

例 2 $\{4x^3 - 5x^2 + 6\}' = 4 \times (x^3)' - 5 \times (x^2)' + (6)' = 4 \times 3x^2 - 5 \times 2x + 0 = 12x^2 - 10x$

例 3 $\{(x^2 - 3)(4x^2 + 5)\}' = \{4x^4 - 7x^2 - 15\}' = 16x^3 - 14x$

問 次の関数を微分せよ。

(1) x^5 (2) x^6

(3) $-3x^4$ (4) $x^5 + 2x^4$

(5) $2x^4 - 3x^5$ (6) $(x - 1)(x^2 + 1)$

(7) $(x + 1)(x^2 - 4x)$ (8) $(x^2 - 1)(x^2 + x + 1)$

< 積の微分 1 >

$f(x), g(x)$ が共に微分可能であるとき, 次の公式が成り立つ。

$$\boxed{\{f(x) \times g(x)\}' = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)} \quad (\text{積の微分})$$

問 1 積の微分の公式を証明せよ。

$$\begin{aligned} \text{例 1} \quad \{(x^2 - 3)(4x^2 + 5)\}' &= (x^2 - 3)' \times (4x^2 + 5) + (x^2 - 3) \times (4x^2 + 5)' \\ &= 2x \times (4x^2 + 5) + (x^2 - 3) \times 8x = 16x^3 - 14x \end{aligned}$$

$$\text{例 2} \quad \{(x + 1)^2\}' = \{(x + 1)(x + 1)\}' = (x + 1)' \times (x + 1) + (x + 1) \times (x + 1)' = 2(x + 1)$$

問 2 次の関数を微分せよ。

(1) $(x - 1)(x^2 + 1)$

(2) $(x^2 + 1)(x^2 - 4x)$

(3) $(x + 1)^3$

(4) $(x + 1)^4$

< 積の微分 2 >

問 1 39 ページ例の結果より $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ である。これと積の微分を用いて次式を微分せよ。ただし k は定数とする。

(1) $x\sqrt{x}$

(2) $k\sqrt{x}$

問 2 積の微分公式 $(f(x) \times g(x))' = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$ を用いて、定数倍の微分公式 $(k \times f(x))' = k \times f'(x)$ を証明せよ。ここで k は定数とする。

問 3 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ がともに微分可能であるとき、3 つの積の導関数を $f'(x)$, $g'(x)$, $h'(x)$, $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ を用いて表せ。

$$(f(x)g(x)h(x))' =$$

< 商の微分 >

微分可能な 2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ の商の導関数について, 次の公式が成り立つ。

$$1. \quad \left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$$2. \quad \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

問 1 1 を証明せよ。

問 2 $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \frac{1}{g(x)}$ であることと上記 1 と積の微分公式を用いて 2 を証明せよ。

例 (1) $\left(\frac{1}{x^3} \right)' = -\frac{(x^3)'}{(x^3)^2} = -\frac{3x^2}{x^6} = -\frac{3}{x^4}$

(2) $\left(\frac{x^2}{x-1} \right)' = \frac{(x^2)' \times (x-1) - x^2 \times (x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-1) - x^2 \times 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

問 3 次の関数を微分せよ。

(1) $\frac{1}{x^2}$

(2) $\frac{1}{2x^2}$

(3) $\frac{x+1}{x^2}$

(4) $\frac{x^3}{x+1}$

< 三角関数の微分 >

次が成り立つ.

$$1. \quad (\sin x)' = \cos x$$

$$2. \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$3. \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

[1 と 2 の証明] 35 ページの結果より得られる。

$$(\sin x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$$

$$(\cos x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\sin x$$

問 1 1 と 2 の結果と商の微分公式を用いて, 3 を証明せよ。

問 2 次の関数を微分せよ.

$$(1) \quad 3 \sin x + 4 \cos x$$

$$(2) \quad -3 \cos x + 5 \tan x$$

$$(3) \quad \sin x \cos x$$

$$(4) \quad \sin^2 x$$

$$(5) \quad \cos^2 x$$

$$(6) \quad x \tan x$$

$$(7) \quad \frac{\sin x}{x}$$

$$(8) \quad \frac{\cos x}{x}$$

問 3 次の導関数を計算し, 結果を $\sin x$ または $\cos x$ を用いてあらわせ.

$$(1) \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

$$(2) \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$(3) \quad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

< 微分記号 >

関数 $y = f(x)$ の導関数の定義は

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

である。導関数を

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)$$

等の記号で表す(全て同じ意味である)。 $\frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}$ 等の記号は、変数が x である関数の導関数 (x についての微分) であることを明記するためにある。変数が x 以外の文字でも同じである。

