



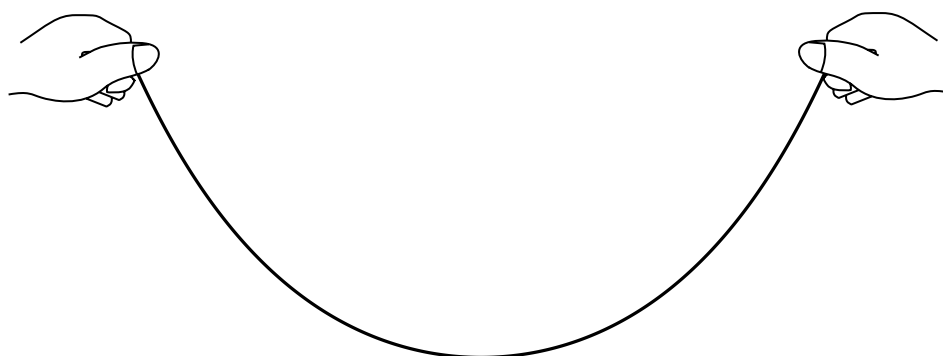
高知工科大学

Kochi University of Technology

基礎数学

1

(2005年度版)



数と式の計算・2次関数

指数関数・対数関数とそのグラフ

山崎 和雄 著

わり算

| | |
|--|--|
| | |
|--|--|

目的…正確に、速く計算できる

分 秒 (2.5 分以内)

- | | |
|---|---|
| <p>① $15 \div 2 = \dots$</p> <p>② $26 \div 3 = \dots$</p> <p>③ $19 \div 4 = \dots$</p> <p>④ $27 \div 6 = \dots$</p> <p>⑤ $36 \div 7 = \dots$</p> <p>⑥ $19 \div 3 = \dots$</p> <p>⑦ $38 \div 7 = \dots$</p> <p>⑧ $23 \div 5 = \dots$</p> <p>⑨ $37 \div 9 = \dots$</p> <p>⑩ $49 \div 6 = \dots$</p> <p>⑪ $39 \div 5 = \dots$</p> <p>⑫ $25 \div 4 = \dots$</p> <p>⑬ $45 \div 7 = \dots$</p> <p>⑭ $36 \div 8 = \dots$</p> <p>⑮ $17 \div 2 = \dots$</p> <p>⑯ $37 \div 4 = \dots$</p> <p>⑰ $25 \div 6 = \dots$</p> <p>⑱ $13 \div 5 = \dots$</p> <p>⑲ $44 \div 7 = \dots$</p> <p>⑳ $28 \div 3 = \dots$</p> <p>㉑ $38 \div 9 = \dots$</p> <p>㉒ $13 \div 6 = \dots$</p> <p>㉓ $35 \div 4 = \dots$</p> <p>㉔ $43 \div 8 = \dots$</p> <p>㉕ $23 \div 5 = \dots$</p> | <p>㉖ $19 \div 8 = \dots$</p> <p>㉗ $37 \div 9 = \dots$</p> <p>㉘ $22 \div 6 = \dots$</p> <p>㉙ $18 \div 5 = \dots$</p> <p>㉚ $33 \div 6 = \dots$</p> <p>㉛ $29 \div 4 = \dots$</p> <p>㉜ $58 \div 8 = \dots$</p> <p>㉝ $39 \div 5 = \dots$</p> <p>㉞ $23 \div 3 = \dots$</p> <p>㉟ $27 \div 7 = \dots$</p> <p>㊱ $38 \div 5 = \dots$</p> <p>㊲ $16 \div 7 = \dots$</p> <p>㊳ $33 \div 8 = \dots$</p> <p>㊴ $22 \div 3 = \dots$</p> <p>㊵ $49 \div 6 = \dots$</p> <p>㊶ $29 \div 9 = \dots$</p> <p>㊷ $13 \div 5 = \dots$</p> <p>㊸ $59 \div 7 = \dots$</p> <p>㊹ $27 \div 5 = \dots$</p> <p>㊺ $76 \div 9 = \dots$</p> <p>㊻ $59 \div 8 = \dots$</p> <p>㊼ $23 \div 7 = \dots$</p> <p>㊽ $17 \div 3 = \dots$</p> <p>㊾ $67 \div 8 = \dots$</p> <p>㊿ $47 \div 9 = \dots$</p> |
|---|---|

分 秒 (2.5 分以内)

- | | |
|---|---|
| <p>① $10 \div 7 = \dots$</p> <p>② $53 \div 8 = \dots$</p> <p>③ $50 \div 8 = \dots$</p> <p>④ $32 \div 9 = \dots$</p> <p>⑤ $11 \div 8 = \dots$</p> <p>⑥ $13 \div 7 = \dots$</p> <p>⑦ $20 \div 7 = \dots$</p> <p>⑧ $26 \div 9 = \dots$</p> <p>⑨ $11 \div 3 = \dots$</p> <p>⑩ $10 \div 4 = \dots$</p> <p>⑪ $21 \div 6 = \dots$</p> <p>⑫ $20 \div 3 = \dots$</p> <p>⑬ $51 \div 8 = \dots$</p> <p>⑭ $54 \div 7 = \dots$</p> <p>⑮ $71 \div 9 = \dots$</p> <p>⑯ $11 \div 3 = \dots$</p> <p>⑰ $40 \div 6 = \dots$</p> <p>⑱ $41 \div 7 = \dots$</p> <p>⑲ $21 \div 6 = \dots$</p> <p>⑳ $11 \div 9 = \dots$</p> <p>㉑ $10 \div 8 = \dots$</p> <p>㉒ $60 \div 8 = \dots$</p> <p>㉓ $52 \div 7 = \dots$</p> <p>㉔ $52 \div 9 = \dots$</p> <p>㉕ $31 \div 8 = \dots$</p> | <p>㉖ $51 \div 6 = \dots$</p> <p>㉗ $15 \div 9 = \dots$</p> <p>㉘ $16 \div 9 = \dots$</p> <p>㉙ $50 \div 9 = \dots$</p> <p>㉚ $60 \div 7 = \dots$</p> <p>㉛ $13 \div 8 = \dots$</p> <p>㉜ $29 \div 6 = \dots$</p> <p>㉝ $24 \div 9 = \dots$</p> <p>㉞ $40 \div 7 = \dots$</p> <p>㉟ $34 \div 8 = \dots$</p> <p>㊱ $71 \div 8 = \dots$</p> <p>㊲ $71 \div 9 = \dots$</p> <p>㊳ $22 \div 6 = \dots$</p> <p>㊴ $21 \div 9 = \dots$</p> <p>㊵ $60 \div 7 = \dots$</p> <p>㊶ $61 \div 8 = \dots$</p> <p>㊷ $10 \div 9 = \dots$</p> <p>㊸ $53 \div 7 = \dots$</p> <p>㊹ $31 \div 6 = \dots$</p> <p>㊺ $26 \div 9 = \dots$</p> <p>㊻ $21 \div 8 = \dots$</p> <p>㊼ $12 \div 5 = \dots$</p> <p>㊽ $55 \div 8 = \dots$</p> <p>㊾ $51 \div 9 = \dots$</p> <p>㊿ $53 \div 7 = \dots$</p> |
|---|---|

