



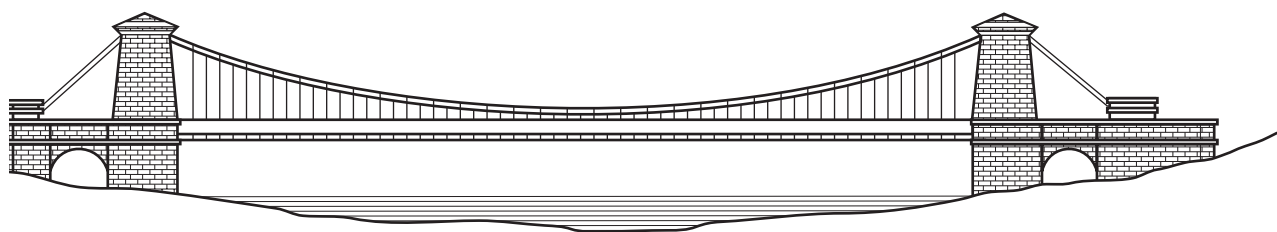
高知工科大学

Kochi University of Technology

基礎数学

2

(2005年度版)



指数・対数・三角関数・微分・積分

山崎 和雄 著

< 指数関数とそのグラフ >

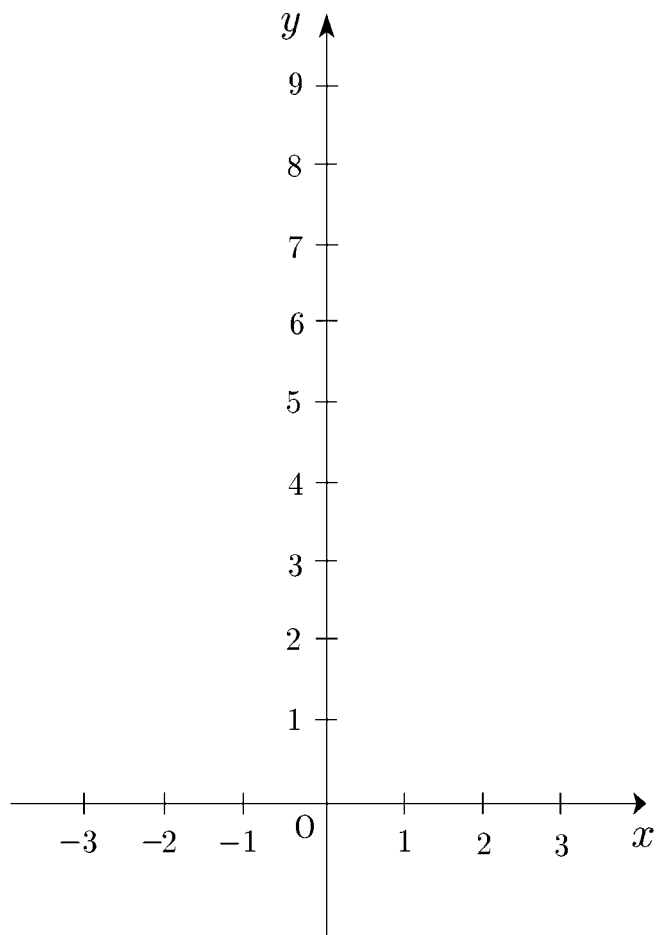
問 (1) $y = 2^x$ と , (2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフを, 表を完成させてから描きなさい。

(1) $y = 2^x$

x	...	-4	-3	-2	0	1	2	3	...
y

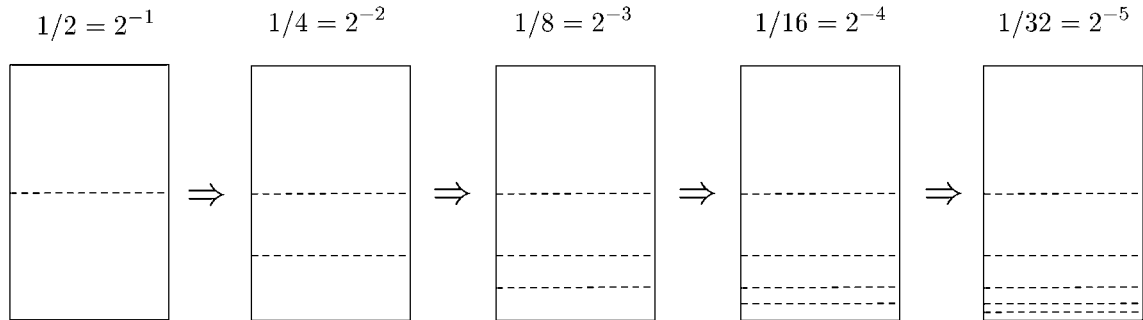
(2) $y = 2^{-x}$

x	...	-4	-3	-2	0	1	2	3	...
y



< $y = 2^x$ のグラフ >

$y = 2^x$ のグラフを A4 の用紙を使って描いてみよう



半分に折って
折り目をつける

つづけて半分に
折る

さらに半分に
折る

つづける

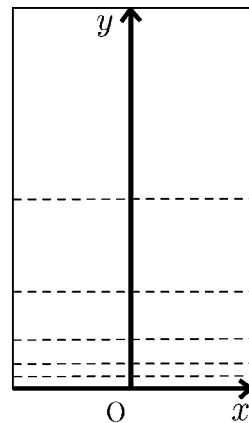
つづける

② つぎに **A4** の用紙に

x 軸 (用紙の下に描く)

y 軸 (用紙の中心に描く)

それから, 適正な目盛りをつける。



$y = 2^x$ のグラフ

③ 気がついたことを自由に書いてみよう。

< 常用対数 >

「 $100 = 10^r$ となる r の値はいくらか」という問題の答えは 2 である。

このことを

$$\log_{10} 100 = 2 \quad (\log \text{ はログと読む。})$$

と表す。

$\log_{10} 100$ ということは、「100 は 10 の何乗になるか」という意味である。

このことを、一般化すると、正の数 R に対して

$$R = 10^r$$

となるような数 r を、

$$\log_{10} R$$

と表す。 $\log_{10} R$ を R の常用対数という。また 10 を底という。

100 は 10^2 である。これを $\log_{10} 100 = 2$ と表し、100 の常用対数は 2 であることを意味する。

つまり、対数という意味は「与えられた数に対する指数のこと」と考えるとよい。

問 1 次の式を \log_{10} の記号を用いて表せ。

$$(1) 1000 = 10^3 \quad (2) 1 = 10^0$$

$$(3) 0.01 = 10^{-2} \quad (4) \sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}}$$

問 2 次の値を求めよ。

$$(1) \log_5 125 \quad (2) \log_{16} 4$$

$$(3) \log_3 \sqrt{3} \quad (4) \log_{\frac{1}{2}} 16$$

< 一般の対数 >

$8 = 2^3$ である。このことを

$$\log_2 8 = 3$$

と表して、これを

「2 を底とする 8 の対数は 3 である。」という。

一般に、 $R = a^r$ のとき

$$\log_a R = r$$

と表し、

「 a を底とする R の対数は r である」という。

一般に、 $\log_a M$ 、 $\log_a N$ の値が与えられているとき、

$$1. \quad \log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

の式が成り立つことを証明する。

$$\log_a M = m, \quad \log_a N = n$$

とおくと、

$$M = a^m, \quad N = a^n$$

となる。

$$MN = M \times N = a^m \times a^n = a^{m+n}$$

であるから

$$\log_a MN = m + n = \log_a M + \log_a N$$

となる。

問 1 指数法則

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

を利用して、次の性質を導け。

$$2. \quad \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$3. \quad \log_a M^n = n \log_a M$$

問 2 次の式を簡単にせよ。

$$(1) \log_3 27$$

$$(2) \log_{10} \frac{1}{10000}$$

$$(3) \log_4 2 + \log_4 32$$

$$(4) \log_3 \sqrt{54} - \log_3 \sqrt{6}$$

$$(5) \log_2 \frac{8}{3} + \log_2 6$$

$$(6) \log_5 75 - \log_5 3$$

< 底の変換の公式 >

$a^0 = 1$, $a^1 = a$ であるから、

$$\log_a \mathbf{1} = \mathbf{0}, \quad \log_a \mathbf{a} = \mathbf{1}$$

が成り立つことがわかる。

次に、 a を底とする対数 $\log_a b$ を、 c を底とする対数で表してみよう。

$$\log_a b = p$$

とおくと

$$a^p = b$$

両辺の c を底とする対数をとると

$$\log_c a^p = \log_c b \quad p \log_c a = \log_c b$$

$a \neq 1$ であるから、 $\log_c a \neq 0$

したがって

$$p = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (\text{底の変換の公式})$$

とくに

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

問 次の式の計算をせよ。

(1) $\log_{10} 60 + 2 \log_{10} \sqrt{5} - \log_{10} 3$

(2) $\log_2 4 - \log_2 3 + \log_2 6$

(3) $\log_8 5 \cdot \log_{49} 16 \cdot \log_5 7$

(4) $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a$

(5) $(\log_2 \sqrt{3} + \log_4 \sqrt[3]{3})(\log_3 2 + \log_9 25)$

(6) $\frac{5}{2} \log_3 5 - \frac{3}{2} \log_3 \frac{1}{2} + \log_3 \frac{2\sqrt{3}}{3}$

< 対数関数とそのグラフ >

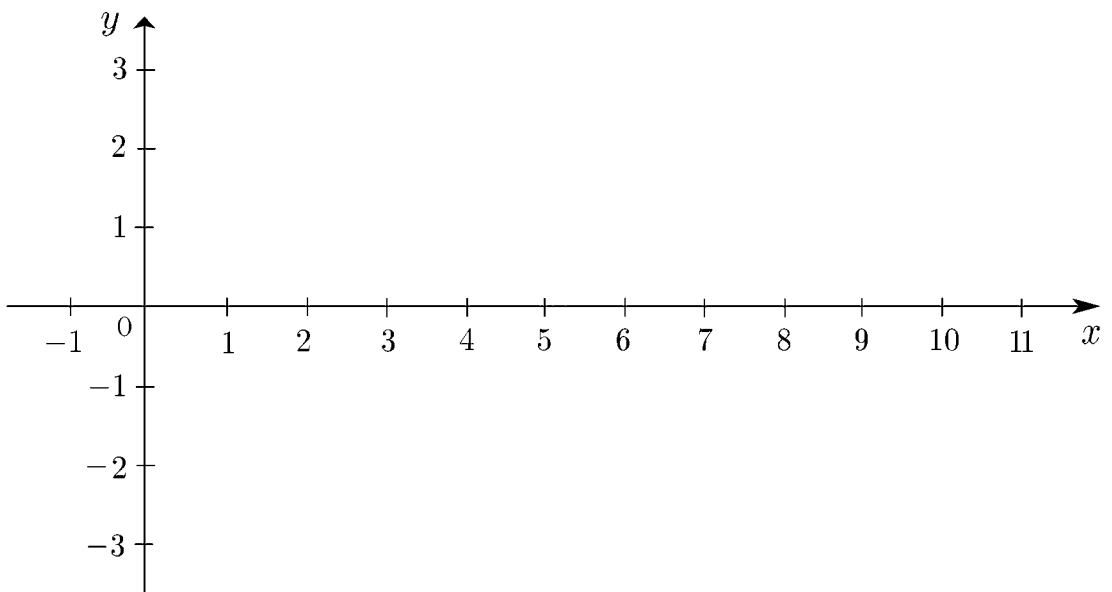
問 (1) $y = \log_2 x$ と , (2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフを, 表を完成させてから描きなさい。

(1) $y = \log_2 x$

x	...	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...
$\log_2 x$

(2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

x	...	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...
$\log_{\frac{1}{2}} x$