変数 t の関数 $y = f(t)$ の導関数を

$$y' = f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{dy}{dt} = \frac{df}{dt} = \frac{d}{dt}f(t)$$

等の記号で表す。

例 1 $y = x^3 - 2x^2$ のとき $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x$

$y = t^3 - 2t^2$ のとき $\frac{dy}{dt} = 3t^2 - 4t$

$S = r^3 - 2r^2$ のとき $\frac{dS}{dr} = 3r^2 - 4r$

微分の公式 $(x^n)' = nx^{n-1}$ は、変数が変わっても同様に使用できる。

問 次の関数の導関数を求めよ。

(1) $y = x^2 - x + 3$ $\frac{dy}{dx} =$

(2) $y = \sin t$ $\frac{dy}{dt} =$

(3) $\ell = 3t^2 - 2t$ $\frac{d\ell}{dt} =$

(4) $S = \pi r^2$ (π は円周率) $\frac{dS}{dr} =$

(5) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $\frac{dV}{dr} =$

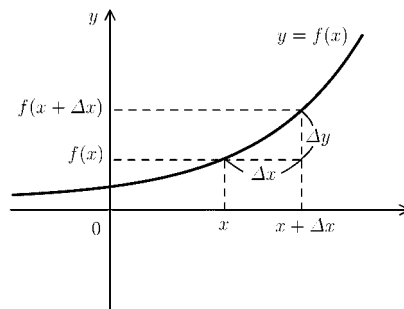
< 増分記号 Δ (デルタ) >

変数 x の増えた量を「 x の増分」といい、「 Δx 」という記号で表す。
 Δx は文字が 2 つであるが 1 つの量を表す。

関数 $y = f(x)$ と x の増分 Δx に対して、 y の増分を

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

とおくと、導関数 $f'(x)$ は $\Delta x \rightarrow 0$ のときの平均変化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ の極限だから $\frac{dy}{dx}$ と書く。



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

増分記号 Δx は、変数 x の増えた量を表す。変数 x が他の文字変数に変わっても同様である。

例 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = (x^3)' = 3x^2$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(t + \Delta t)^4 - t^4}{\Delta t} = (t^4)' = 4t^3$$

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\sin(u + \Delta u) - \sin(u)}{\Delta u} = (\sin u)' = \cos(u)$$

問 次の極限值を、微分の公式を使って求めよ。

(1) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^5 - x^5}{\Delta x} =$

(2) $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin(t + \Delta t) - \sin(t)}{\Delta t} =$

(3) $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\cos(u + \Delta u) - \cos(u)}{\Delta u} =$

< 合成関数の微分 1 >

例 関数 $y = \sin(x^3)$ の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求めたい。

$u = x^3$ とおくと $y = \sin(u)$ となる。

x の増分 Δx に対し, u の増分および y の増分を

$$\Delta u = (x + \Delta x)^3 - x^3$$

$$\Delta y = \sin(u + \Delta u) - \sin(u) \quad (= \sin((x + \Delta x)^3) - \sin(x^3))$$

とおくと, $\Delta x \rightarrow 0$ のとき $\Delta u \rightarrow 0$ だから,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x} = \left(\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \right) \times \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) \\ &= \left(\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\sin(u + \Delta u) - \sin(u)}{\Delta u} \right) \times \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \right) \\ &= (\sin u)' \times (x^3)' \\ &= \cos(u) \times 3x^2 = \cos(x^3) \times 3x^2 = 3x^2 \cos(x^3) \end{aligned}$$

問 1 関数 $y = \cos(x^4)$ の導関数を求めたい。

$u = x^4$ とおくと, $y = \cos(u)$ となる。

$$\Delta u = (x + \Delta x)^4 - x^4$$

$$\Delta y = \cos(u + \Delta u) - \cos(u)$$

とおくと, $\Delta x \rightarrow 0$ のとき $\Delta u \rightarrow 0$ となるから,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \right) \times \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right)$$

となる。例にならって, 残りの計算をせよ。

(解) $\frac{dy}{dx} =$

問 2 関数 $y = \sin(x^3 + 2x^2)$ の導関数を例にならって求めよ。

(解) $\frac{dy}{dx} =$

< 合成関数の微分 2 >

問 1 一般の合成関数 $y = g(f(x))$ の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求めたい。

$u = f(x)$ とおくと $y = g(u)$ となる。

このとき, $\frac{dy}{dx} \left(= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)$ を, $\boxed{\frac{dy}{du}} \left(= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \right)$ と $\boxed{\frac{du}{dx}} \left(= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right)$ で表せ。

(答) $\boxed{\frac{dy}{dx} =}$

例 1 関数 $y = (x^3 + 5x^2)^7$ の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求めたい。