わり算・かけ算



1

(1) $1372 \div 28 =$

$$\begin{array}{r} 28 \overline{)1372} \\ \hline \end{array}$$

(2) $5382 \div 46 =$

$$\begin{array}{r} 46 \overline{)5382} \\ \hline \end{array}$$

(3) $2377 \div 98 =$

$$\begin{array}{r} 98 \overline{)2377} \\ \hline \end{array}$$

(4) $7448 \div 67 =$

$$\begin{array}{r} 67 \overline{)7448} \\ \hline \end{array}$$

(5) $16.2 + 25.8 =$

$$\begin{array}{r} + \\ \hline \end{array}$$

(6) $135 + 7.5 =$

$$\begin{array}{r} + \\ \hline \end{array}$$

2

(1) $28 \times 1.4 =$

$$\begin{array}{r} \times \\ \hline \end{array}$$

(2) $34.5 \times 0.7 =$

$$\begin{array}{r} \times \\ \hline \end{array}$$

(3) $29.9 \div 2.3 =$

$$\begin{array}{r}) \\ \hline \end{array}$$

(4) $1120.5 \div 2.7 =$

$$\begin{array}{r}) \\ \hline \end{array}$$

分数 (1)



1

(1) $\frac{2}{7} + \frac{5}{21} =$

(2) $\frac{11}{34} + \frac{13}{17} =$

(3) $\frac{27}{21} + \frac{5}{27} =$

(4) $\frac{3}{15} + \frac{7}{12} =$

(5) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{5}{6} =$

2

(1) $\frac{13}{14} - \frac{5}{7} =$

(2) $\frac{2}{3} - \frac{3}{11} =$

(3) $\frac{3}{4} - \frac{19}{28} =$

(4) $\frac{11}{81} - \frac{13}{54} =$

(5) $5 - \frac{6}{7} - \frac{1}{3} =$

3

(1) $\frac{1}{7} \times \frac{7}{3} =$

(2) $\frac{9}{7} \times \frac{5}{9} =$

(3) $\frac{3}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{9}{4} =$

(4) $3 \times \frac{1}{2} \times \frac{7}{18} =$

(5) $\frac{7}{4} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{9} =$

分数 (2)



1

(1) $\frac{1}{3} \div \frac{1}{5} =$

(2) $\frac{3}{7} \div \frac{3}{4} =$

(3) $18 \div \frac{3}{5} =$

(4) $\frac{3}{7} \div \frac{12}{13} =$

(5) $\frac{3}{7} \div 3 \div \frac{1}{7} =$

2

(1) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} =$

(2) $3 - \frac{1}{5} + \frac{5}{6} =$

(3) $\frac{4}{3} \div \frac{7}{6} \times \frac{7}{2} =$

(4) $\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{4}{5} \div \frac{5}{6} =$

(5) $\frac{7}{3} \div 5 - \frac{1}{2} \times \frac{8}{3} =$

3

(1)
 $69 - 56 \div 8 + 13 =$

(2)
 $1.7 - \frac{1}{8} + 0.4 - \frac{3}{5} =$

(3)
 $\frac{3}{8} \times \frac{4}{9} + 18 \div 0.6 =$

(4)
 $0.9 + \left(\frac{3}{4} + 0.05\right) \times \frac{1}{5} =$

(5)
 $1.1 \div \left(\frac{3}{4} - 0.2\right) - \frac{2}{3} =$

正の数・負の数

| | |
|--|--|
| | |
|--|--|

1 (1) $(-7) + (-9) =$

(2) $(+3.9) + (-4.7) =$

(3) $\left(+\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{8}{9}\right) =$

(4) $(+18) + (-113) =$

(5) $0 + \left(-\frac{5}{7}\right) =$

2 (1) $(+5) - (+7) =$

(2) $(+15) - (-9) =$

(3) $(+39) - (-23) =$

(4) $(-7) - (+9) =$

(5) $(-7.3) - (-1.7) =$

3 (1) $3 - 5 - 7 =$

(2) $-7 + 8 - 8 + 7 =$

(3) $-7 - 9 + 3 - 5 =$

(4) $8 - 5 - 7 + 3 =$

(5) $-13 - 19 + 7 - 5 + 6 =$

(6) $-4.7 + (-0.3) + (-0.5) =$

(7) $-3 + \frac{3}{4} + \frac{5}{12} - \left(-\frac{1}{12}\right) =$

混合算

| | |
|--|--|
| | |
|--|--|

1 (1) $(-9) \div (-3) =$

(2) $(-21) \times 4 =$

(3) $(-6.3) \div 0.7 =$

(4) $\frac{6}{7} \div (-18) =$

(5) $(-36) \times 6 \div 2 =$

(6) $0 \div (-1080) =$

2 (1) $-(-7)^2 =$

(2) $-(-9^2) =$

(3) $(-27) \div (-3^2) =$

(4) $5^2 \times \left(-\frac{1}{5}\right)^2 =$

3 次の (1)~(10) の中から -8 と等しいものを全て選びなさい。

(1) 2^3

(2) -2^3

(3) -4^2

(4) -2^4

(5) $-(2)^3$

(6) $(-2)^3$

(7) $-(-2)^3$

(8) $(-4)^2$

(9) -8^1

(10) $(-8)^1$

4

(1) $13 + (-7) \times (-6) =$

(2) $(-18) \div (-5 + 4) =$

(3) $10 - 8 \div (-2) =$

(4) $(-14) \div (8 - 10) =$

(5) $(-3.9) \times 0 + (-8) \div 0.2 + (-2) =$

(6) $\left(-\frac{3}{4}\right)^2 \div \frac{27}{8} - \left(-\frac{1}{2}\right)^3 =$