< 関数のグラフ >

次の関数のグラフを同じ座標平面上にかけ。

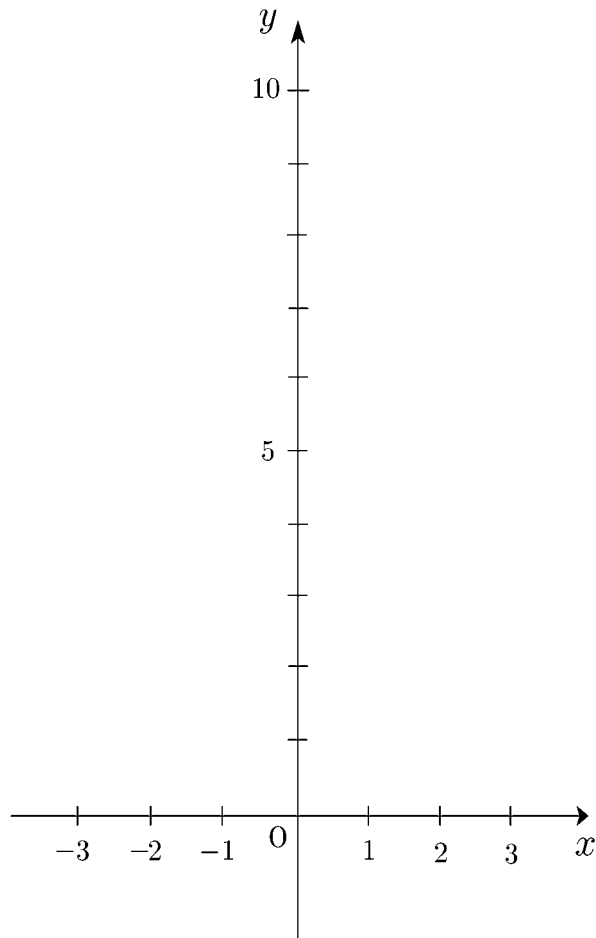
1. $y = x^2$

2. $y = x$

3. $y = 2^x$

4. $y = 2^{-x}$

5. $y = \log_{10} x$



1. $y = x$ と $y = x^2$ の交点の座標を求めよ。

2. $x \geq 0$ のとき, $y = x^2$ と $y = 2^x$ の交点の座標を求めよ。

3. $x \leq 0$ のとき, $y = x^2$ と $y = 2^{-x}$ の交点の座標を求めよ。

< 指数関数と対数関数の比較 >

指数関数 $y = 2^x$

対数関数 $y = \log_2 x$

1. 定義

$$a^p = M$$

\iff

$$p = \log_a M$$

真数 $M > 0$

底 $a > 0, a \neq 1$

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1$$

2. 指数法則

$$\textcircled{1} \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

\iff

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

$$\textcircled{2} \quad a^m \div a^n = a^{m-n}$$

\iff

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$\textcircled{3} \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

\iff

$$\log_a M^k = k \log_a M$$

$$\textcircled{4} \quad (ab)^n = a^n b^n$$

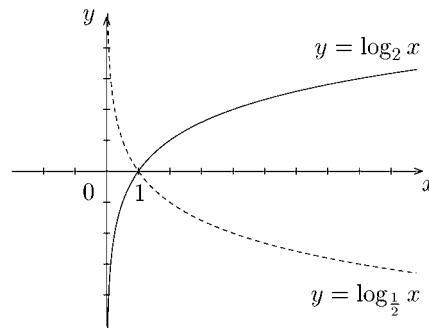
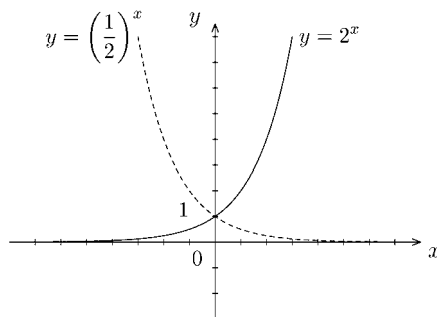
$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (\text{底の変換の公式})$$

(条件. $a > 0, b > 0, m, n$ は有理数)

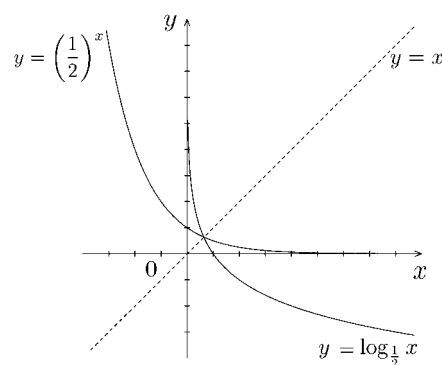
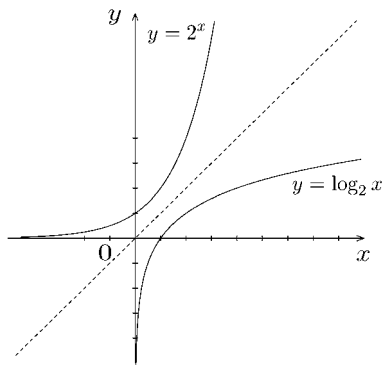
(条件. $a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0, k$ は実数)

$b > 0, b \neq 1, c > 0, c \neq 1,$

3. グラフ



4. グラフ



5. わかったことを書きなさい。

1.

2.

< 指数・対数の練習 A >

1. 次の計算をせよ。

(1) $a^5 \times a^{-3}$ (2) $(a^{-3})^2$ (3) $(a^2b^{-1})^2$ (4) $(ab^{-2})^{-2}$

(5) $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a^2}$ (6) $a^2 \div a^{-3}$ (7) $a^{-\frac{1}{2}} \times a^{\frac{5}{6}} \div a^{\frac{1}{3}}$

2. 次の値を求めよ。

(1) $\sqrt[3]{125}$ (2) $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9}$ (3) $\sqrt[4]{16}$ (4) $\sqrt[3]{-8}$

(5) $(0.1)^{-1}$ (6) $27^{\frac{2}{3}}$ (7) $3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{3}{2}}$ (8) $\sqrt[4]{25} \times \sqrt[6]{125}$

3. 次の関数のグラフを描け。

(1) $y = 3^x$ (2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

4. 次の値を計算せよ。

(1) $\log_{10} 1$ (2) $\log_{10} 10$ (3) $\log_{10} 100$ (4) $\log_{10} 0.1$

(5) $\log_{10} \frac{1}{100}$ (6) $\log_2 4$ (7) $\log_6 4 + \log_6 9$ (8) $\log_3 15 - \log_3 5$

(9) $\frac{1}{2} \log_7 49$ (10) $(\log_2 3) \times (\log_3 2)$

5. 次の関数のグラフを描け。

(1) $y = \log_3 x$ (2) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

6. 次の方程式を解け。

(1) $2^{x+2} = 16$ (2) $\log_5 x - \log_5 2 = 2$

< 指数・対数の練習 B >

1. 次の計算をせよ。

(1) $(a^2)^6 \div a^4$

(2) $(a^3b^{-2})^{-2}$

(3) $(a^2b^{-1})^{-2} \div ab$

(4) $\sqrt[3]{a} \times \sqrt{a}$

(5) $(\sqrt[3]{a^2})^2$

(6) $a^{\frac{8}{5}} \div a^{\frac{1}{10}} \times a^{\frac{1}{2}}$

2. 次の値を求めよ。

(1) $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{32}$

(2) $(\sqrt[4]{3})^8$

(3) $\sqrt[3]{64}$

(4) $(3^2 \times 3^{-4})^2$

(5) $2^{\frac{1}{2}} \times 2^{-\frac{5}{2}}$

(6) $(\sqrt{2^3} \div \sqrt[3]{2} \div 2)^6$

(7) $(25^3)^{\frac{1}{2}}$

(8) $4^{\frac{1}{3}} \times 4^{\frac{1}{6}}$

3. 次の関数のグラフを描け。

(1) $y = 3^x + 1$

(2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 1$

4. 次の値を計算せよ。

(1) $\log_{10} 10000$

(2) $\log_{10} 0.0001$

(3) $\log_4 1$

(4) $\log_{\frac{1}{2}} 16$

(5) $\log_{10} 5 + \log_{10} 200$

(6) $\log_2 56 - \log_2 7$

(7) $\frac{2}{3} \log_2 8$

(8) $(\log_2 5) \times (\log_5 4)$

5. 次の関数のグラフを描け。

(1) $y = \log_3 x + 1$

(2) $y = \log_{\frac{1}{3}} x - 1$

6. 次の方程式を解け。

(1) $2^{2x+1} = 32$

(2) $\log_{\frac{1}{2}} x - \log_{\frac{1}{2}} 2 = 3$

< 指数・対数の練習 C >

1. 次の計算をせよ。

(1) $(a + a^{-1})^2$

(2) $(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}})$

(3) $\sqrt{a} \times \sqrt[3]{a^2} \div \sqrt[6]{a^5}$

(4) $(a^{\frac{1}{4}} - b^{-\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}} + b^{-\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}})$

2. 次の値を求めよ。

(1) $\sqrt[4]{243} + \sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{48}$

(2) $4^{\frac{1}{3}} \div 8^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{5}{6}}$

(3) $9^{\frac{1}{6}} \div 27^{\frac{5}{9}} \times 81^{\frac{1}{3}}$

(4) $\sqrt{27} \times \sqrt[3]{81} \div \sqrt[6]{243}$

3. 次の関数のグラフを描け。

(1) $y = 3^{x+1} + 1$

(2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} - 1$

4. 次の関数のグラフを描け。

(1) $y = \log_3(x+1) + 1$

(2) $y = \log_3(x-1) - 1$

5. 次の方程式を解け。(ヒント : (1) $3^x = X$, (2) $\log_{10} x = X$ とおく)

(1) $3^{2x+1} - 2 \cdot 3^x - 1 = 0$

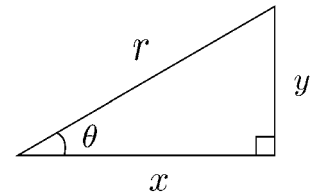
(2) $(\log_{10} x)^2 - 4 \log_{10} x + 3 = 0$

< 三角比 (1) >

右の図のように，直角三角形の鋭角のひとつを θ とする。

斜辺の長さを r ，他の辺の長さを x, y とするとき，

$$\frac{y}{r}, \quad \frac{x}{r}, \quad \frac{y}{x},$$



の値は，三角形の大きさに関係なく，角 θ の大きさだけで決まる。

これらを，それぞれ θ の

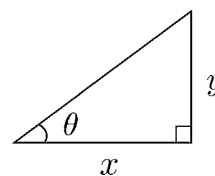
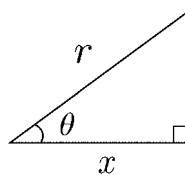
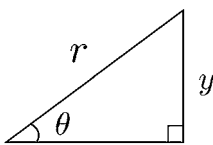
正弦 (sine), 余弦 (cosine), 正接 (tangent)

といい， $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ と表す。すなわち

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

となる。

三角比の定義

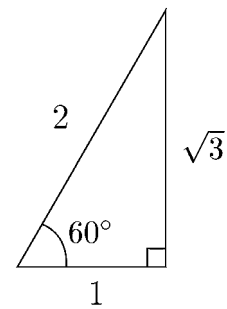
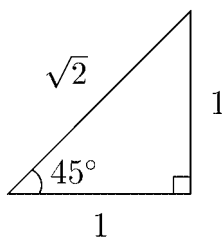
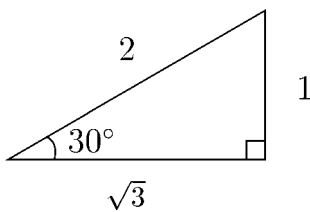


$$\sin \theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

30° , 45° , 60° の三角比は，下の図から求められる。



$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

問 下の表を完成せよ。

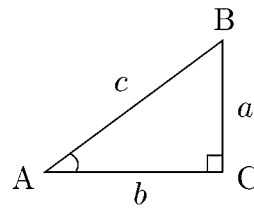
θ	30°	45°	60°
$\sin \theta$			
$\cos \theta$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$\tan \theta$			

< 三角比 (2) >

右の直角三角形 ABC で,

$$a = c \sin A$$

$$b = c \cos A$$



$$\begin{aligned} * \frac{a}{c} &= \sin A \text{ より} \\ a &= c \sin A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \frac{b}{c} &= \cos A \text{ より} \\ b &= c \cos A \end{aligned}$$

であるから,

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{c \sin A}{c \cos A} = \frac{\sin A}{\cos A}$$

となる。したがって,

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \tag{1}$$

また, 三平方の定理から,

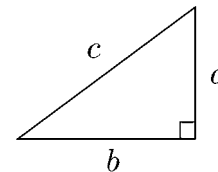
$$a^2 + b^2 = c^2$$

* 三平方の定理

うえの式に, $a = c \sin A$ と, $b = c \cos A$ を代入して

$$(c \sin A)^2 + (c \cos A)^2 = c^2$$

$$c^2(\sin A)^2 + c^2(\cos A)^2 = c^2$$



$$a^2 + b^2 = c^2$$

両辺を, c^2 で割ると

$$(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1$$

$(\sin A)^2 = \sin^2 A$, $(\cos A)^2 = \cos^2 A$ と表すと, 次の式が成り立つ。

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \tag{2}$$

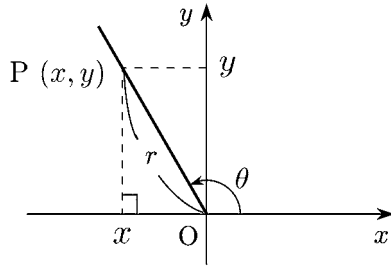
(1), (2) の式を使うと, $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$ のうち, どれかひとつがわかると残りのふたつの値を求めることができる。