$u = x^3 + 5x^2$ とおくと $y = u^7$ となる。よって

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{d}{du} (u^7) \times \frac{d}{dx} (x^3 + 5x^2) = (u^7)' \times (x^3 + 5x^2)' \\ &= 7u^6 \times (3x^2 + 10x) = 7(x^3 + 5x^2)^6 \times (3x^2 + 10x) = 7(3x^2 + 10x)(x^3 + 5x^2)^6 \end{aligned}$$

例 2 $y = \sin(x^2 + x^3)$ の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求めたい。 $u = x^2 + x^3$ とおくと $y = \sin u$ より

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{d}{du} (\sin u) \times \frac{d}{dx} (x^2 + x^3) \\ &= \cos u \times (2x + 3x) = (2x + 3x^2) \cos(x^2 + x^3) \end{aligned}$$

問 2 次の関数の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

(1) $y = (x^2 - 2x + 5)^3$, $\frac{dy}{dx} =$

(2) $y = \cos(2x - 3)$, $\frac{dy}{dx} =$

(3) $y = \sin(x^5 - 2x^2)$, $\frac{dy}{dx} =$

< 微分の練習 1 >

問 次の関数を微分せよ。

(1) $(x + 4)^2$

(2) $(x + 4)^3$

(3) $\frac{1}{x^3}$

(4) $\frac{2x}{x + 1}$

(5) $4 \sin x - 5 \cos x$

(6) $x^2 \sin x$

(7) $x^3 \cos x$

(8) $\frac{\tan x}{x}$

(9) $(3x + 5)^4$

(10) $(4x - 1)^7$

(11) $(x^4 - 2x^3)^{10}$

(12) $(2 \sin x + 3 \cos x)^5$

(13) $\sin(5x - 4)$

(14) $\cos(4x + 3)$

(15) $\sin(x^3 - 5x)$

(16) $\tan(3x - 4)$

< ネピアの数 >

a を 1 でない正の数とするとき、対数関数 $\log_a x$ の導関数を求めたい。導関数の定義

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ に従って計算する。}$$

$$\left(\log_a x\right)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

ここで $\frac{\Delta x}{x} = h$ とすると $\Delta x \rightarrow 0$ のとき $h \rightarrow 0$ より

$$\left(\log_a x\right)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{xh} \log_a(1 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a(1 + h)^{\frac{1}{h}}$$

となる。そこで $h \rightarrow 0$ のときの $(1 + h)^{\frac{1}{h}}$ の極限を調べてみる。

h に 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, ...

および -0.1, -0.01, -0.001, -0.0001, ...

を代入して、 $(1 + h)^{\frac{1}{h}}$ の値を計算すると、次の表が得られる。

h	$(1 + h)^{\frac{1}{h}}$	h	$(1 + h)^{\frac{1}{h}}$
0.1	2.59342...	-0.1	2.867971...
0.01	2.704813...	-0.01	2.731999...
0.001	2.716923...	-0.001	2.719642...
0.0001	2.718145...	-0.0001	2.718417...
0.00001	2.718268...	-0.00001	2.718295...

この表から予想されるように、 $h \rightarrow 0$ のとき $(1 + h)^{\frac{1}{h}}$ は一定の値に限りなく近づく。この極限値を e で表す。

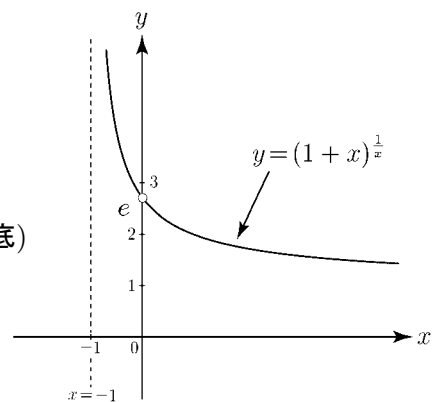
$$e = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}}$$

e は無理数で、その値は

$$e = 2.71828182845 \dots$$

であることが知られている。 e を **ネピアの数** (または **自然数の底**)

という。 $y = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ のグラフは右図のようなグラフである。



問 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{h \rightarrow +0} (1 + h)^{\frac{1}{h}} =$$

$$, \lim_{h \rightarrow -0} (1 + h)^{\frac{1}{h}} =$$

$$, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$$

< 対数関数の導関数 >

例 関数 $f(x) = \log_{10} x$ の微分係数 $f'(2)$ を求めたい。定義から

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_{10}(2 + \Delta x) - \log_{10} 2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left\{ \log_{10} \left(\frac{2 + \Delta x}{2} \right) \right\} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \log_{10} \left(1 + \frac{\Delta x}{2} \right) \end{aligned}$$