(7) $\left(-\frac{5}{8}\right) \div \left(-\frac{20}{3}\right) \times \left(-\frac{4}{3}\right) + 10 =$

式の計算



1 (1) $19 + 7 \div \{3 - (-4)\} =$

(2) $13 + 3 \times \{-7 - (-4)\} =$

(3) $\{9 - (-7)\} \div 2 - 3 =$

(4) $54 \div \{(2 - 5)^2 \div 3\} - 6 =$

(5) $3^2 + \{9 - (2 - 7) \div 5\} =$

2 (1) $(-1) \div a =$

(2) $3x \div 4 =$

(3) $7 \div (x + 3) =$

(4) $5x \div (-3) =$

(5) $9a \div 3a =$

3 (1) $5a \times b \times 7 + 3 \times 8b \times 6 =$

(2) $x \times 5 \times 3y - 18 \div 8 \times x =$

(3) $7a - 11a + 7a =$

(4) $-\frac{3}{8}x - \frac{3}{4}x =$

(5) $x - 0.1x + 0.01x =$

(6) $\frac{7}{8}a - \frac{3}{4}a - \frac{1}{2}a =$

(7) $-0.3x + 3 + (-1.5x) - 5 + 0.9x =$

1 次方程式 (1)



1

(1) $a = 7$ 、 $b = -3$ のとき $-4ab$ の値を求めよ。

(2) ① 百の位が x 、十の位が 7、一の位が y である 3 けたの整数を表す式を書け。

② 上の問題①で $x = 3$ 、 $y = 9$ のときの 3 けたの整数を求めよ。

2 次の 1 次方程式をみたす x を求めよ。

(1) ① $5x = -15$

② $7x = -497$

③ $-8x = 38$

④ $7x - 11x = 12$

⑤ $-11x - 3x = -17 - 9$

(2) ① $-13 + 5x = 8$

② $-17x = 3x - 9$

③ $-11x - 7 = 10$

④ $-9x = -16x + 17$

(3) ① $13x + 7 = 5x + 11$

② $-17x - 26 = -13 - 9x$

③ $0.3x + 1 = 0.1x - 2$

④ $-4.3x - 0.22 = -2.28x - 3.6$

1 次方程式 (2)



1 次の 1 次方程式を解け。

(1) ① $3(x - 4) = -7(x - 2)$

② $7x - 2(3x + 5) = 13$

③ $6x - 5(x - 3) = 3x + 4$

(2) ① $-x = 1$

② $5x - 7 = x - 7$

③ $-5x = 7x$

④ $-3x + 4 = 4$

⑤ $9x - 7 = -9x - 7$

⑥ $x = -x - 1$

(3) ① $\frac{1}{7}x = 3$

② $-\frac{4}{5}x = -\frac{10}{8}$

③ $-\frac{3}{8}x = -\frac{5}{6}$

④ $-\frac{5}{9}x = -7$

⑤ $\frac{1}{3}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

⑥ $-\frac{8}{15}x + \frac{4}{5} = \frac{5}{6}$

1 次方程式 (3)



1 次の方程式を解け。

(1) ① $-\frac{4}{7}x + 5 = \frac{2}{3}x + 6$

② $-\frac{4}{5}x + \frac{3}{10} = \frac{9}{10}x - 7$

③ $x - \frac{4}{9} = \frac{1}{9}x + \frac{3}{4}$

(2) ① $0.3x + 6 = \frac{3}{5}$

② $\frac{5}{7} - 1.4x = 2$

③ $0.9x - \frac{5}{6} = 4 - \frac{2}{3}x$

(3) ① $\frac{x-1}{2} = \frac{x+2}{3}$

② $-\frac{3x+1}{4} = \frac{x-2}{3}$

③ $1 - \frac{x-2}{3} = -\frac{x+1}{2}$

④ $\frac{5x-4}{7} = \frac{x+3}{4} - \frac{13}{28}$

⑤ $-\frac{x+3}{7} - 1 = \frac{3(x-1)}{5}$

練習問題 (1)

1 次の計算をなさい。

(1) $986.3 \div 78$

(2) 37×6.9

(3) $5 - \frac{2}{7} + \frac{5}{21} =$

(4) $\frac{7}{4} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{9} =$

(5) $\frac{7}{8} \div 7 \div \frac{1}{8} - 1 \times \frac{1}{2}$

(6) $1.6 \div \left(\frac{6}{7} - \frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{3} - \frac{3}{5}$

(7) $-0.73 - (-73.37)$

(8) $-7 + \frac{5}{7} + \frac{4}{21} - \left(-\frac{19}{21}\right) - 3$

(9) $-7^2 - (-4)^2 - 1^4$

(10) $\left(-\frac{5}{8}\right) \div \frac{125}{32} - \left(-\frac{1}{2}\right)^3$

(11) $49 \div \{(11 - 4)^2 \div 7\} - \frac{1}{3}$

(12) $a + 0.1a - 0.11a + \frac{1}{2}a$

2

(1) 百の位が a 、十の位が 7、一の位が b である 3 けたの整数を表す式を書け。

(2) 上の問題で、 $a = 7$ 、 $b = 3$ のときの 3 けたの整数を求めよ。

3 次の 1 次方程式をみたす x を求めよ。

(1) $3x - 7(x - 2) = 5x + 9$

(3) $\frac{2}{3} - 1.7x = 8$

練習問題 (2)