問 $\sin A = \frac{2}{3}$ のとき, $\cos A$, $\tan A$ の値を求めよ。

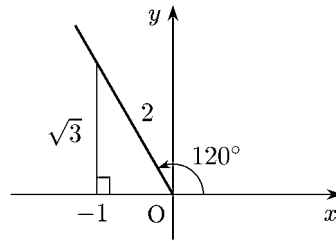
< 三角比と座標 >

$0^\circ \sim 360^\circ$ まで角の範囲を拡張して、その三角比を座標を用いて表してみよう。

下の図のように原点 O から、 x 軸の正の部分 ($x \geq 0$) となす角が θ の半直線を引き、その上に、 $OP = r$ となる点 $P = (x, y)$ をとる。



例



$$* \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$* \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$* \tan 120^\circ = -\sqrt{3}$$

このとき、三角比を次のように定義する。

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \quad \cos \theta = \frac{x}{r} \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

問 次の表を完成せよ。

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	360°
sin θ																
cos θ			$\frac{\sqrt{2}}{2}$													
tan θ					X								X			

< 三角関数のグラフ (1) >

$y = \sin \theta$ のグラフ

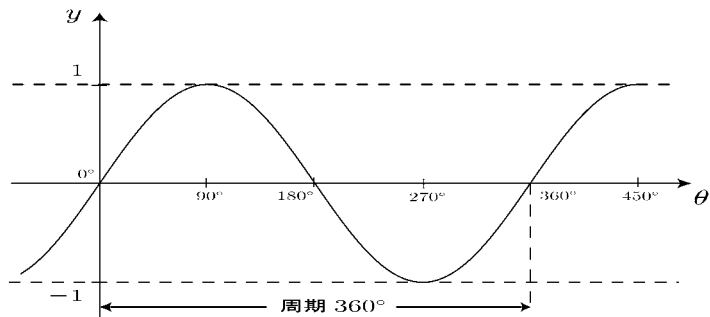
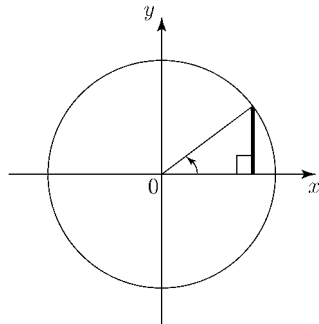
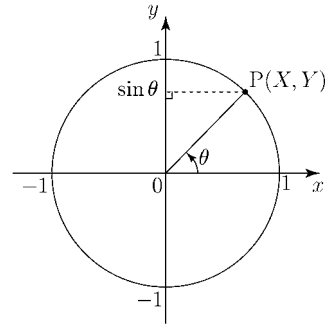
原点を中心とする半径 1 の円を単位円という。

単位円上の点 P の座標は $(\cos \theta, \sin \theta)$ である。

すなわち、点 P の y 座標が $\sin \theta$ であるから

$$y = \sin \theta$$

のグラフは、次のようになる。



$y = \sin \theta$ のグラフは、 360° ごとに同じ形となっている。

このことを、 $y = \sin \theta$ は 360° を周期とする周期関数であるという。

問 1 $y = 2 \sin \theta$ のグラフをかけ。

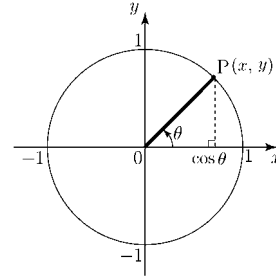
問 2 $y = \sin 2\theta$ のグラフをかけ。

< 三角関数のグラフ (2) >

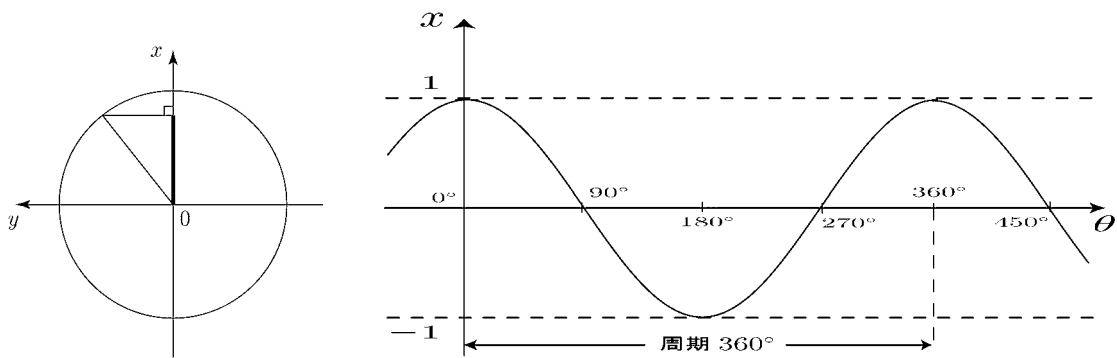
$y = \cos \theta$ のグラフ

$y = \sin \theta$ のグラフと同様に考えると, 点 P の x 座標は $\cos \theta$ であるから

$$x = \cos \theta$$



のグラフは, 次のようになる。



問 1 $y = 2 \cos \theta$ のグラフをかけ。

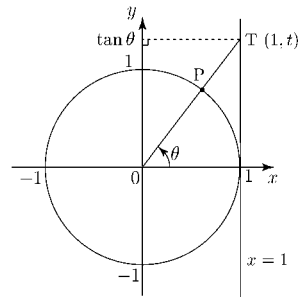
問 2 $y = \cos \frac{1}{2} \theta$ のグラフをかけ。

< 三角関数のグラフ (3) >

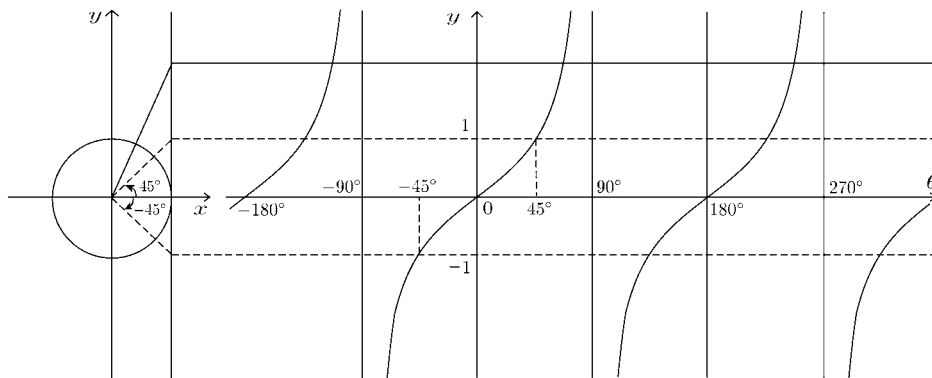
$y = \tan \theta$ のグラフ

右の図で、直線 OP と
直線 $x = 1$ の交点を $T(1, t)$
とすると、

$$\tan \theta = \frac{t}{1} = t$$



となって、点 T の y 座標が $\tan \theta$ に等しくなる。
これを利用して、 $y = \tan \theta$ のグラフをかく。



- * $y = \tan \theta$ は 180° を周期とする周期関数である。
- * $\theta = -90^\circ, \theta = 90^\circ, \theta = 270^\circ$ などの直線は、
 $y = \tan \theta$ のグラフの漸近線となっている。

問 漸近線をもつ関数を 2 つあげよ。そして、それを図示せよ。

< 三角比の公式 (1) >

右の図から

$$\sin(-\theta) = \frac{-y}{r} = -\frac{y}{r} = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \frac{x}{r} = \cos \theta$$

となるから

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

である。

同様にして

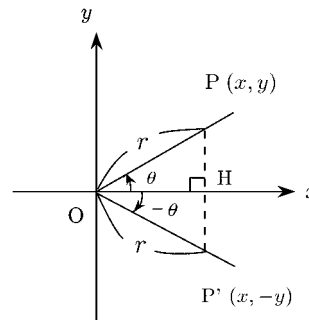
$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$

$$\sin(-45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

まとめると

$$\begin{aligned} \sin(-\theta) &= -\sin \theta \\ \cos(-\theta) &= \cos \theta \\ \tan(-\theta) &= -\tan \theta \end{aligned}$$



問 $\tan(-45^\circ)$, $\tan(-60^\circ)$ を求めよ。

< 三角比の公式 (2) >

右の図の直角三角形において

$$\cos B = \frac{a}{c} = \sin A = \sin(90^\circ - B)$$

より

$$\sin(90^\circ - B) = \cos B$$

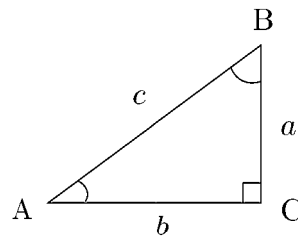
さらに

$$\sin B = \frac{b}{c} = \cos A = \cos(90^\circ - B)$$

より

$$\cos(90^\circ - B) = \sin B$$

例 $\sin 75^\circ = \sin(90^\circ - 15^\circ) = \cos 15^\circ$
 $\cos 65^\circ = \cos(90^\circ - 25^\circ) = \sin 25^\circ$ * sin と cos が入れ替わる



また、右図のように P, P', Q, Q' をきめると

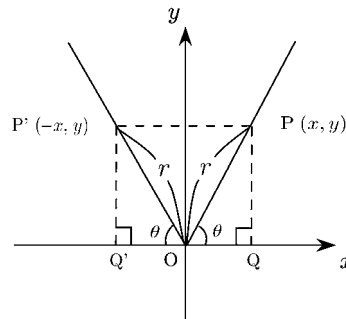
$\triangle OPQ$ と $\triangle OP'Q'$ が合同

になるから

$$\sin(180^\circ - \theta) = \frac{y}{r} = \sin \theta$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = \frac{-x}{r} = \frac{x}{r} = -\cos \theta$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = \frac{y}{-x} = -\frac{y}{x} = -\tan \theta$$



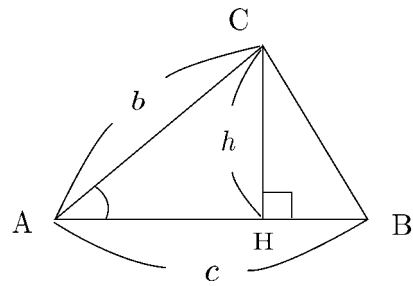
まとめると

$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$	$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$
$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$	$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$
	$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$

問 $\tan(90^\circ - \theta)$ のとき、どうなるか答えよ。

< 三角形の面積 >

三角形の面積 $S = \frac{1}{2} \times (\text{底辺}) \times (\text{高さ})$
 であるから、右の図で $\triangle ABC$ の高さを h
 とすると



$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times c \times h \\ &= \frac{1}{2} \times c \times b \sin A \\ &= \frac{1}{2} b c \sin A \end{aligned}$$

同様にして

$$S = \frac{1}{2} c a \sin B = \frac{1}{2} a b \sin C$$

となる。

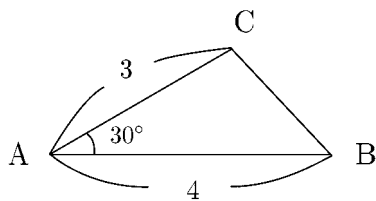
三角形の面積は

$$S = \frac{1}{2} a b \sin C = \frac{1}{2} b c \sin A = \frac{1}{2} c a \sin B$$

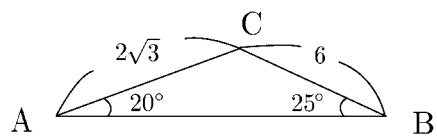
$\frac{1}{2} \times (2 \text{ 辺の積}) \times (\text{その 2 辺の間の角のサイン})$

問 次の $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

(1)



(2)



< 正弦定理 >

右の図より

$\triangle ACH$ において

$$CH = b \sin A$$

$\triangle BCH$ において

$$CH = a \sin B$$

であるから

$$a \sin B = b \sin A$$

両辺を $\sin A \cdot \sin B$ でわると

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

同様にして

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

つぎに、 $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると

$A = A'$ (BC の円周角から)

$\angle BCA' = 90^\circ$ ($A'B$ は直径から)

より

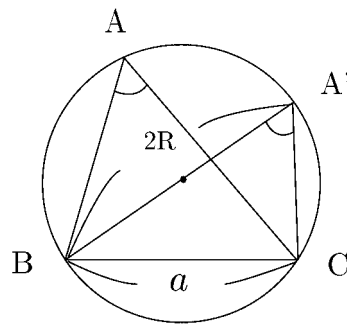
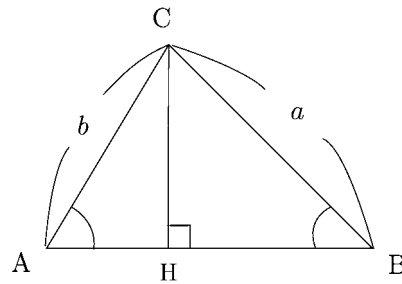
$$\sin A' = \frac{a}{2R} = \sin A$$