ここで $\frac{\Delta x}{2} = h$ とおくと, $\Delta x \rightarrow 0$ のとき $h \rightarrow 0$ より

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \log_{10}(1 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} \log_{10} \left\{ (1 + h)^{\frac{1}{h}} \right\} = \frac{1}{2} \log_{10} e$$

(注) ここで前ページの結果 $\lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}} = e$ を使った。

問 1 例と同じ関数 $f(x) = \log_{10} x$ の微分係数 $f'(3)$ と導関数 $f'(x)$ を例と同様な極限計算で求めよ。(ただし $x > 0$ とする)

(1) $f'(3) =$

(2) $f'(x) =$

問 2 a を 1 でない正の数とする。 $f(x) = \log_a x$ の導関数 $f'(x)$ を例と同様な極限計算で求めよ。

$f'(x) =$

< 自然対数 >

問 1 前ページの間の結果を用いて次の対数関数の導関数を求めよ。(ただし $a > 0, a \neq 1$)

(1) $(\log_{10} x)' =$

(2) $(\log_a x)' =$

問 2 底が e (ネピアの数 $\doteq 2.718$) である対数関数 $\log_e x$ の導関数を求め、できるだけ簡単にせよ。

(答) $(\log_e x)' =$

底がネピアの数 e である対数 $\log_e x$ を **自然対数** と呼び、底を省略する。

$\log_e x = \log x$	(自然対数)
---------------------	--------

今後底を省略した対数 $\log x$ は必ず自然対数を意味する。

(注) 常用対数 $\log_{10} x$ と区別するため、自然対数を $\ln x$ と書くこともある。

例 $\log(\sqrt{e}) = \log_e(\sqrt{e}) = \log_e(e^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}$

$\ln \sqrt{e} = \log_e \sqrt{e} = \frac{1}{2}$

$\log\left(\frac{1}{e^2}\right) = \log_e\left(\frac{1}{e^2}\right) = \log_e(e^{-2}) = -2$

$\ln\left(\frac{1}{e^2}\right) = \log_e\left(\frac{1}{e^2}\right) = -2$

問 3 次の自然対数の値を求めよ。

(1) $\log e$

(2) $\log(\sqrt[3]{e})$

(3) $\log\left(\frac{1}{e}\right)$

(4) $\log 1$

(5) $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$

(6) $\ln(\sqrt[4]{e})$

(7) $\ln(e)$

(8) $\ln(e\sqrt{e})$

問 4 問 2 の結果を使って自然対数の導関数を求めよ。

$(\log x)' =$

$(\ln x)' =$

問 5 $y = \log x$ のグラフを書け

< 逆関数の微分 1 >

$f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ は定義から次の関係がある。

$$y = f^{-1}(x) \iff x = f(y)$$

$\Delta y = f^{-1}(x + \Delta x) - f^{-1}(x)$ とおくと $\Delta x \rightarrow 0$ のとき $\Delta y \rightarrow 0$ より

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}}$$

となる。

例 逆三角関数 $y = \sin^{-1} x$ の導関数を求めたい。

$$y = \sin^{-1} x \iff x = \sin y$$

より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}(\sin y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

よって

$$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(注) $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ より $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$

問1 例と同様にして、次の逆三角関数の導関数を求めよ。

$$y = \cos^{-1} x$$

$$\frac{dy}{dx} =$$

問2 $\tan x$ の導関数の公式 $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ を使って $\tan^{-1} x$ の導関数を求めよ。

$$y = \tan^{-1} x$$

$$\frac{dy}{dx} =$$

(ヒント) $\frac{1}{\cos^2 y} = \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y$

< 逆関数の微分 2 >

例 1 $y = x^{\frac{1}{3}}$ の導関数を求める。

$$y = x^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x = y^3$$

より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}(y^3)} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$\text{よって } (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

問 1 次の導関数を求めよ。(ただし n は自然数である)

(1) $y = x^{\frac{1}{4}}$

(2) $y = x^{\frac{1}{n}}$

例 2 $y = 10^x$ の導関数を求める。

$$y = 10^x \Leftrightarrow x = \log_{10} y$$

より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}(\log_{10} y)} = \frac{1}{\frac{1}{y} \log_{10} e} = \frac{y}{\log_{10} e} = \frac{10^x}{\log_{10} e}$$

$$\text{よって } (10^x)' = \frac{10^x}{\log_{10} e} = 10^x \log_e 10$$

問 2 次の導関数を求めよ。(ただし $a > 0$, $a \neq 1$)