1 次の計算をなさい。

(1) $(-12) - (-5)$

(2) $7 - (-5) \times 6$

(3) $(-2)^2 - (-3^2) \times \frac{1}{2}$

(4) $8\sqrt{2} - \sqrt{50}$

(5) $(\sqrt{5} + 2)^2 - 2\sqrt{20}$

(6) $(3x + 8) - (5x + 2)$

(7) $\frac{5x + 2}{3} - \frac{x - 1}{4}$

(8) $2x^2 + 4x - 3x^2 - x + 2$

(9) $\frac{2x + y}{3} + x - 3y$

(10) $12xy^3 \div (-3x^2y) \times x^2y$

(11) $(3x - 1)(2x - 3)$

(12) $(2x - 1)^2 - (3x - 1)(x + 2)$

2 次の方程式を解きなさい。

(13) $3x - 7 = 6x + 8$

(14) $\frac{3x}{4} - 2 = \frac{x}{3} + \frac{1}{2}$

(15) $x^2 - 6 = 0$

(16) $x(x + 3) = 12 - x$

3 次の連立方程式を解きなさい。

(17)
$$\begin{cases} 4x + 3y = 5 \\ 3x - 5y = 11 \end{cases}$$

(18)
$$\begin{cases} 1.2x - 0.7y = 1 \\ \frac{x}{2} + y = 3 \end{cases}$$

4 次の不等式を解きなさい。

(19) $3x + 10 > 5x - 6$

(20) $\frac{x - 1}{3} - \frac{x}{2} < 1 - \frac{x}{4}$

5 次の問いに答えなさい。

(21) $x = -4$ 、 $y = 3$ のとき、 $x^2 - 3xy + y^2$ の値を求めなさい。

(22) 等式 $S = ab + bc$ を c について解きなさい。

(23) $\sqrt{15} < x < \sqrt{48}$ にあてはまる整数 x をすべて求めなさい。

(24) y は x に反比例し、 $x = 4$ のとき $y = -3$ である。 $x = -6$ のときの y の値を求めなさい。

(25) $\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1}$ のとき、 A 、 B を求めよ。

数と多項式の計算

① 数の表し方

わたしたちは、

一を10個集めたものを 十

十を10個集めたものを 百

といている。このように

10個集まるごとに位が一つ上がる数の表しかた

のことを十進法という。

例えば、

百が2個、十が4個、一が3個

あるとき、これを243と表す。式で書くと、

$$243 = 2 \times 10^2 + 4 \times 10 + 3 \times 1$$

となる。

また、百、十、一をそれぞれ図-1のような四角形で表すと、243は図-2のよ
うに表せる。

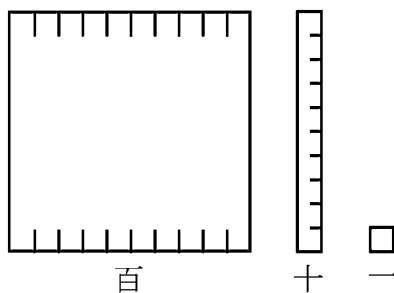


図1

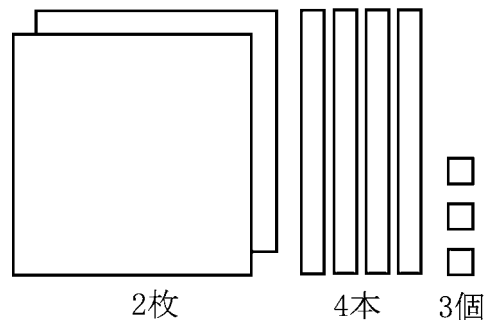


図2

問 次の数を上のような図で表せ。

- (1) 325 (2) 547 (3) 302

また

5個集まるごとに位が一つ上がる

という数えかたもあり、このような数えかたを五進法という。五進法で243

というのは

$$243 = 2 \times 5^2 + 4 \times 5 + 3 \times 1$$

のことである。これを計算すると十進法の73に等しいことがわかる。

数と多項式の計算

② 多項式

十進法で 243 は

$$2 \times 10^2 + 4 \times 10 + 3 \times 1$$

五進法で 243 は

$$2 \times 5^2 + 4 \times 5 + 3 \times 1$$

であった。

このとき、10 や 5 のかわりに文字 x を用いて、

$$2 \times x^2 + 4 \times x + 3$$

すなわち

$$2x^2 + 4x + 3$$

のような式について考えてみる。 $2x^2$ や $4x$ や 3 のことを **項** という。

また、上の式のように、数と文字の積をいくつか加えてできる式を**多項式**という。

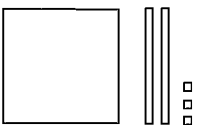
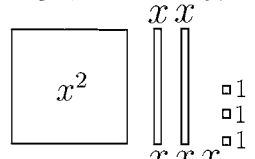
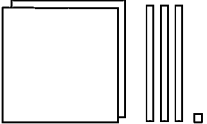
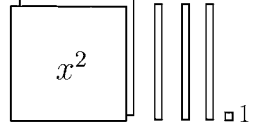
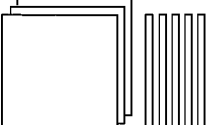
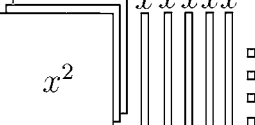
多項式の一つの項の中で、掛け合あわせた文字の個数をその項の**次数**という。

$2x^2$ の次数は 2, $4x$ の次数は 1 である。文字を含まない項を**定数項**という。

定数項の次数は 0 である。各項の次数の中で最大のものを、その多項式の**次数**という。 $2x^2 + 4x + 3$ の次数は 2 である。

問 1 $7x^3, -5x^2, 3x, 1$ の次数はいくらか。また、多項式 $-5x^2 + 1 + 7x^3 + 3x$ の次数はいくらか。

また、多項式の計算の仕方は下の図のように考えるとわかりやすい。

| | 数のたし算 | 多項式のたし算 | |
|-------|---|--|-------------------|
| 123 |  |  | $x^2 + 2x + 3$ |
| + 231 |  |  | + $2x^2 + 3x + 1$ |
| 345 |  |  | + $3x^2 + 5x + 4$ |

多項式のひき算についても、同様に考えて計算ができる。

問 2 次の多項式の和 $A + B$ 、差 $A - B$ を計算せよ。

(1) $A = 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 4x + 7, B = 3x^3 - 7x^2 + 5x - 4$

(2) $A = 7 + y^2 - 5y^6 + 3y, B = y^2 + 3y^3 - 7y^4 + 5y - 9$

数と多項式の計算

③ 多項式の積

多項式、

$$3x + 5 \text{ と } 4x + 2$$

の積を計算してみる。

図-1 のように考えると、この積は、

$$3x \times 4x, 3x \times 2$$

$$5 \times 4x, 5 \times 2$$

を加えたものになるから、

$$\begin{aligned} (3x + 5)(4x + 2) &= 12x^2 + 6x + 20x + 10 \\ &= 12x^2 + 26x + 10 \end{aligned}$$