であるから

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

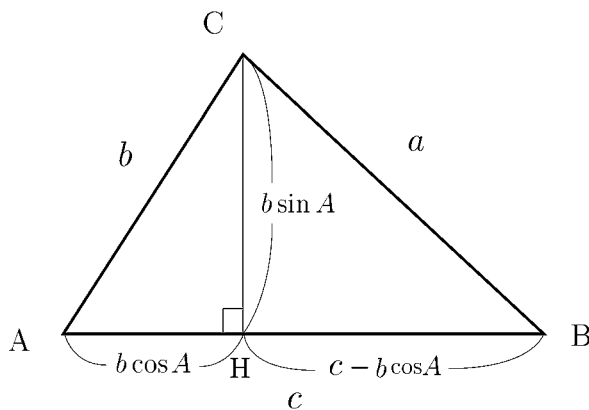
まとめると

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$	正弦定理
---	------



問 外接円, 内接円とは, どのような円か説明せよ。

< 余弦定理 >



上の図から, $\triangle BCH$ に三平方の定理を用いると

$$\begin{aligned} a^2 &= (b \sin A)^2 + (c - b \cos A)^2 \\ &= b^2 \sin^2 A + c^2 - 2bc \cos A + b^2 \cos^2 A \\ &= b^2 (\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc \cos A \end{aligned}$$

したがって

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad (\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \text{ より})$$

同じようにして

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

この3つの式をまとめて, **余弦定理**という。

以上まとめると,

すべての三角形は3つの辺と3つの角で作られている図形である。

どの三角形についても, 辺と角の関係は正弦定理と余弦定理で表される。

この理由で, 三角形の辺と角を求めるには, 正弦定理, または余弦定理の

どちらかを使用すればよいことがわかる。

問 余弦定理は, 鈍角三角形のときも成り立つ。そのことを証明しなさい。

< 加法定理 >

2つの角 α, β について, $\alpha + \beta$ の三角比は

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

が成り立つことが知られている。

この式を用いて次の重要な式が導かれる。

$$(1) \quad \sin(90^\circ + \theta) = \sin 90^\circ \cos \theta + \cos 90^\circ \sin \theta = 1 \times \cos \theta + 0 \times \sin \theta = \cos \theta$$

$$\sin(90^\circ + \theta) = \cos \theta$$

$$(2) \quad \sin(180^\circ + \theta) = \sin 180^\circ \cos \theta + \cos 180^\circ \sin \theta = 0 \times \cos \theta + (-1) \times \sin \theta = -\sin \theta$$

$$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin \theta$$

$$(3) \quad \sin(\theta + 360^\circ \times n) = \sin \theta \cos(360^\circ \times n) + \cos \theta \sin(360^\circ \times n) = \sin \theta \times (1) + \cos \theta \times (0) = \sin \theta$$

$$\sin(\theta + 360^\circ \times n) = \sin \theta$$

$$(4) \quad \sin 2\theta = \sin(\theta + \theta) = \sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sin \theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

問 加法定理を用いて、次の重要な式を導きなさい。

$$(1) \quad \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$(2) \quad \sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$(3) \quad \cos(90^\circ + \theta) = -\sin \theta$$

$$(4) \quad \cos(180^\circ + \theta) = -\cos \theta$$

$$(5) \quad \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$(6) \quad \cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$$

$$(7) \quad \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$(8) \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

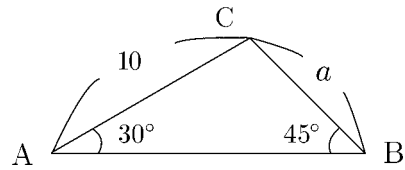
$$(9) \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$(10) \quad \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

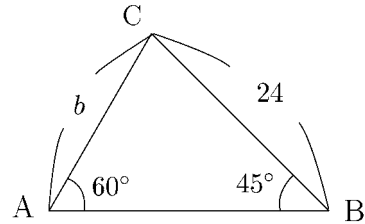
$$(11) \quad \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

< 三角比の問題 >

1. $\triangle ABC$ において, $b = 10$, $A = 30^\circ$, $B = 45^\circ$ のとき, 辺 BC の長さ a を求めよ。



2. $\triangle ABC$ において, $a = 24$, $A = 60^\circ$, $B = 45^\circ$ のとき, 辺 AC の長さ b を求めよ。



3. $\triangle ABC$ において, $a = 10$, $A = 30^\circ$, $C = 120^\circ$ のとき, 辺 AB の長さ c を求めよ。

4. $\triangle ABC$ において, $a = 6$, $b = \sqrt{2}$, $C = 45^\circ$ のとき, 辺 AB の長さ c を求めよ。

5. $\triangle ABC$ において, $b = 1$, $c = 2$, $A = 30^\circ$ のとき, 辺 BC の長さ a を求めよ。

6. $\triangle ABC$ において, $a = 3$, $b = 5$, $c = 7$ とする。

(1) $\cos C$ を求めよ。

(2) C を求めよ。

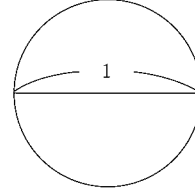
< π の話 >

π の定義 (π とは?)

* 直径 1 の円周の長さを π と定義する。

* (円周の長さ) ÷ (直径の長さ) = π

* $\frac{\text{円周の長さ}}{\text{直径の長さ}} = \pi$



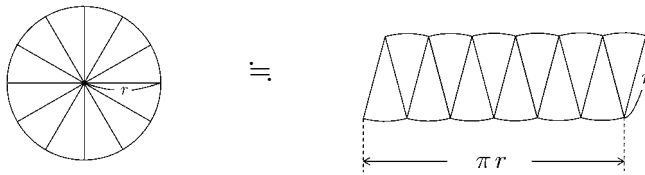
① 半径 r の円周の長さ l は

$$l = 2\pi r$$



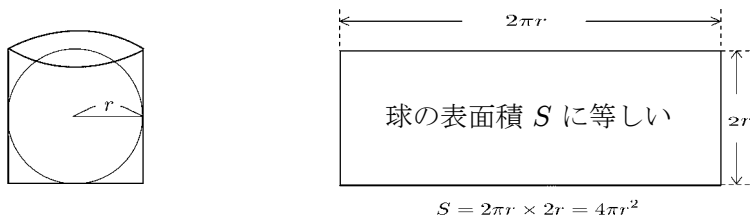
② 円の面積 S_1 は

$$S_1 = \pi r^2$$



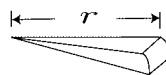
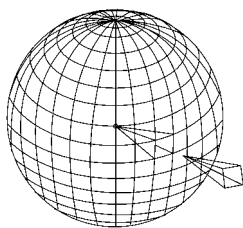
③ 球の表面積 S_2 は

$$S_2 = 4\pi r^2$$



④ 球の体積 V は

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$



の面積は $\frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times r$

であるから

$$V = \frac{1}{3} \times 4\pi r^2 \times r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

⑤ 参考式

$$S_1 = \int_0^r 2\pi x dx$$

$$V = \int_0^r S_2 dx = \int_0^r 4\pi x^2 dx$$

< 弧度法 (1) >

① 三角比

今まで、角の大きさを表すときに、直角の $\frac{1}{90}$ の角の大きさを 1 度として用いてきた。
すなわち

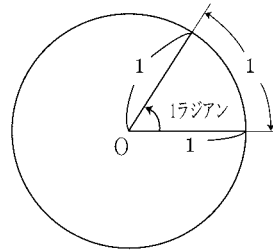
$$\text{直角の } \frac{1}{90} \text{ を 1 度 , 1 度の } \frac{1}{60} \text{ を 1 分 , 1 分の } \frac{1}{60} \text{ を 1 秒}$$

このような表し方を**度数法**という。

これに対して、これからは角の大きさの新しい表し方として、**弧度法**を考える。

右図のように、半径 1 の円の弧の長さが 1 のとき、
その角の大きさを

1 ラジアン (radian)



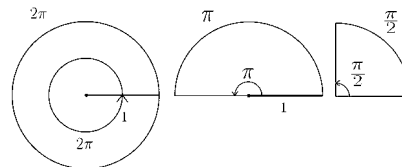
と、きめる。

したがって、半径 1 の円周の長さは、 2π であるから

$$2\pi \text{ (ラジアン)} = 360^\circ$$

$$\pi \text{ (ラジアン)} = 180^\circ$$

$$1 \text{ (ラジアン)} = \frac{180^\circ}{\pi}$$



と、なる。

問 1 次の表を完成させよ。

度数法	0°	30°	45°	90°	120°	135°	180°	225°	270°	360°
弧度法										

問 2 次の値を求めよ。

(1) $\sin \frac{\pi}{6}$

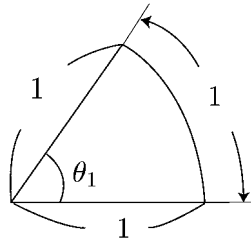
(2) $\cos \frac{\pi}{3}$

(3) $\tan \frac{\pi}{4}$

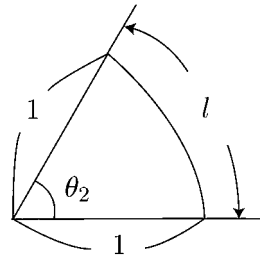
(4) $\sin \frac{\pi}{2}$

< 弧度法 (2) >

① 角の大きさ

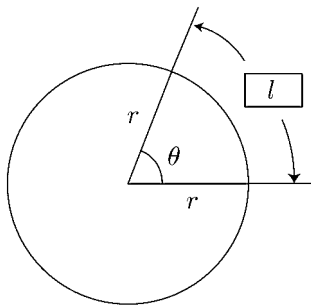


$$\theta_1 = 1 \text{ ラジアン}$$



$$\theta_2 = l \text{ ラジアン}$$

② 弧の長さ



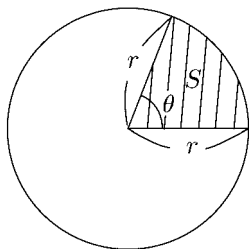
$$2\pi r : l = 2\pi : \theta \text{ より}$$

$$2\pi l = 2\pi r\theta$$

$$l = r\theta$$

③ 面積

扇形の面積を S とする



$$\pi r^2 : S = 2\pi : \theta$$

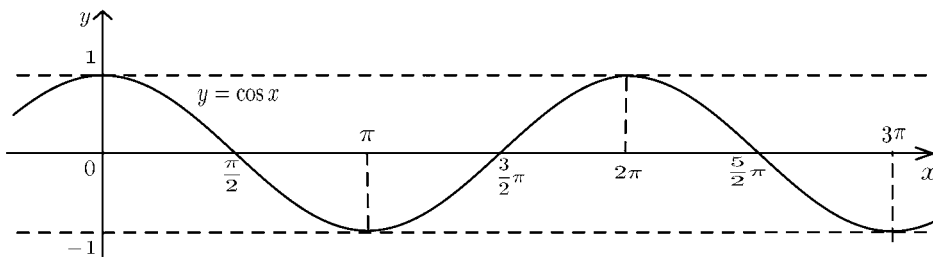
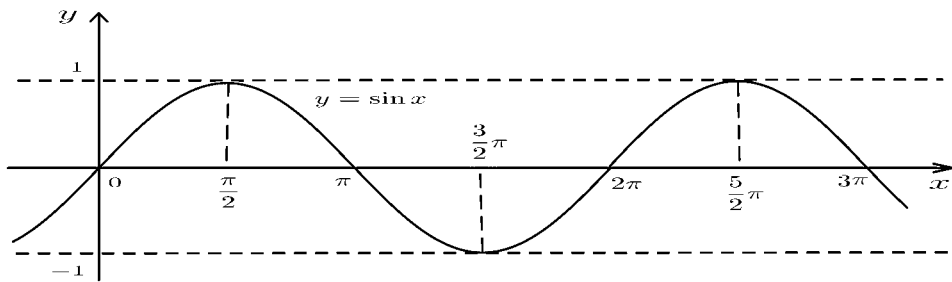
$$2\pi S = \pi r^2 \theta$$

$$S = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

問 なぜ角の大きさを表すときに、度数法と弧度法という2つの方法があると思いますか。

< 弧度法 (3) >

関数 $y = \sin x$, $y = \cos x$ のグラフは、次のようになる。



問 関数 $y = \tan x$, $(-\pi \leq x \leq 2\pi)$ のグラフをかけ。

< $a \sin \theta + b \cos \theta$ の変形 >

$a \sin \theta + b \cos \theta = r \sin(\theta + \alpha)$ に変形

加法定理を用いて、 $\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta$ を $r \sin(\theta + \alpha)$ の形に変形してみよう。