(1) $y = 2^x$

(2) $y = a^x$

< 指数関数の微分 >

$a > 0, a \neq 1$ なる数 a に対して指数関数 a^x の導関数は前ページより

$$(a^x)' = a^x \log_e a = a^x \log a$$

である。特に $a = e (= 2.73\cdots)$ のときは $\log e = \log_e e = 1$ より

$$(e^x)' = e^x$$

このように微分しても変わらない関数は e^x の定数倍だけである。

そこでこの指数関数を特に $e^x = \text{EXP}(x)$ という記号で表すことがある。

例 1 $y = e^{x^2}$ の導関数を求めたい。 $u = x^2$ とおくと $y = e^u$ より

$$\begin{aligned} (e^{x^2})' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{d}{du} (e^u) \times \frac{d}{dx} (x^2) = (e^u)' \times (x^2)' \\ &= e^u \times (2x) = e^{x^2} \times 2x = 2xe^{x^2} \end{aligned}$$

問 1 次の導関数を求めよ。

(1) $(e^{3x})' =$

(2) $(e^{x^2+3})' =$

(3) $(e^{-x^2+2x})' =$

問 2 例 1 を参考にして $y = e^{f(x)}$ の導関数を求め、 $f(x)$ と $f'(x)$ を用いて表せ。

$$(e^{f(x)})' =$$

例 2 $(e^{-3x^2})' = e^{-3x^2} \times (-3x^2)' = e^{-3x^2} \times (-6x) = -6xe^{-3x^2}$

問 3 次の導関数を求めよ。

(1) $(e^{-3x})' =$

(2) $(e^{-\frac{x^2}{2}})' =$

< 対数微分法 1 >

一般の関数 $y = f(x)$ に対し、自然対数との合成関数 $\log y = \log(f(x))$ の導関数は (53 ページの結果より)

$$(\log(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ であるから, } (\log y)' = \frac{y'}{y}$$

例 指数関数 $y = 2^x$ の導関数 y' を求めたい。両辺の自然対数をとると

$$\log y = \log(2^x) = x \log 2$$

である。両辺を x で微分すると ($x' = 1$ より)

$$\frac{y'}{y} = \log 2$$

となるから

$$y' = y \times \log 2 = 2^x \log 2$$

(注) 両辺の自然対数をとってから微分する方法を**対数微分法**という。

問 1 $y = 3^x$ の導関数 y' を対数微分法で求めよ。

(解)

問 2 $a > 0$ ($a \neq 1$) に対し、 $y = a^x$ の導関数 y' を対数微分法で求めよ。

(解)

問 3 $a = e$ (ネピア数) のとき、指数関数 $y = e^x$ の導関数 $y' = (e^x)'$ をできるだけ簡単な式で求めよ。

(答) $(e^x)' =$

< 対数微分法 2 >

例 $y = x^{\frac{3}{2}}$ ($= \sqrt{x^3}$) の導関数を対数微分法で求める。

$$y = x^{\frac{3}{2}}$$

両辺の自然対数をとる。

$$\log y = \log \left(x^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{3}{2} \log x$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{x}$$

より

$$y' = \frac{3}{2} \times \frac{1}{x} \times y = \frac{3}{2} \times \frac{1}{x} \times x^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \times x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \quad \left(= \frac{3}{2} \sqrt{x} \right)$$

であるから

$$\left(x^{\frac{3}{2}} \right)' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$$

問 1 $y = x^{\frac{4}{3}}$ ($= \sqrt[3]{x^4}$) の導関数を対数微分法で求めよ。

(解)

(答) $\left(x^{\frac{4}{3}} \right)' =$

問 2 一般の実数 r に対し、関数 $y = x^r$ の導関数を対数微分法で求めよ。

(解)

(答) $(x^r)' =$

< x^r の導関数 >

前のページより任意の実数 r に対し,

$$\boxed{(x^r)' = rx^{r-1}}$$

が成り立つ。

例 1 $y = \sqrt[3]{x^5}$ の導関数を求めたい。分数指数の定義 $\boxed{\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{m}{n}}}$ から

$$\left(\sqrt[3]{x^5}\right)' = \left(x^{\frac{5}{3}}\right)' = \frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1} = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$$

問 1 次の導関数を求め、結果を根号 ($\sqrt{\quad}$, $\sqrt[n]{\quad}$ 等) で表せ。

$$(1) \left(\sqrt[4]{x^5}\right)' = \quad (2) \left(\sqrt[5]{x^7}\right)' = \quad (3) \left(\sqrt{x^3}\right)' =$$

例 2 $y = \frac{1}{x^2}$ の導関数を求めたい。負の指数の定義 $\boxed{\frac{1}{x^n} = x^{-n}}$ から

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -2 \times \frac{1}{x^3} = -\frac{2}{x^3}$$

問 2 次の導関数を求め、結果を分数の形にせよ。

$$(1) \left(\frac{1}{x^3}\right)' = \quad (2) \left(\frac{1}{x^4}\right)' = \quad (3) \left(\frac{1}{x}\right)' =$$