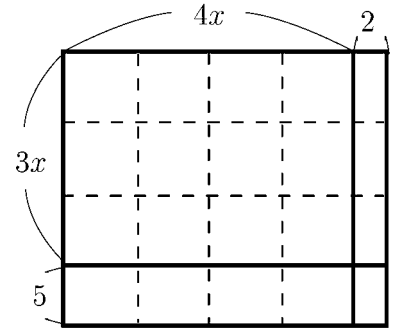


図-1 $(3x + 5)(4x + 2)$

となる。

このように多項式の積を計算して、単項式の和に表す（和の式に表す）ことを展開するという。

例 1 $(a + b)^2$ を展開せよ。

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= (a + b)(a + b) \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

問 1 $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ となることを計算と図を使って示せ。

問 2 $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ となることを計算と図を使って示せ。

例 2 $(a + b)^3$ を展開せよ。

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

であるから、次のように計算できる。

$$\begin{aligned} (a + b)^3 &= (a + b)(a + b)^2 \\ &= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

| | | | |
|-----|--------|---------|--------|
| | a^2 | $2ab$ | b^2 |
| a | a^3 | $2a^2b$ | ab^2 |
| b | a^2b | $2ab^2$ | b^3 |

$(a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$

問 3 次の式を展開せよ。

(1) $(2x + 1)(5x - 3)$

(2) $(3x - 1)(5y + 2)$

(3) $(x - 1)(x^2 + x + 1)$

(4) $(3x + 2y)(x^2 + 2xy + 3y^2)$

(5) $(a - b)^3$

(6) $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

(7) $(a + b + c)^2$

(8) $(x + y + z)(x - y + z)$

数と多項式の計算

④ 因数分解 (1)

多項式の積 $(x + 3)(x + 4)$ を展開すると、

$$x^2 + 7x + 12$$

となる。逆に $x^2 + 7x + 12$ は

$$(x + 3)(x + 4)$$

と表されることがわかる。このように、1つの多項式をいくつかの多項式の積で表すことを**因数分解**するという。ここで、 $x + 3$ と $x + 4$ を $x^2 + 7x + 12$ の**因数**という。

例 1 $x^2 + 14x + 45$ を因数分解せよ。

$$x^2 + 14x + 45 = (x + \bigcirc)(x + \triangle)$$

としたい。

右辺を展開すると $x^2 + (\bigcirc + \triangle)x + \bigcirc \times \triangle$

となる。両辺を比較して、

$$\bigcirc + \triangle = 14$$

$$\bigcirc \times \triangle = 45$$

となる \bigcirc と \triangle を見つければよいことがわかる。

\bigcirc を5、 \triangle を9にすれば、和が14、積が45となるから、

$$x^2 + 14x + 45 = (x + 5)(x + 9).$$

問 1 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2 + 8x + 15$

(2) $x^2 + 6x + 5$

(3) $x^2 + 10x + 21$

(4) $x^2 - 11x + 24$

(5) $x^2 + 2x - 15$

(6) $x^2 - 6x - 7$

次に、 $2x^2 + 11x + 15$ のように、 x^2 の係数が1以外の2次式の因数分解を考えてみる。

$$2x^2 + 11x + 15 = (x + \bigcirc)(2x + \triangle)$$

とおくと

$$2 \times \bigcirc + \triangle = 11$$

$$\bigcirc + \triangle = 15$$

となる。

\bigcirc と \triangle は図-1のような図式で見つけることができる。

$$\begin{array}{r}
 2 \quad 15 \\
 \hline
 1 \quad \textcircled{3} \rightarrow 6 \\
 2 \quad \boxed{5} \rightarrow 5 \quad (+ \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad 11
 \end{array}$$

図-1 \bigcirc と \square を見つける

問 2 次の式を因数分解せよ。

(1) $2x^2 + 5x + 2$

(2) $4x^2 + 16x + 15$

(3) $2x^2 - 5x - 3$

(4) $3x^2 - 4x - 4$

(5) $3x^2 - 10x + 3$

(6) $6x^2 - x - 2$

数と多項式の計算

⑤ 因数分解 (2)

$m(a+b)$ を展開すると、 $ma+mb$ になる。したがって、

$ma+mb$ は $m(a+b)$ と因数分解される。

すなわち、多項式の中に共通の因数があれば、それを括弧 (カッコ) の外にくくり出すことによって因数分解ができる。

例 1 $3xy^2 + 6x^2y$ を因数分解せよ。

$3xy$ が共通の因数であるので、これをくくり出して

$$3xy^2 + 6x^2y = 3xy(y + 2x)$$

と因数分解できる。

例 2 $x(3a+5) - y(3a+5)$ を因数分解せよ。

$(3a+5)$ が共通の因数であるので、これをくくり出して

$$x(3a+5) - y(3a+5) = (3a+5)(x-y)$$

と因数分解できる。

問 1 次の式を因数分解せよ。

(1) $3ax^2 - 27a$

(2) $2a^3 - 18ab^2$

(3) $(x-y)a + (y-x)b$

(4) $ax^2 - 5ax + 6a$

(5) $(a-b)x^2 - (a-b)y^2$

(6) $11x^2 - 99$

次に、 $a^2 - b^2$ は $(a+b)(a-b)$ と因数分解される。

すなわち、多項式が 2 乗の差の形をしている場合は、和と差の積として因数分解できる。

問 2 次の式を因数分解せよ。

(1) $2x^2y + 6xy^2$

(2) $(a+2b)^2 - 3(a+2b)$

(3) $9x^2 - 49$

(4) $(x+y)a - (x+y)b$

(5) $3a^2 - 75b^2$

(6) $1 - 9x^2$

数と多項式の計算

⑥ 多項式の割り算

数の割り算 $679 \div 32$ について考えてみよう。

式の割り算 $(6x^2 + 7x + 9) \div (3x + 2)$ について考えてみよう。

$$\begin{array}{r} 2 \\ 32 \overline{) 679} \end{array}$$

立てる

$$\begin{array}{r} 2x \\ 3x + 2 \overline{) 6x^2 + 7x + 9} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 32 \overline{) 679} \\ 64 \end{array}$$