$\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta = r \sin(\theta + \alpha)$ において r, α を求める

① 計算力で求める

$\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta = r \sin(\theta + \alpha)$ とおくと、

$$\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta = r \sin \theta \cos \alpha + r \cos \theta \sin \alpha$$

左辺と右辺を比較して

$$\begin{cases} \sqrt{3} = r \cos \alpha \\ 1 = r \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = r^2 \cos^2 \alpha \cdots (1) \\ 1 = r^2 \sin^2 \alpha \cdots (2) \end{cases}$$

(1) + (2) より

$$3 + 1 = r^2, r = 2, (r > 0)$$

また、

$$\sqrt{3} = 2 \cos \alpha, \alpha = 60^\circ$$

であるから

$$\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta = 2 \sin(\theta + 60^\circ)$$

② 暗記力で求める

$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$ とおき、

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

を覚える

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$$

より

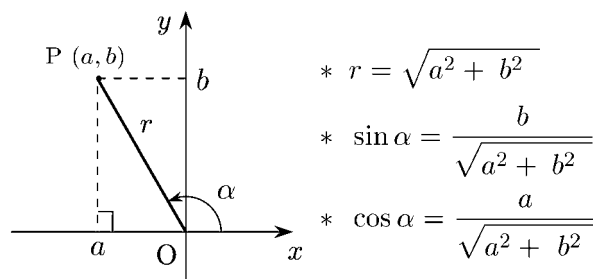
$$\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta \right)$$

$$= 2(\cos 60^\circ \sin \theta + \sin 60^\circ \cos \theta)$$

したがって、

$$\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta = 2 \sin(\theta + 60^\circ)$$

参照図



①の方法は、長期間忘れない。

②の方法は、テスト前には有効である。

なお、この $2 \sin(\theta + 60^\circ)$ のグラフは、 $y = 2 \sin \theta$ のグラフを θ 軸方向に -60° だけ平行移動したものである。

問 (1) と (2) は ①の方法、(3) は ②の方法で $r \sin(\theta + \alpha)$ に変形せよ。

(1) $\sin \theta + \cos \theta$

(2) $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta$

(3) $-\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$

< 三角関数の練習問題 A >

1. 次の θ について $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値をそれぞれ求めよ。

$$(1) \theta = \frac{2}{3}\pi$$

$$(2) \theta = -\frac{3}{4}\pi$$

2. 次の値を求めよ。

$$(1) \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{3} \cdot \tan \frac{\pi}{4}$$

$$(2) \cos \frac{\pi}{6} \cdot \sin \left(-\frac{\pi}{3}\right) \cdot \tan \frac{4}{3}\pi$$

3. θ は第 1 象限の角 ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) $\sin \theta = \frac{1}{5}$ である。 $\cos \theta$ と $\tan \theta$ の値を求めよ。

4. 次の方程式を解け。ただし ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) とする。

$$(1) \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$(2) \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(3) \tan \theta = -\sqrt{3}$$

5. 次の方程式を解け。ただし ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) とする。

$$(1) \sin \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(2) \cos 3\theta = -\frac{1}{2}$$

$$(3) \tan 2\theta = -\sqrt{3}$$

6. 次の値を求めよ。

$$(1) \sin 75^\circ$$

$$(2) \cos 165^\circ$$

$$(3) \tan 15^\circ$$

7. 加法定理を使って次の式の値を求めよ。

$$(1) \sin \theta + \sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) + \sin\left(\theta + \frac{4}{3}\pi\right)$$

8. 次の式を $r \sin(\theta + \alpha)$ の形に表わせ。ただし r は正, $-\pi < \alpha \leq \pi$ とする。

$$(1) -\sin \theta + \cos \theta$$

$$(2) \sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta$$

9. 次の関数のグラフをかけ。

$$(1) y = -\sin x + \cos x$$

$$(2) y = \sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta$$

< 平均変化率 >

関数 $y = f(x)$ において、 x の値が a から b まで変化するとき、

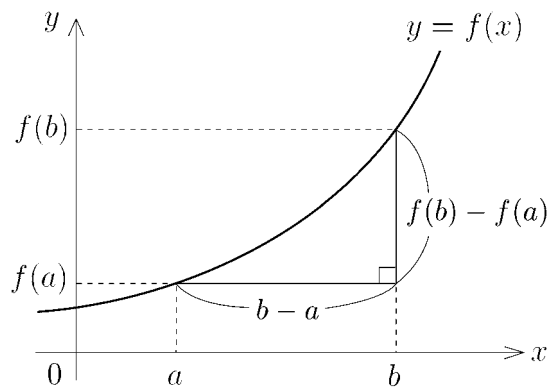
$$x \text{ の変化量は } b - a$$

$$y \text{ の変化量は } f(b) - f(a)$$

である。このとき

$$\frac{y \text{ の変化量}}{x \text{ の変化量}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

を、 x の値が a から b まで変化するときの $f(x)$ の平均変化率という。



この値は、曲線 $y = f(x)$ 上の 2 点 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ を通る直線の傾きを表している。

問 関数 $f(x) = x^2$ において、 x の値が次のように変化するときの平均変化率を求めよ。

(1) 1 から 3 まで

(2) -1 から -3 まで

< 極限值 >

関数 $f(x)$ について、 x を a と異なる値をとりながら、 a に限りなく近づけたとき、 $f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくとする。そのことを

$$x \rightarrow a \text{ のとき } f(x) \rightarrow \alpha \quad \text{または} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$$

と表す。そして、この値 α を、 $f(x)$ の**極限值**という。

例 $f(x) = 2x + 3$ とする

$$x \rightarrow 1 \text{ のとき, } f(x) \rightarrow 2 \times 1 + 3 = 5 \quad \text{これを} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (2x + 3) = 5 \text{ と表す}$$

$$x \rightarrow -1 \text{ のとき, } f(x) \rightarrow 2 \times (-1) + 3 = 1 \quad \text{これを} \quad \lim_{x \rightarrow -1} (2x + 3) = 1 \text{ と表す}$$

問 次の値を求めなさい。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} (2 + x)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (5 - 2x)$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} (2 + x)$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -1} (5 - 2x)$$

$$(5) \lim_{h \rightarrow 0} (3 + h + h^2)$$

$$(6) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5 - 2h}{3 + 2h}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 1)(x - 2)$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3}{x - 1}$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x - 12}{x^2 - 16}$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - x - 1}$$

< 微分係数 >

関数 $y = f(x)$ について、 x の値が a から $a + h$ まで変化するとき

$$x \text{ の変化量は } a + h - a = h$$

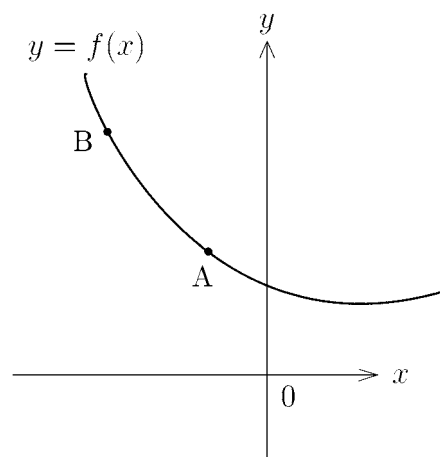
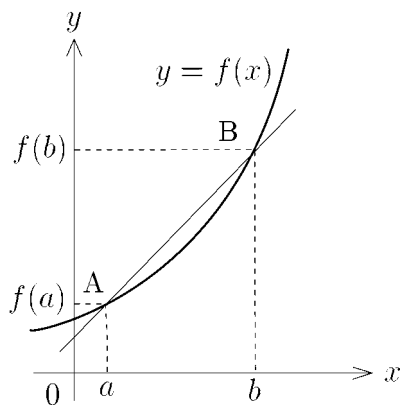
$$y \text{ の変化量は } f(a + h) - f(a)$$

である。このとき、平均変化率の

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

の式で、 h を限りなく 0 に近づけたときの値が定まるとき、この値を関数 $y = f(x)$ の $x = a$ における微分係数といい、 $f'(a)$ で表す。

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad \text{微分係数の定義}$$



問 関数 $f(x) = x^2$ において、

- (1) $a = 1$ (2) $a = -1$

の微分係数を求めよ。さらに、その関係を図示せよ。

< 導関数 (1) >

微分係数を求める式において、 a を変数とみれば $f'(a)$ は微分係数を定める関数となる。そこで a の代わりに文字 x を用いて、 $f'(x)$ という新しい関数を考える。すなわち

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

となる関数を考える。この関数 $f'(x)$ は導関数とよばれ、導関数を求めることを微分するという。

x が時刻、 $f(x)$ が距離を表している場合、 $f'(x)$ は速度を表す関数となる。また、 x が時刻、 $f'(x)$ が速度を表している場合、 $f''(x)$ は加速度を表す関数となる。

問 1 次の関数の () 内に示した x の値における微分係数を求めよ。

$$(1) f(x) = 3x^2 + 5x - 1 \quad (x = 2)$$

$$(2) f(x) = -x^2 - 7x + 3 \quad (x = 3)$$

$$(3) f(x) = 2x^2 - 8x \quad (x = -1)$$

問 2 次の関数を微分せよ。

$$(1) f(x) = 15$$

$$(2) f(x) = -7x - 17$$

$$(3) f(x) = x^3$$

$$(4) y = 82 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{6}x^3 \quad (y = x^n \text{ のとき } y'(x) = nx^{n-1} \text{ であることを利用する)}$$

< 導関数 (2) >

関数 $y = f(x)$ の導関数を表すには, $f'(x)$ のほかに

$$y' \quad \{f(x)\}' \quad \frac{dy}{dx}$$

などの記号も用いられる。

次に $(x)' = 1$, $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$ であるから, 一般に次の公式が成り立つことが予想される。

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

さらに, 定数 k について,

$$\{kf(x)\}' = kf'(x)$$

$$\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$$

$$\{f(x) - g(x)\}' = f'(x) - g'(x)$$

が, 成り立つ。

問 次の関数を微分せよ。

(1) $f(x) = 3x^2 + 5x - 1$

(2) $f(x) = -x^2 - 7x + 3$

(3) $f(x) = 2x^2 - 8x$

< 接線の方程式 >

点 (x_1, y_1) を通り, 傾き m の直線の方程式は

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

である。

そして, 曲線 $y = f(x)$ 上にある点 $(a, f(a))$ における接線の傾きは $f'(a)$ である。

したがって, 曲線 $y = f(x)$ 上にある点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

問 曲線 $y = x^2$ 上の次の点における接線の方程式を求めよ。また, それらを一つの座標軸に図示せよ。

(1) 点 $(1, 1)$

(2) 点 $(2, 4)$

(3) 点 $(3, 9)$

(4) 点 $(-1, 1)$

(5) 点 $(-2, 4)$

(6) 点 $(-3, 9)$

(7) 点 $(0, 0)$

< 微分の問題 (1) >

1 関数 $f(x) = 3x^2 - 4x$ について、 x の値が次のように変化するときの平均変化率を求めよ。

(1) 1 から 3

(2) -1 から $-1 + h$

2 次の値を求めなさい。

(1) $\lim_{h \rightarrow 0} (5 - 3h + h^2 + 2h^3)$

(2) $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3} + 3h - h^2 + \frac{1}{3}h^5 \right)$

3 次の関数を微分せよ。

(1) $y = 5x^3 - 3x^2 + 2$

(2) $y = -2x^2 + 3x - 1$

(3) $y = (3x - 2)^2$

(4) $y = (x - 2)(x^2 + 3x - 1)$

4 次の関数について、与えられた x の値における微分係数を求めよ。

(1) $f(x) = x^2 - x - 3$ ($x = -2$)

(2) $f(x) = -x^3 + x^2 + x$ ($x = 2$)

5 次の曲線について、与えられた曲線上の点における接線の方程式を求めよ。

(1) $y = x^2 - 3x + 2$ (2, 0)

(2) $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ (-1, -8)

< 関数の増減 (1) >

関数 $y = f(x)$ のグラフについて、その導関数の図形的な意味を考えてみよう。一般に、関数 $y = f(x)$ について、 $f'(x)$ は図 1 のような関数 $y = f(x)$ のグラフ上の点 $P(x, f(x))$ における接線の傾きである。