例 3 $(\sqrt[3]{x})' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

問 3 次の導関数を求め、結果を例 3 のように根号で表せ。

$$(1) (\sqrt[4]{x})' = \quad (2) \left(\sqrt[5]{x^4}\right)' = \quad (3) (\sqrt{x})' =$$

例 4 $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$

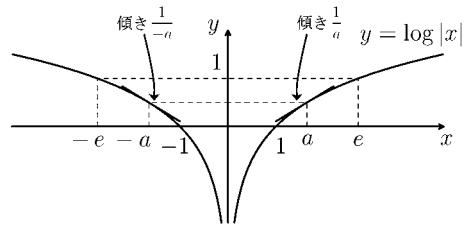
(注) $\sqrt[3]{x^4} = x\sqrt[3]{x}$

問 4 次の導関数を求め、結果を例 4 のように根号で表せ。

$$(1) \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)' = \quad (2) \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)' = \quad (3) \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' =$$

< $\log|x|$ の導関数 >

例 1 関数 $y = \log|x|$ を考える。
絶対値の定義から、 $a > 0$ に対し
 $\log|-a| = \log a = \log|a|$
より、 $y = \log|x|$ のグラフは右図
のように y 軸対称となる。
この導関数は



(1) $x > 0$ のとき $|x| = x$ より $y' = (\log x)' = \frac{1}{x}$

(2) $x < 0$ のとき $|x| = -x$ より $y' = (\log|x|)' = (\log(-x))' = \frac{(-x)'}{-x} = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$

(1), (2) より $x \neq 0$ のとき

$$(\log|x|)' = \frac{1}{x}$$

となる。

例 2 関数 $y = \log|\cos x|$ を微分したい。

$u = \cos x$ とおくと $y = \log|u|$

より合成関数の微分法を使うと

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (\log|u|)' \times (\cos x)' = \frac{1}{u} \times (-\sin x) = \frac{1}{\cos x} \times (-\sin x) \\ &= -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x \end{aligned}$$

問 次の関数の導関数を求めよ。

(1) $y = \log|\tan x|$, $\frac{dy}{dx} =$

(2) $y = \log|x^2 + 3x|$, $\frac{dy}{dx} =$

(3) $y = \log|f(x)|$, $\frac{dy}{dx} =$

< 微分の練習 2 >

問 1 次の極限值を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

問 2 次の関数を微分せよ。

(1) $2e^x$

(2) $3 \log x$

(3) $\sqrt[3]{x}$

(4) $\frac{1}{x^3}$

(5) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

(6) e^{4x+1}

(7) $\log(5x)$

(8) $e^{-\frac{x^2}{2}}$

(9) $\log(x^3)$

(10) $\log|4x|$

(11) $\log|\sin x|$

(12) $x\sqrt{x}$

(13) $e^x \sin x$

(14) $e^{3x} \cos(4x)$

(15) xe^{-x}

(16) $x^2 \log|x|$

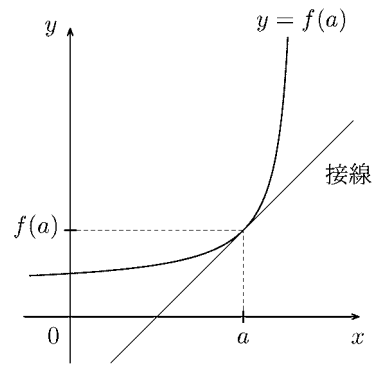
問 3 $y = x^x$ を対数微分法を用いて微分せよ。

< 接線の方程式 1 >

$y = f(x)$ のグラフの $x = a$ における接線の方程式は

$$\boxed{y = f'(a) \times (x - a) + f(a)} \quad (\text{接線の方程式})$$

である。



例 1 $f(x) = e^{2x}$ のとき $f(0) = e^0 = 1$

$$f'(x) = 2e^{2x} \quad , \quad f'(0) = 2e^0 = 2$$

よって $y = e^{2x}$ の $x = 0$ における接線の方程式は

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 2x + 1 \quad \text{より} \quad \underline{y = 2x + 1} \quad (\text{接線})$$

例 2 $f(x) = \log x$ のとき $f(e) = \log e = 1$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad f'(e) = \frac{1}{e}$$

よって $y = \log x$ の $x = e$ における接線の方程式は

$$y = f'(e)(x - e) + f(e) = \frac{1}{e}(x - e) + 1 = \frac{1}{e}x \quad \text{より} \quad \underline{y = \frac{1}{e}x} \quad (\text{接線})$$

例 3 $f(x) = \cos x$ のとき $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$$f'(x) = -\sin x \quad , \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