掛ける

$$\begin{array}{r} 2x \\ 3x + 2 \overline{) 6x^2 + 7x + 9} \\ 6x^2 + 4x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 32 \overline{) 679} \\ 64 \\ \hline 3 \end{array}$$

引く

$$\begin{array}{r} 2x \\ 3x + 2 \overline{) 6x^2 + 7x + 9} \\ 6x^2 + 4x \\ \hline 3x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 32 \overline{) 679} \\ 64 \\ \hline 39 \end{array}$$

下ろす

$$\begin{array}{r} 2x \\ 3x + 2 \overline{) 6x^2 + 7x + 9} \\ 6x^2 + 4x \\ \hline 3x + 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ 32 \overline{) 679} \\ 64 \\ \hline 39 \end{array}$$

立てる

$$\begin{array}{r} 2x + 1 \\ 3x + 2 \overline{) 6x^2 + 7x + 9} \\ 6x^2 + 4x \\ \hline 3x + 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ 32 \overline{) 679} \\ 64 \\ \hline 39 \\ 32 \end{array}$$

掛ける

$$\begin{array}{r} 2x + 1 \\ 3x + 2 \overline{) 6x^2 + 7x + 9} \\ 6x^2 + 4x \\ \hline 3x + 9 \\ 3x + 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ 32 \overline{) 679} \\ 64 \\ \hline 39 \\ 32 \\ \hline 7 \end{array}$$

引く

$$\begin{array}{r} 2x + 1 \\ 3x + 2 \overline{) 6x^2 + 7x + 9} \\ 6x^2 + 4x \\ \hline 3x + 9 \\ 3x + 2 \\ \hline 7 \end{array}$$

数と多項式の計算

⑦ 多項式の割り算

$$\begin{array}{r} 21 \text{ ----- 商} \\ 32 \overline{) 679} \\ \underline{64} \\ 39 \\ \underline{32} \\ 7 \text{ --- 余り} \end{array}$$

図-1 $679 \div 32$



$$\begin{array}{r} 2 \times 10 + 1 \text{ ----- 商} \\ 3 \times 10 + 2 \overline{) 6 \times 10^2 + 7 \times 10 + 9} \\ \underline{6 \times 10^2 + 4 \times 10} \\ 3 \times 10 + 9 \\ \underline{3 \times 10 + 2} \\ 7 \text{ --- 余り} \end{array}$$

図-2



$$\begin{array}{r} 2x + 1 \text{ ----- 商} \\ 3x + 2 \overline{) 6x^2 + 7x + 9} \\ \underline{6x^2 + 4x} \\ 3x + 9 \\ \underline{3x + 2} \\ 7 \text{ ----- 余り} \end{array}$$

図-3 $(6x^2 + 7x + 9) \div (3x + 2)$

多項式 A を多項式 B で割ったとき、商が Q で余りが R となったとすると、 $A = BQ + R$ がなりたつ。このとき、 R の次数は必ず B の次数より低くなることに注意する。

また、多項式の割り算は整数のときと同じように、「商を立てる」、「掛ける」、「引く」、「下ろす」の4種類の計算を繰り返して求めることができる。ただ、整数の計算と違って、係数が分数であってもよい。

問1 下の□のなかに適当な数を入れて、 $(6x^2 + 7x + 3) \div (2x + 1)$ を計算せよ。

$$\begin{array}{r} \square x + \square \text{ ----- 商} \\ 2x + 1 \overline{) 6x^2 + 7x + 3} \\ \underline{\square x^2 + \square x} \\ \square x + 3 \\ \underline{\square x + \square} \\ \square \text{ ----- 余り} \end{array}$$

問2 次の割り算を行い、商と余りを求めよ。

(1) $(x^2 + 5x + 9) \div (x + 2)$

(2) $(3x^2 + 5x + 7) \div (x + 2)$

(3) $(2x^3 + 3x^2 + 5x + 7) \div (2x + 1)$

(4) $(2x^3 + 5x^2 - 2x + 1) \div (x^2 - x + 2)$

(5) $(2x^3 - 7x^2 + 1) \div (x^2 - 4x + 3)$

(6) $(x^3 - 8) \div (x - 2)$

数と多項式の計算

分数式のたし算・ひき算

$$\text{例 1} \quad \frac{5x}{x^3 - 4x} - \frac{10}{x^3 - 4x} = \frac{5x - 10}{x^3 - 4x} = \frac{5(x - 2)}{x(x + 2)(x - 2)} = \frac{5}{x(x + 2)}$$

$$\begin{aligned} \text{例 2} \quad \frac{x - 2}{x + 3} - \frac{x + 1}{x - 1} &= \frac{(x - 2)(x - 1) - (x + 1)(x + 3)}{(x + 3)(x - 1)} \\ &= \frac{x^2 - 3x + 2 - (x^2 + 4x + 3)}{(x + 3)(x - 1)} \\ &= \frac{-7x - 1}{(x + 3)(x - 1)} \end{aligned}$$

問 次の計算をせよ。

$$(1) \quad \frac{1}{xy} + \frac{2}{yz}$$

$$(2) \quad \frac{2}{x + 1} + \frac{3}{x - 2}$$

$$(3) \quad \frac{x - 2}{x^2 - 4x + 3} - \frac{x + 2}{x^2 + 2x - 3}$$

$$(4) \quad \frac{a + b}{a - b} - \frac{a - b}{a + b}$$

$$(5) \quad \frac{x - 1}{x(x + 1)} + \frac{x + 1}{x(x - 1)}$$

$$(6) \quad \frac{1}{x^2 + 5x + 6} + \frac{3}{x^2 - x - 6}$$

$$(7) \quad \frac{x + 5}{x^2 + 8x + 7} - \frac{2x}{2x^2 + x - 1}$$

$$(8) \quad \frac{1}{a(a - b)(a - c)} + \frac{1}{b(b - c)(b - a)} + \frac{1}{c(c - a)(c - b)}$$