そこで、関数のグラフ上の点における接線の傾きと導関数との関係から関数の増減、減少について考えよう。いま

$$f(x) = x^2$$

のグラフを例にとってみる。この関数の導関数は

$$f'(x) = 2x$$

であった。

x の値が増加しているとき、 $f'(x)$ の符号を調べてみると図 2 のようになる。

図をみると、 x の値が増えるにしたがって、

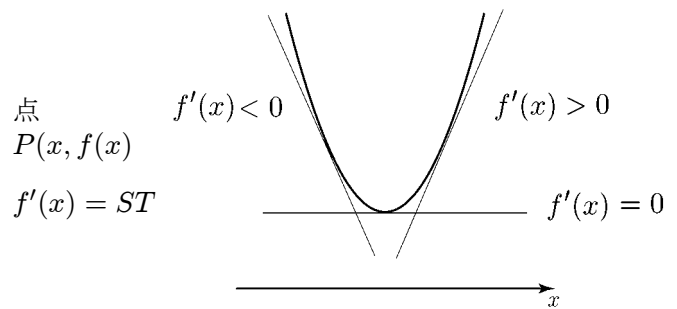
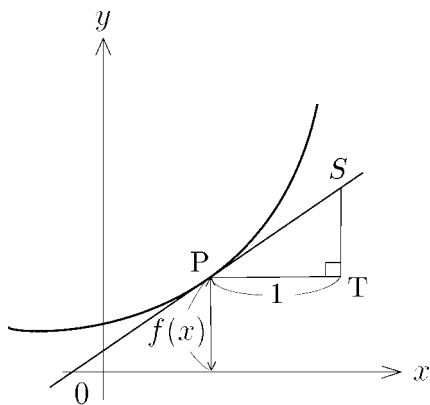
- I $f'(x) < 0$ のときは、 $f(x)$ の値は減少、
- II $f'(x) > 0$ のときは、 $f(x)$ の値は増加

となっている。

以上のことは、 $f(x)$ が一般の関数であっても成り立っていて、 x の値が増えるにしたがって、つねに

- $f'(x) > 0$ のときは、 $f(x)$ の値は増加、
- $f'(x) < 0$ のときは、 $f(x)$ の値は減少

となっている。



問 次の関数の増減を調べてグラフをかけ。

(1) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$

(2) $f(x) = x^2 - 3x$

< 関数の増減 (2) >

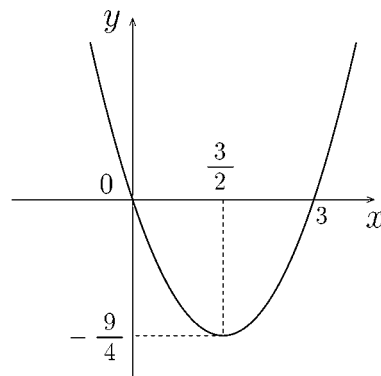
関数 $f(x) = x^2 - 3x$ を微分すると

$$f'(x) = 2x - 3 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$f'(x) = 0$ を解くと、 $x = \frac{3}{2}$ であるから

$$x < \frac{3}{2} \text{ のとき} \quad f'(x) < 0$$

$$x > \frac{3}{2} \text{ のとき} \quad f'(x) > 0$$



となる。このことを表にまとめると、次のようになる。

x	...	$\frac{3}{2}$...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	$-\frac{9}{4}$	↗

$$\begin{aligned}
 * f\left(\frac{3}{2}\right) &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \times \frac{3}{2} \\
 &= \frac{9}{4} - \frac{9}{2} \\
 &= -\frac{9}{4}
 \end{aligned}$$

したがって、関数 $f(x) = x^2 - 3x$ は

$$x < \frac{3}{2} \text{ のとき減少する}$$

$$x > \frac{3}{2} \text{ のとき増加する}$$

上のような表を**増減表**という。

問 次の関数の増減を調べてグラフをかけ。

(1) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$

(2) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$

(3) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

(4) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

(5) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

< 関数の極大・極小 >

関数 $f(x) = x^3 - 3x$ のグラフは右図のようになる。

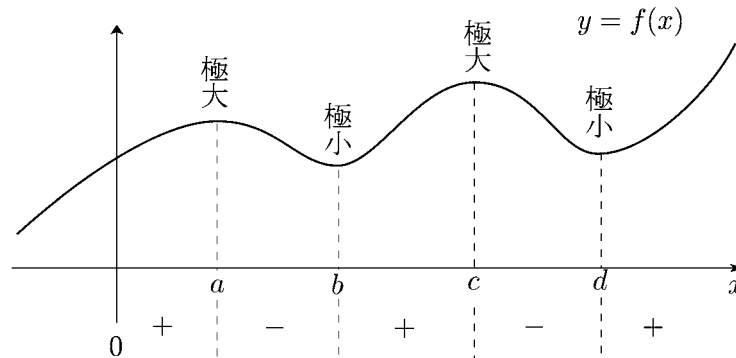
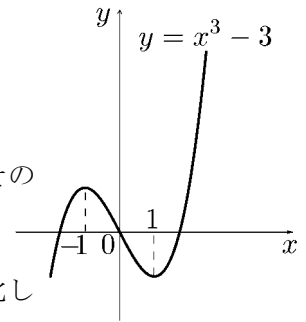
関数 $f(x)$ の値は、 $x = -1$ の前後で増加から減少へと変化している。

こうしたとき、関数 $f(x)$ は $x = -1$ において、**極大になる**といい、そのときの $f(x)$ の値を**極大値**という。

同じように、関数 $f(x)$ の値は、 $x = 1$ の前後で減少から増加へと変化している。

こうしたとき、関数 $f(x)$ は $x = 1$ において、**極小になる**といい、そのときの $f(x)$ の値を**極小値**という。

極大値と極小値をまとめて**極値**という。



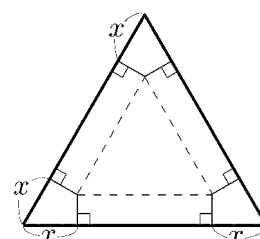
問 1 次の関数の極値を求めよ。

(1) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5$

(2) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 15$

問 2 1 辺の長さが 6cm の正方形の厚紙がある。その 4 すみから同じ形の正方形を切つてふたのない箱を作る。その箱の容積が最大になるには、切り落とす正方形の 1 辺の長さをどのようにすればよいか。

問 3 1 辺の長さが 12cm の正三角形のベニヤ板の 3 すみから、図のように四角形を切り取って箱を作る。この箱の容積を最大にするには、 x の長さをいくらにすればよいか。



< 微分の問題 (2) >

1 次の関数の増減を調べよ。

(1) $f(x) = x^2 - 2x + 3$

(2) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2$

2 次の関数の極値を求めよ。

(1) $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$

(2) $y = -x^3 + 3x$

3 次の関数の極値を求め、グラフを描け。

(1) $y = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$

(2) $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}$

4 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

(1) $y = x^3 - 12x$ $(-3 \leq x \leq 3)$

(2) $y = x^3 - 3x^2 + 4$ $(-2 \leq x \leq 2)$

< 不定積分 (1) >

導関数 $f'(x)$ は、関数 $f(x)$ を微分することによって求めることができる。

逆に、関数 $f(x)$ を、導関数 $f'(x)$ から求めることについて考えてみよう。

たとえば

$$(x^2)' = 2x$$

$$(x^2 + 1)' = 2x$$

$$(x^2 - 1)' = 2x$$

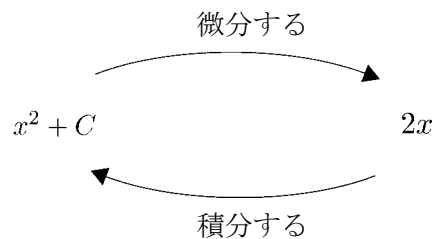
のように、微分すると $2x$ となる関数は無数にある。しかし、どれをとっても

$$x^2 + C \quad (C \text{ は定数})$$

の形になっている。この $x^2 + C$ を $2x$ の不定積分といい

$$\int 2x dx = x^2 + C \quad (c \text{ は定数})$$

で表す。



一般に、関数 $f(x)$ に対し、関数 $F(x)$ が

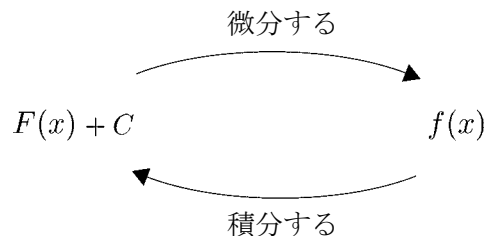
$$F'(x) = f(x)$$

となるとき、関数 $f(x)$ の不定積分は

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (C \text{ を積分定数という})$$

と表される。

そして、関数 $f(x)$ の不定積分を求めることを $f(x)$ を積分するという。



不定積分の演算は微分の演算の逆であることがわかる。…… (1)

問 (1) を示す具体的な例をかきなさい

< 不定積分 (2) >

$$(x)' = 1 \text{ より,} \quad \int 1dx = x + C$$

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x \text{ より,} \quad \int xdx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2 \text{ より,} \quad \int x^2dx = \frac{x^3}{3} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

より, 次の式が成り立つことがわかる。

$n = 0, 1, 2$ のとき

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

さらに, n を自然数とすると

$$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' = \frac{1}{n+1}(x^{n+1})' = \frac{1}{n+1}(n+1)x^n = x^n$$

であるから, 上の式は n が自然数としても成り立つ。

問 次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int 3dx$$

$$(2) \int 10dx$$

$$(3) \int \frac{4}{7}dx$$

$$(4) \int 3xdx$$

$$(5) \int \frac{x}{3}dx$$

$$(6) \int (-5x)dx$$

$$(7) \int (-x^2)dx$$

$$(8) \int \frac{x^2}{3}dx$$

$$(9) \int 3x^3dx$$

$$(10) \int \left(-\frac{7}{3}x^3\right)dx$$

< 不定積分 (3) >

関数 $f(x)$ 、 $g(x)$ に対し、関数 $F(x)$ 、 $G(x)$ が $F'(x) = f(x)$ 、 $G'(x) = g(x)$

を満たすとき

$$\{kF(x)\}' = k\{F(x)\}' = kf(x) \quad (k \text{ は定数})$$

$$\{F(x) + G(x)\}' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$$

$$\{F(x) - G(x)\}' = F'(x) - G'(x) = f(x) - g(x)$$

したがって、次の公式が成り立つ。

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$$

$$\int \{f(x) + g(x)\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int \{f(x) - g(x)\}dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (4x + 3)dx$

(2) $\int (x^2 - 3x + 1)dx$

(3) $\int (-10x - 9)dx$

(4) $\int (-3x^2 + 2x - 3)dx$

(5) $\int (x + 1)(x - 2)dx$

(6) $\int (2x - 3)(x + 1)dx$

(7) $\int (x - 2)^2 dx$

(8) $\int (3x + 2)^2 dx$

< 定積分 (1) >

関数 $f(x)$ の不定積分を $F(x)$ とすると, 2つの実数 a, b に対して,
 $F(b) - F(a)$ を $f(x)$ の a から b までの定積分といい

$$\int_a^b f(x)dx$$

で表す。このとき, a を下端, b を上端という。

また, $F(b) - F(a)$ を $[F(x)]_a^b$ で表す。

$F'(x) = f(x)$ のとき

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

問 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^2 4x dx$

(2) $\int_1^3 dx$

(3) $\int_{-1}^1 3x^2 dx$

(4) $\int_0^3 x^3 dx$

(5) $\int_{-1}^1 x^3 dx$

< 定積分 (2) >

定積分についても不定積分と同様に、次の公式が成り立つ。

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx \quad (k \text{ は定数})$$

$$\int_a^b \{f(x) + g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b \{f(x) - g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

問 次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_0^3 (3x^2 + 2x - 3)dx$$

$$(2) \int_0^2 (x^2 - 2x - 4)dx$$

$$(3) \int_{-1}^2 (-x^2 + 2x - 3)dx$$

$$(4) \int_{-2}^2 (x + 2)^2 dx$$

$$(5) \int_{-2}^1 (x + 3)^2 dx$$

< 定積分 (3) >

定積分の上端, 下端についての性質として, 次のことが成り立つ。

$$1 \quad \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$2 \quad \int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$$

$$3 \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

問 上の性質 **1 2 3** が成り立つことを示せ。

1

2

3

< $f(t)$ の定積分 >

t を変数とするとき，関数の定積分は

$$\int_a^b f(t)dt = \left[F(t) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