よって $y = \cos x$ の $x = \frac{\pi}{2}$ における接線の方程式は

$$y = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \times \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 0 \quad \text{より} \quad \underline{y = -x + \frac{\pi}{2}} \quad (\text{接線})$$

例 4 $f(x) = \sqrt{x}$ のとき $f(1) = \sqrt{1} = 1$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad , \quad f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

よって $y = \sqrt{x}$ の $x = 1$ における接線の方程式は

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = \frac{1}{2}(x - 1) + 1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad \text{より} \quad \underline{y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}} \quad (\text{接線})$$

問 以下の接線の方程式を求めよ。

(1) $y = e^x$ の $x = 0$ における接線

(2) $y = \log x$ の $x = 1$ における接線

(3) $y = \sin x$ の $x = 0$ における接線

(4) $y = \sqrt{x}$ の $x = 4$ における接線

(5) $y = \frac{1}{x}$ の $x = 1$ における接線

< 接線の方程式 2 >

問 次の接線の方程式を求めよ。

(1) $y = 2 \sin(3x)$ の $x = \frac{\pi}{9}$ における接線

(2) $y = 5 \cos(2x)$ の $x = \frac{\pi}{6}$ における接線

(3) $y = \tan(4x)$ の $x = 0$ における接線

(4) $y = \frac{1}{2x}$ の $x = -1$ における接線

(5) $y = \sqrt{x}$ の $x = 9$ における接線

(6) $y = \sqrt{4x+1}$ の $x = 2$ における接線

(7) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ の $x = 4$ における接線

(8) $y = \frac{1}{x^2}$ の $x = 1$ における接線

(9) $y = e^{2x}$ の $x = 0$ における接線

(10) $y = e^{x^2}$ の $x = 1$ における接線

(11) $y = \log|x|$ の $x = e$ における接線

(12) $y = \log(x^2 + 1)$ の $x = 1$ における接線

< 平均値の定理 >

a, b が定数で, $a < b$ とするとき, 不等式

$$a \leq x \leq b \quad , \quad a < x < b \quad , \quad a < x \quad , \quad x \leq b$$

などを満たす実数 x の集合を **区間** といい,

$$[a, b] \quad , \quad (a, b) \quad , \quad (a, +\infty) \quad , \quad (-\infty, b)$$

などで表す。 $[a, b]$ を閉区間, (a, b) を开区間という。

問 1 区間 $[a, b]$ は集合 $\{x : a \leq x \leq b\}$ を表す。 ($[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$)

次の区間を集合の記述法 $\{x : \quad\}$ を用いて表せ。

$$(a, b) = \quad \quad \quad (a, +\infty) = \quad \quad \quad (-\infty, b) =$$

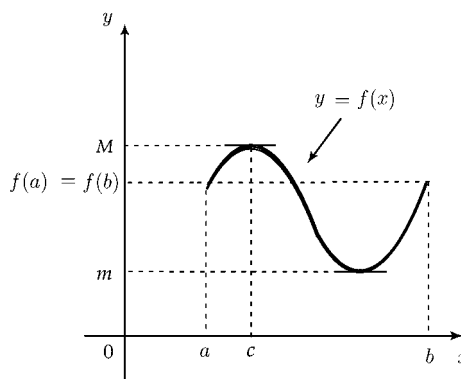
$$(a, b] = \quad \quad \quad [a, b) = \quad \quad \quad [a, +\infty) =$$

< ロルの定理 >

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続,
 开区間 (a, b) で微分可能で, $f(a) = f(b)$
 ならば