数と多項式の計算

分数式の掛け算・割り算

分母に文字を含んだ式、例えば

$$\frac{1}{x^2}, \quad \frac{5}{x-3}, \quad \frac{2y+3}{y^2+1}$$

などの式を、分数式という。

$$\text{例 1} \quad \frac{6xy^3}{15x^3y} = \frac{2 \times 3 \times x \times y^3 \times y}{5 \times 3 \times x^2 \times x \times y} = \frac{2y^2}{5x^2}$$

$$\text{例 2} \quad \frac{x^2+x}{x^2-x-2} = \frac{x(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{x}{x-2}$$

問 1 次の分数式を約分せよ。

$$(1) \quad \frac{21x^3y^2}{3xy}$$

$$(2) \quad \frac{x^2+4x-21}{x^2-9}$$

$$(3) \quad \frac{x^5}{x^3-3x^2}$$

$$(4) \quad \frac{6x^2+7x-3}{2x^2+x-3}$$

問 2 次の計算をせよ。

$$(1) \quad \frac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6} \times \frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$$

$$(2) \quad \frac{x^2+xy}{x-y} \times \frac{(x-y)^2}{x^2-y^2}$$

$$(3) \quad \frac{a^2-a-2}{a^2-2a+4} \div \frac{(a+1)^2}{a^3+8}$$

$$(4) \quad \frac{4x^2-y^2}{x^3+8y^3} \div \frac{6x^2-xy-y^2}{x^2-2xy+4y^2}$$

式の問題

1 次の割り算を行い、商と余りを求めよ。

$$(1) (2x^2 + 13x + 20) \div (x + 5)$$

$$(2) (2x^3 + 3x^2 + 5x + 8) \div (2x + 1)$$

$$(3) (3x^4 - 2x^3 + 7x^2 + 5x + 6) \div (x^2 - x + 2)$$

2 次の計算をせよ。

$$(1) \frac{4x - 2}{x^2 - x - 2} \times \frac{x + 1}{2x - 1}$$

$$(2) \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2} \times \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 7x + 12}$$

$$(3) \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + x} \times \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - x - 6}$$

$$(4) \frac{x - y}{x^2 + xy} \times \frac{x^2 - y^2}{(x - y)^2}$$

$$(5) \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 9} \div \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 5x + 6}$$

$$(6) \frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + 6x + 8} \div \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 2}$$

$$(7) \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 2x} \div \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - x - 2}$$

$$(8) \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \div \frac{a + b}{a - b}$$

3 次の計算をせよ。

$$(1) \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz}$$

$$(2) \frac{3}{x - 1} + \frac{2}{x + 2}$$

$$(3) \frac{x + 2}{x^2 + 4x + 3} - \frac{x - 2}{x^2 - 2x - 3}$$

$$(4) \frac{x + 2}{x - 1} + \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x}$$

$$(5) \frac{x + 2}{x - 3} - \frac{x - 1}{x + 1}$$

平方根

ある数を 2 乗すると a になるとき、その数を a の平方根という。
したがって、例えば $3^2 = 9, (-3)^2 = 9$ であるから、3 と -3 は、9 の平方根である。

a の平方根は、2 つあり正のほうを \sqrt{a} 、負のほうを $-\sqrt{a}$ と表す。

平方根の積と商について、次のことが成り立つ。

a と b が正の数のとき

$$(1) \sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab} \qquad (2) \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

(1) の証明

$\sqrt{a}\sqrt{b} > 0, (\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = ab$ となる。2 乗して ab になる正の数が \sqrt{ab} であるから、 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

問 1 上の証明と同じ方法で、(2) を証明せよ。

問 2 次の式を簡単にせよ。

- | | |
|--|---|
| (1) $(\sqrt{12})^2$ | (2) $\sqrt{\frac{9}{25}}$ |
| (3) $\sqrt{2}\sqrt{3}$ | (4) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$ |
| (5) $\sqrt{12}$ | (6) $\sqrt{32}$ |
| (7) $\sqrt{3} + \sqrt{12}$ | (8) $5\sqrt{3} - 2\sqrt{12} + \sqrt{27}$ |
| (9) $\sqrt{27} \times \sqrt{12}$ | (10) $(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})^2$ |
| (11) $\sqrt{2} - \sqrt{8} + \sqrt{18}$ | (12) $2\sqrt{3} - \frac{3}{\sqrt{3}} + \sqrt{27}$ |

例 1 $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

例 2 $\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{1 \times (\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{5 - 3} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}$

問 3 次の式の分母を有理化せよ。

- | | |
|---|---------------------------------------|
| (1) $\frac{12}{\sqrt{12}}$ | (2) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10} - 3}$ |
| (3) $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}$ | |

* a の平方根は、

$x^2 = a$ にあてはまる
 x の値のことである

* $a \geq 0$ のとき、

- $a\sqrt{a} = \sqrt{a^3}$
- $\sqrt{a^3} = a\sqrt{a}$
- $m\sqrt{a} + n\sqrt{a} = (m+n)\sqrt{a}$
- $m\sqrt{a} - n\sqrt{a} = (m-n)\sqrt{a}$

* $x^2 = a$ の式から

$a \geq 0$ であることが
わかる

展開・因数分解の練習問題

次の式を展開せよ。

1.

(1) $3x(x - 4)$

(2) $\frac{2}{3}(9x^2 - 6x + 12)$

(3) $-3(x - 7)$

(4) $-3x(x^2 - 8x + 5)$

(5) $(2x^2 - 3x + 4) \times 3x$

2.

(1) $(2x - 3y)(2x + 3y)$

(2) $(9x + 7y)(9x - 7y)$

(3) $(-a^2 + 2b)(-a - 2b)$

(4) $(x^2 - x - 5)(x^2 - x + 5)$

(5) $(x - 3y + 1)(x + 1 + 3y)$

3.

(1) $(a + 2b)^2$

(2) $(3x - 2y)^2$

(3) $(-2x - y)^2$

(4) $(p + q - 1)^2$

(5) $(xy - yz)^2$

4.

(1) $(x + 3)(x + 4)$

(2) $(x - 3)(x + 5)$

(3) $(2x - 3)(4x + 5)$

(4) $(5x - 3)(3x - 4)$

(5) $(-2x + y)(3x - 2y)$

5.