となるから，次の式が成り立つ。

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx$$

したがって，定積分の値は変数が異なっても同じ値となる。

また， $f(t)$ の定積分

$$\int_a^x f(t)dt = \left[F(t) \right]_a^x = F(x) - F(a)$$

は， x の関数である。右辺の式を x で微分すると

$$F'(x) = f(x)$$

となる。まとめると

a を定数とするとき，

x の関数 $\int_a^x f(t)dt$ の導関数は $f(x)$ である

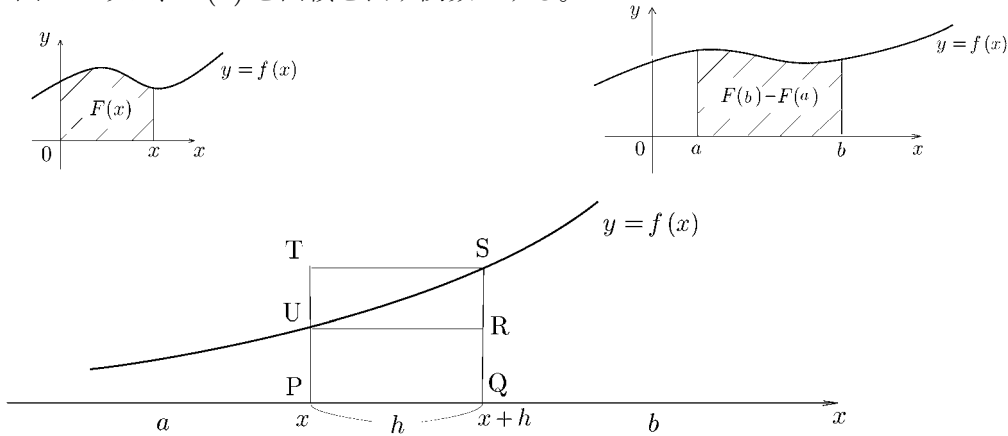
x の関数 $\int_a^x f(t)dt$ の導関数を $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt$ で表すときもある。

問 等式 $\int_a^x f(t)dt = x^2 + x - 2$ が，任意の x に対して成り立つとき，

関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

< 定積分と面積 >

下の図のように、 $F(x)$ を面積を表す関数とする。



上の図から

長方形PQRUの面積 $\leq F(x+h) - F(x) \leq$ 長方形PQRSTの面積

$$h \times f(x) \leq F(x+h) - F(x) \leq h \times f(x+h)$$

各辺をそれぞれ $h(h > 0$ であるから) で割ると

$$f(x) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x+h)$$

各辺の極限をとると

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x) \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h)$$

$$f(x) \leq F'(x) \leq f(x)$$

$$F'(x) = f(x)$$

したがって

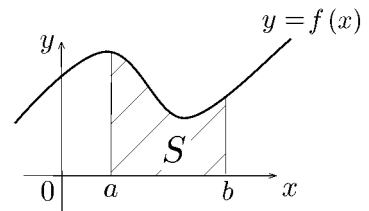
$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

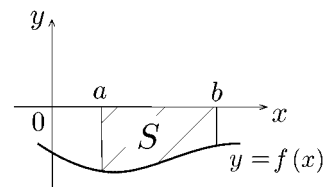
以上をまとめると

曲線 $y = f(x)(> 0)$ と x 軸および2直線 $x = a, x = b$ で囲まれる部分の面積 S は次の式で与えられる。

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

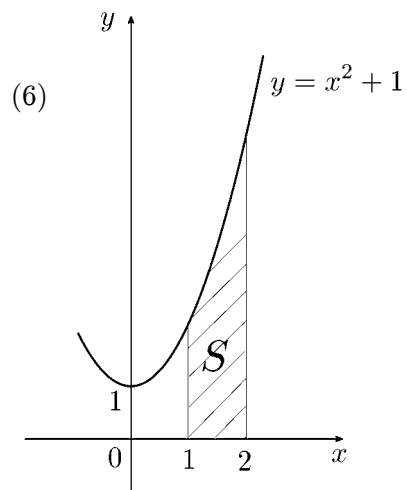
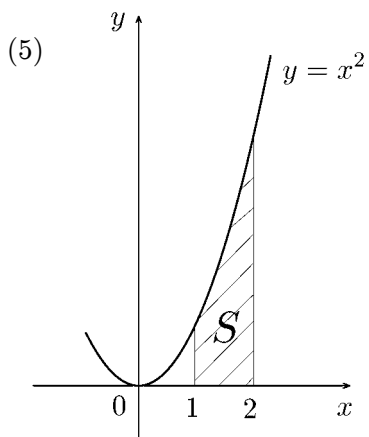
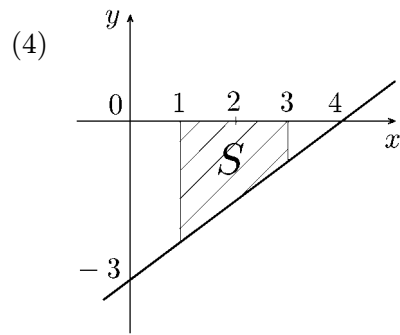
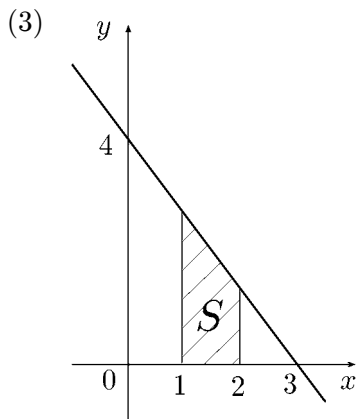
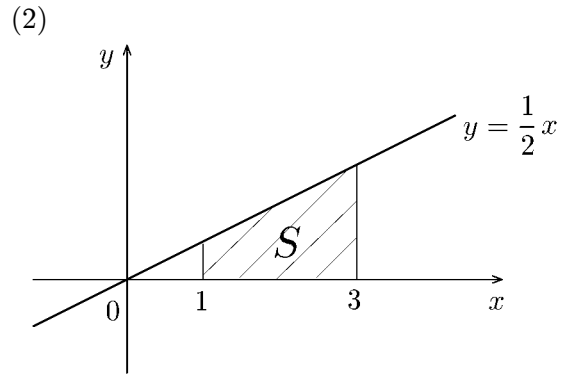
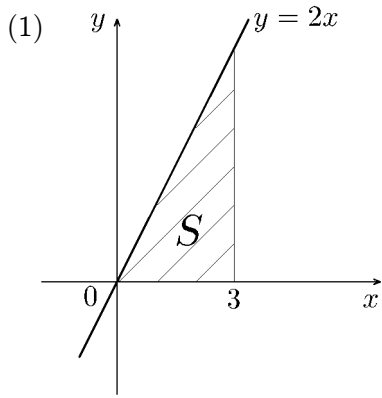


問 右下図の面積 S を $f(x)$ に関する定積分で表せ。



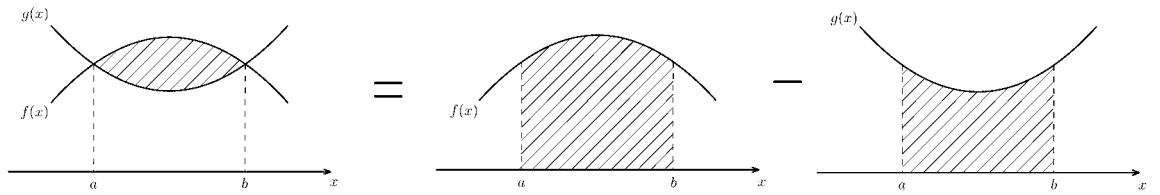
< 面積の問題 >

1 次の図形の面積 S を求めよ。



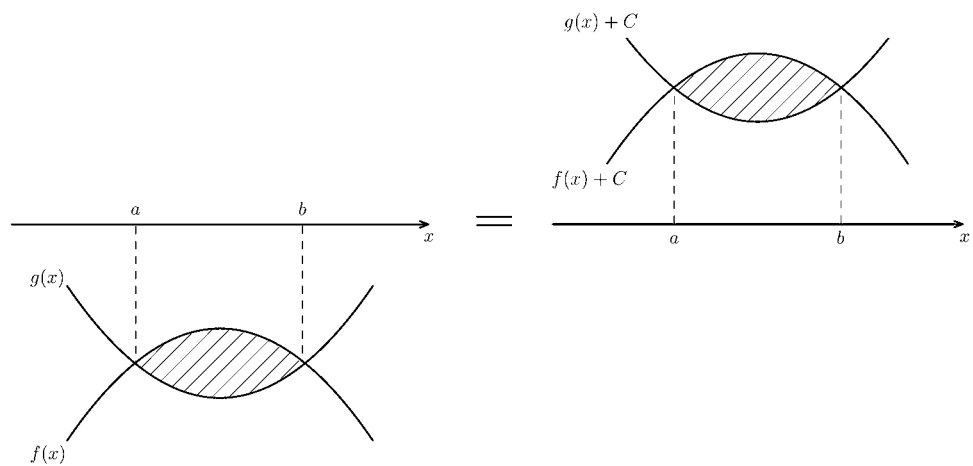
< 2 曲線で囲まれた面積 >

①



$$\int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

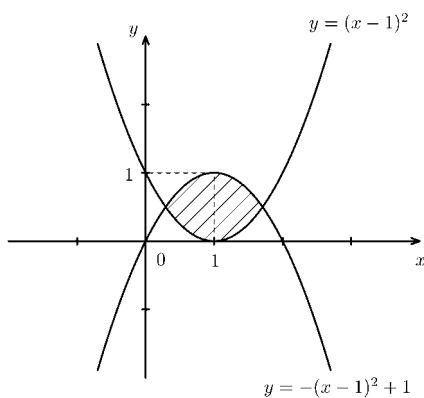
②



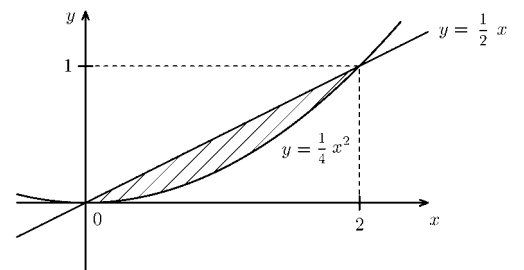
$$\int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx = \int_a^b \left[\{f(x) + C\} - \{g(x) + C\} \right] dx$$

問 面積を求めよ。

(1)

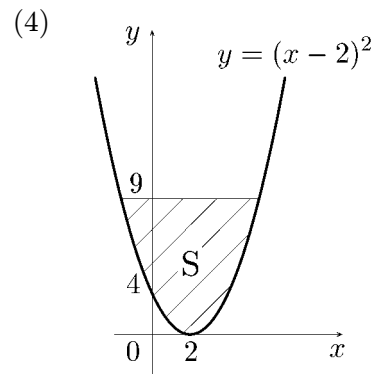
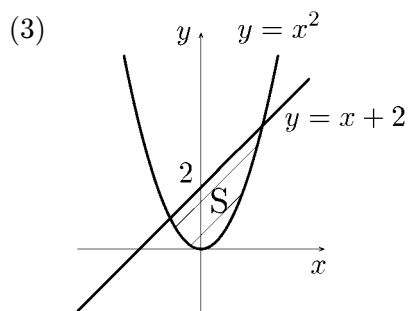
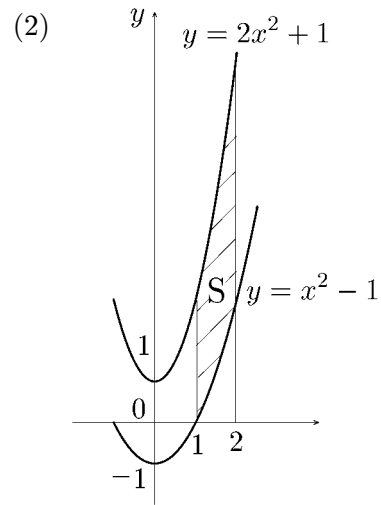
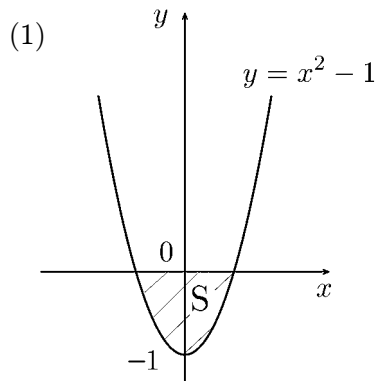


(2)



< 2 曲面で囲まれた面積の問題 >

1 次の図形の面積を求めよ。



2 放物線 $y = x^2 - 3x$ と x 軸および 2 直線 $x = 1, x = 5$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和を求めよ。

< 放物線と x 軸で囲まれた面積 >

放物線 $y = ax^2 + bx + c$ について、 $y = 0$ の解を α 、 β ($\alpha < \beta$) とすると

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

と表すことができる。

したがって、放物線と x 軸で囲まれた部分の面積 S は次の式で与えられる

$$S = - \int_{\alpha}^{\beta} a(x - \alpha)(x - \beta) dx$$

これを計算すると

$$S = - \int_{\alpha}^{\beta} a(x - \alpha)(x - \beta) dx = \frac{a}{6}(\beta - \alpha)^3$$