$$f'(c) = 0 \quad , \quad a < c < b$$

 を満たす実数 c が存在する。



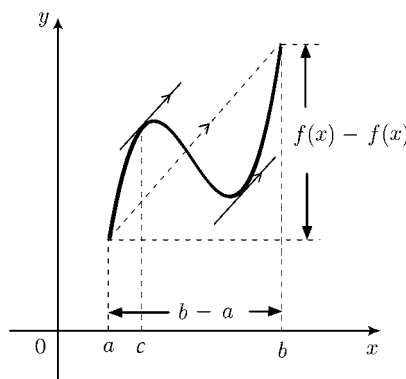
証明略

< 平均値の定理 >

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続,
 开区間 (a, b) で微分可能ならば

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad , \quad a < c < b$$

 を満たす実数 c が存在する。



証明略

問 2 定数 a, b ($a < b$) と関数 $f(x) = x^2$ に対し, 次式をみたす c を a と b で表せ。

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad (a < c < b)$$

< 関数の増減 >

関数 $f(x)$ において、ある区間の任意の値 u, v について

① $u < v$ ならば $f(u) < f(v)$

が成り立つとき、 $f(x)$ はその区間で**単調に増加**するという。

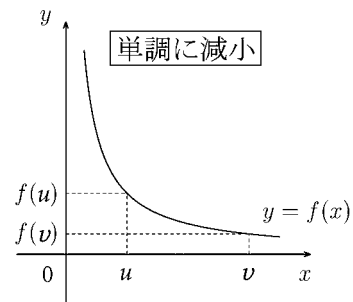
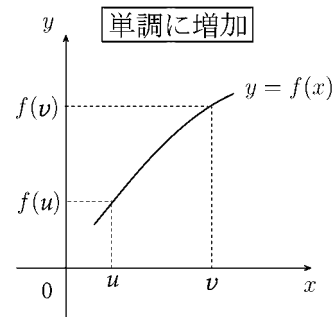
また、

② $u < v$ ならば $f(u) > f(v)$

が成り立つとき、 $f(x)$ はその区間で**単調に減少**するという。

上の定義式①で $f(u) \leq f(v)$ が成り立つとき**増加**といい、

②式で $f(u) \geq f(v)$ が成り立つとき**減少**という。



< 定理 >

関数 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続、开区間 (a, b) で微分可能とする。

区間 (a, b) で常に $f'(x) > 0$ ならば $f(x)$ は区間 $[a, b]$ で**単調に増加**する。

常に $f'(x) < 0$ ならば $f(x)$ は区間 $[a, b]$ で**単調に減少**する。

常に $f'(x) = 0$ ならば $f(x)$ は区間 $[a, b]$ で**定数**である。

証明略

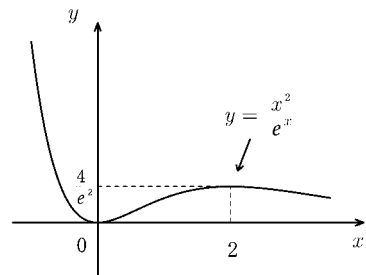
例 $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ の増減を調べる

$$f'(x) = \frac{2xe^x - x^2e^x}{(e^x)^2} = \frac{(2-x)xe^x}{e^{2x}}$$

より $x = 0, 2$ で $f'(x) = 0$ となる。

増減表とグラフは右のようになる。

x	...	0	...	2	...	
y'	-	0	+	0	-	
y		↘	0	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘



問 $f(x)$ が次の各場合に増減表とグラフを書け。

(1) $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 + 8$

(2) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

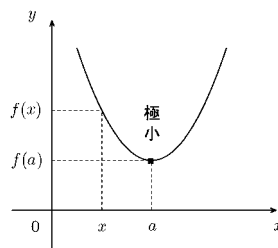
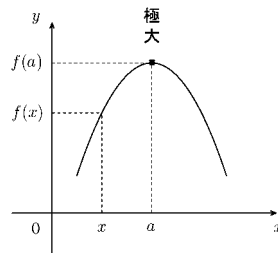
< 極大・極小 >

関数 $f(x)$ が連続で、 $x = a$ を含む十分小さい開区間において

$x \neq a$ ならば $f(x) < f(a)$ であるとき、 $f(a)$ を $f(x)$ の極大値

$x \neq a$ ならば $f(x) > f(a)$ であるとき、 $f(a)$ を $f(x)$ の極小値

という。極大値と極小値をまとめて極値という。



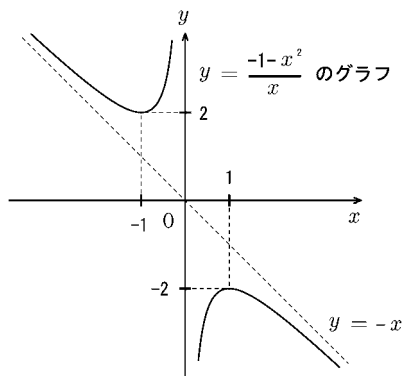
例題 $y = \frac{-1-x^2}{x}$ ($x \neq 0$) の極値を調べよ。

(解) $y' = \frac{-2x \times x - (-1-x^2) \times 1}{x^2}$
 $= \frac{1-x^2}{x^2}$

x	...	-1	...	0	...	1	...
y'	-	0	+	X	+	0	-
y	↘	2	↗	X	↗	-2	↘

より増減表は右のようになる。

(答) $x = 1$ のとき極大値 $y = -2$
 $x = -1$ のとき極小値 $y = 2$



問 次の関数に対し、増減表を作り、極値を求めよ。ただし()内は定義域である。

(1) $y = x - 2\sqrt{x}$ ($x \geq 0$)

(2) $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$

(3) $y = x^3e^x$

(4) $y = \frac{x^2}{x-1}$ ($x \neq 1$)