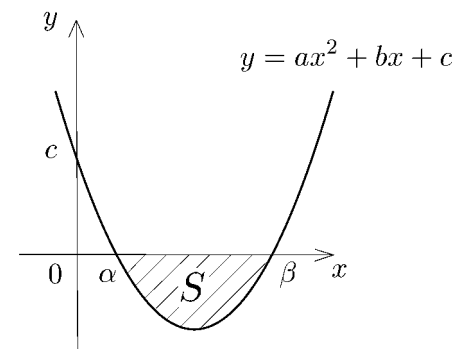
となる。また

$$\int_{\alpha}^{\beta} a(x - \alpha)(x - \beta) dx = -\frac{a}{6}(\beta - \alpha)^3 \quad (1)$$

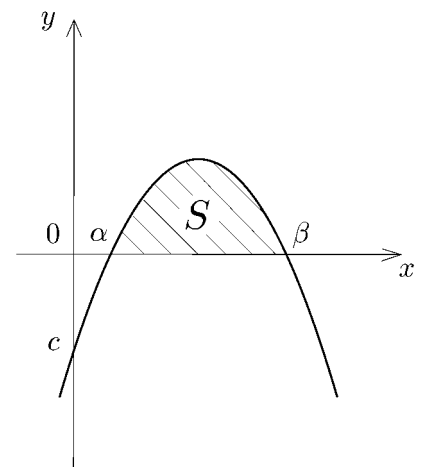
が成り立つ。

問 (1) の式が成り立つことを確かめなさい。

$a > 0$



$a < 0$



< 積分の問題 >

1 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (-2)dx$

(2) $\int (3x - 2)dx$

(3) $\int 3(x - 2)dx$

(4) $\int (x^3 - 1)dx$

(5) $\int (1 - x + x^2)dx$

(6) $\int (x + 2)(x - 1)dx$

2 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^1 (2x - 3)dx$

(2) $\int_1^2 (x^2 - x)dx$

(3) $\int_0^1 x(x - 2)dx$

(4) $\int_1^3 (x - 1)(x - 3)dx$

3 次の2つの曲線または直線で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1) $y = 2x + 3, y = x^2$

(2) $y = 2x - 1, y = x^2 - 3x + 5$

(3) $y = x^2 - 5x, y = 2 - 2x^2$

(4) $y = 2x^2 - 6x + 4, y = -3x^2 + 9x - 6$

4 次の放物線と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1) $y = (x - 3)(x + 2)$

(2) $y = -x^2 + 3x$

< ボールを落とす >

地球上で、つかんだボールをそっと離して落としたことについて考える。
ボールに働く重力の強さ f は、ボールの質量 m に比例するから、その比例定数を g とすると

$$f = mg$$

である。一方、ボールの加速度 $\alpha = g$ は

$$\alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = g \quad (1)$$

と表される。

(1) を解くには、両辺を積分すると

$$v = \frac{dx}{dt} = gt + v_0$$

さらに、積分をすると

$$x = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0$$

ボールを離す瞬間を $t = 0$ とし、そのときの高さを原点にすると、 $v_0 = 0$,
 $x_0 = 0$ より、

$$x = \frac{1}{2}gt^2$$

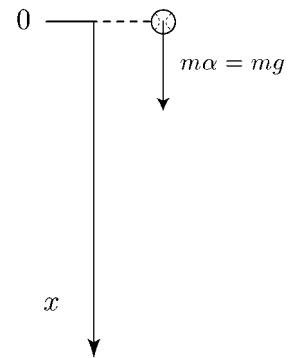
となる。

g は重力加速度で、約 $9.8(\text{m}/\text{sec}^2)$ である。

v_0 は、何を表しているのだろうか？

x_0 は、何を表しているのだろうか？

問 ボールの速さが、松阪投手の最高速度 $150\text{km}/\text{h}$ に達するには何秒かかるか。
また、そのときボールは何 m 落ちるか。



< ボールを投げる >

地球上で、ボールを真上に投げるについて考える。

投げ上げられたボールは、下向きに重力が働く。その大きさは mg で上向きに働く力をプラス、下向きに働く力をマイナスとすると、ボールに働く力 f は

$$f = -mg$$

で表される。

一方、ボールの加速度 $\alpha = g$ は

$$\alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -g$$

と表される。

両辺を、 t で積分すると

$$v = \frac{dx}{dt} = -gt + v_0$$

さらに、積分をすると

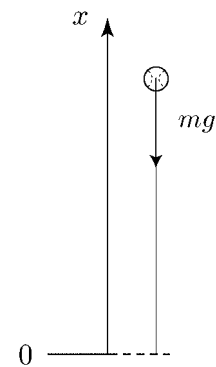
$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0$$

となる。

ボールを投げ上げた位置を原点とすると $x_0 = 0$ より、

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t$$

となる。



g は重力加速度で、約 $9.8(\text{m}/\text{sec}^2)$ である。

$v_0 = 0$ は何を表しているのだろうか。

問 ボールを初速 $150\text{km}/\text{h}$ で真上に投げ上げたとする。

(1) 何秒後に地上に落ちるか。

(2) ボールの最高の高さは何メートルか。

< 付録 1-1 >

[ボールを目標にあてる]

Monkey Hunting



可愛い子ザルが、木の枝にぶらさがっている。それを見つけたいたずらっ子がボールをサルめがけて投げつけた。

その瞬間、それに気づいたサルは、枝から手を離した。浅はかなサル知恵であったかどうか、果たしてボールはサルに命中するのだろうか。

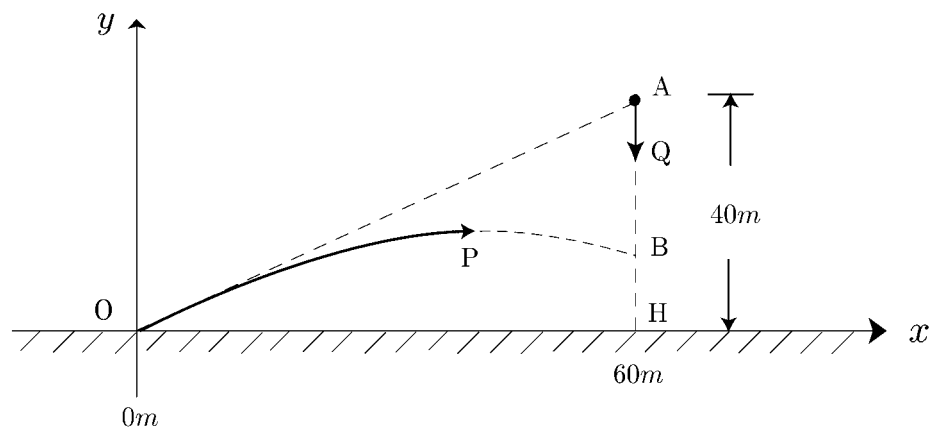


図 1 図 2 のことを表したのは上の図である。

(1) O, A, B は、どのような位置を表しているか。

(2) P, Q は何を表しているか。

(3) サルに向かってボールを投げるとは数学（物理）上どのように対応すればよいか。

< 付録 1-2 >

[ボールを目標にあてる]

ボールの初速度を $v_0 = (30, 20)$ とすると、 t 秒後の速度 $v = (v_x, v_y)$ は次のように表される。

$$v_x = 30 + \int_0^t 0 \, dt = 30 \quad (m/s)$$

$$v_y = 20 + \int_0^t (-g) \, dt = 20 - gt \quad (m/s)$$

t 秒後のボールの位置 $P(x, y)$ は

$$x = \int_0^t 30 \, dt = 30t \quad (m)$$

$$y = \int_0^t (20 - gt) \, dt = 20t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (m) \quad (1)$$

で表される。

同様にして、 t 秒後のサルの位置 $Q(m, n)$ は、

$$m = OH = 60 \quad (m)$$

$$n = AH - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2)$$

で表される。

したがって、点 P が AH 上に達するのに要する時間は

$$30t = 60, \text{ すなわち } t = 2 \quad (\text{秒})$$

このときのボールの高さは (1) より

$$y = 20 \times 2 - \frac{1}{2} \times 9.8 \times 2^2$$

また、サルの高さは (2) より

$$n = 40 - \frac{1}{2} \times 9.8 \times 2^2$$

となって、ボールは確かにサルに命中する。

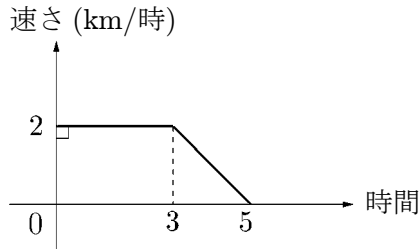
つまり、サルが重力で落ちる距離だけ、同様にボールも重力で落下するのであるから、最初からサルを狙って投げると必ず当たるのである。

問 「重力」という言葉をわかりやすく説明しなさい。

< 付録 2 >

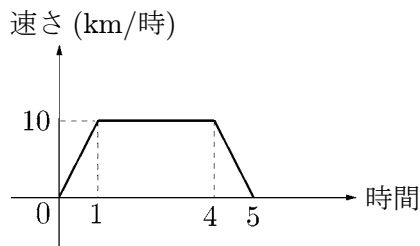
① **桜木君の場合** … バスケット部の桜木君が左の図のように歩いた。

歩いた距離を求めてみよう。

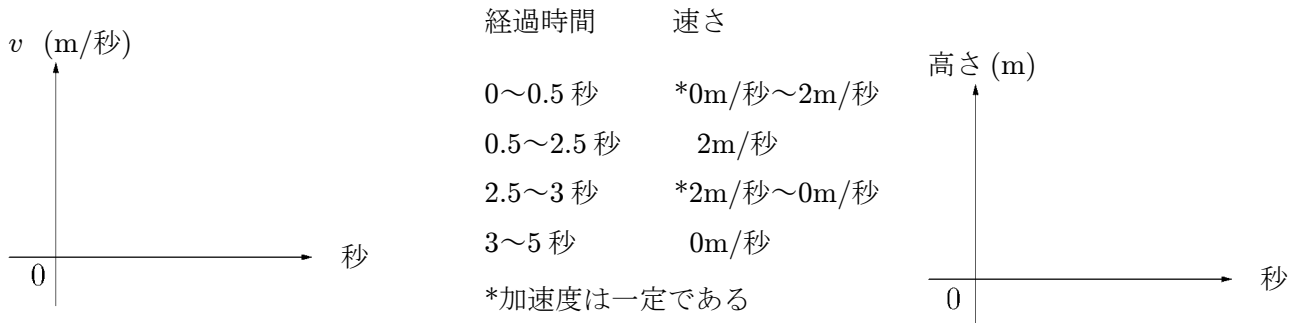


② **流川君の場合** … 流川君は自転車で、左の図のように行った。

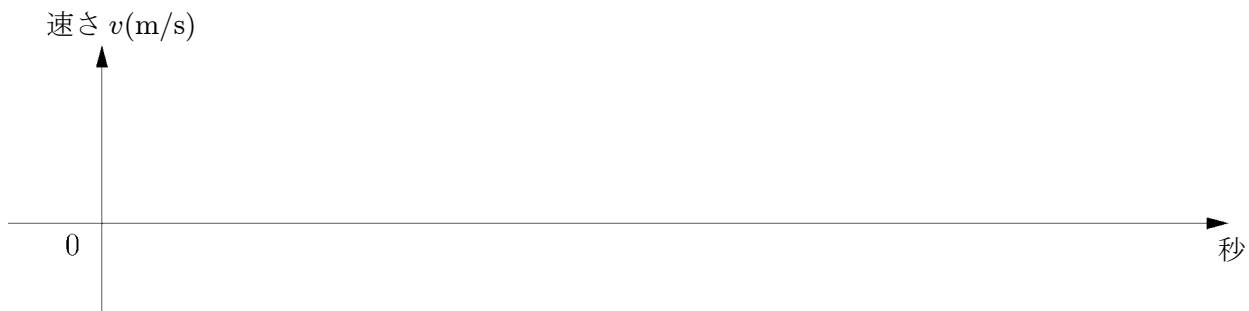
移動した距離を、積分を使って求めてみよう。



③ **エレベーター問題** … 1 F から 2 F まで、下記のようにエレベーターが動いている。そのことを 2 通りの図で表してみよう。



④ **エレベーター問題** … 1 F から 4 F まで、上記のようにエレベーターが動いている。それをグラフで表してみよう。



1 F のフロアから 4 F フロアまでの高さを積分を使って求めてみよう。

わかったことを書いてみよう