(1) $(2a - 3b + c)^2$

(2) $(x + 1)(x + 2)(x - 3)(x - 4)$

(3) $(x + 3)^3$

(4) $x^4 - y^4$

(5) $x^6 - y^6$

次の式を因数分解せよ。

(1) $ab - bc$

(2) $3ab^2 + 9a^2b$

(3) $2x^2 - 6x$

(4) $x(x - 1) - 2(x - 1)$

(5) $ab(x - y) + a(y - x)$

(1) $x^2 - 16$

(2) $25x^2 - 4$

(3) $9x^2 - 4y^2$

(4) $3x^2 - 27y^2$

(5) $(x - y)^2 - (a - b)^2$

(1) $x^2 + 10x + 25$

(2) $4x^2 - 4x + 1$

(3) $9x^2 - 6x + 1$

(4) $9x^2 + 12x + 4$

(5) $a^2b^2 + 2abcd + c^2d^2$

(1) $x^2 + 11x + 24$

(2) $x^2 - x - 12$

(3) $x^2 + x - 12$

(4) $(a - b)^2 - 2(a - b) - 15$

(5) $3x^2 + 5x - 2$

(1) $(a^2 - b^2)x^2 - a^2 + b^2$

(2) $1 - \frac{x^2}{4}$

(3) $x - x^5$

(4) $x - 27x^3$

(5) $ax^2 - (a + 1)x + 1$

2 次方程式の解の公式

$ax^2 + bx + c = 0$ の解を求める

x^2 の係数を 1 にするために、両辺を a で割ると

定数項を移項すると

両辺に、 x の係数の半分の 2 乗を加えると

左辺を平方の形 $(\bigcirc + \Delta)^2$ にすると

両辺の平方根をとると

解は

問題 解の公式を使って次の方程式を解け。 $(a = 1, b = -\frac{3}{2}, c = -\frac{1}{6})$ を代入する)

$$x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{6} = 0$$

2 次方程式

② 2 次方程式

$$x^2 = 1, \quad x^2 + 2x + 1 = 0, \quad 3x^2 - 5x = 1$$

のように x^2 を含む方程式を 2 次方程式といい、 x のように未知の値を表す文字を**未知数**という。

次に、未知数 x の値を**解**といい、**解を求めることを方程式を解く**という。

(1) 因数分解による方法

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

左辺を因数分解すると

$$(x + 3)(2x - 1) = 0$$

となるから

$$x + 3 = 0 \text{ または } 2x - 1 = 0$$

したがって

$$x = -3 \text{ または } x = \frac{1}{2}$$

(2) 解の公式による方法

$ax^2 + bx + c = 0$ の解は、

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ と } x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

の 2 つである。これを解の公式という。

問 1 次の方程式を解け。

(1) $(x + 2)(3x - 4) = 0$

(2) $x(x + 7) = 0$

(3) $x^2 + 2x - 15 = 0$

(4) $x^2 - 6x + 8 = 0$

(5) $x^2 = 12$

(6) $(x + 3)^2 = 2$

(7) $x^2 + 5x + 1 = 0$

(8) $3x^2 - 7x + 3 = 0$

(9) $12x - 4 = x^2$

(10) $x^2 - 9 = 8x$

連立 1 次方程式

② 連立 3 元 1 次方程式

ある店で、ケーキとプリンとドーナツを販売している。

ケーキ 1 個、プリン 2 個、ドーナツ 3 個では 390 円

ケーキ 2 個、プリン 3 個、ドーナツ 1 個では 460 円

ケーキ 3 個、プリン 4 個、ドーナツ 2 個では 680 円

であった。ケーキ、プリン、ドーナツはそれぞれ 1 個いくらになるか。

この問題を式で表すと、1 組の方程式ができる。このような方程式の組を連立 3 元 1 次方程式という。この方程式を解くには、順に一文字ずつ消去するとよい。上の問題を解きなさい。

問 100 円硬貨 1 枚、50 円硬貨 1 枚、1 円硬貨 1 枚、の重さは $10g$ 、
100 円硬貨 2 枚、50 円硬貨 3 枚、1 円硬貨 4 枚、の重さは $26g$ 、
100 円硬貨 3 枚、50 円硬貨 1 枚、1 円硬貨 2 枚、の重さは $21g$ 、
である。100 円硬貨、50 円硬貨、1 円硬貨の重さは、それぞれいくらか。

連立 1 次方程式の問題

- 1 A さんは、家から 7km 離れた駅まで行くのに、家から途中の友達の家までは自転車でいき、そこから駅まで歩いたら、全体で 45 分かかった。自転車の速さは毎時 12km 、歩く速さは毎時 4km のとき、家から友達の家までの道のりを求めよ。
- 2 K さんは、家から 1500m 離れた学校へ向かった。最初は毎分 60m の速さで歩き、途中から毎分 180m の速さで走り、家を出てから 21 分後に学校に着いた。走った道のりは何 m か。
- 3 ある大学の今年度の学生数は、昨年度にくらべて、男子の学生数が 4% 増加し、女子の学生数は 1% 減少した。全体としては 8 人増加して、 583 人になった。この大学の今年度の男子、女子の学生数をそれぞれ求めよ。
- 4 A 、 B 2 種類の食塩水が 400g ずつある。食塩水 A から 200g 、食塩水 B から 100g とって混ぜたら、 8% の食塩水ができた。また、食塩水 B の残りの 300g に 20g の食塩を混ぜたら、食塩水 A と同じ濃度になった。食塩水 A 、 B のはじめの濃度はそれぞれ何%か。
- 5 花屋で、バラを 4 本とカーネーションを 6 本買い、代金として 1800 円払った。ところが、店の人が、バラとカーネーションの値段を取り違えて計算していたことに気づき、 100 円返してくれた。バラ 1 本、カーネーション 1 本の値段を求めなさい。

関数の意味

関数

ある量とそれにもなって変わる他の量があり、それぞれを変数（いろいろな値をとる文字のこと） x 、 y で表す。 x の値をきめるとそれに応じて y の値もきまるとき、 y は x の関数であるという。

例 1 ある車は、ガソリン1リットルで15km 走行できる。このとき、この車はガソリン x リットルで走行できる距離を y km とすると、 $y = 15x$ と表すことができる。

例 2 風呂に水を入れるとき、水の深さとその時間がわかれば水を入れ始めてから何分後に水を止めればよいか推測できる。

例 3 気温は、上空へ行けば行くほど低くなる。調査の結果

1km 高くなると 6°C だけ気温が下がる

ということがわかった。地上の気温が 15°C のとき、高さ x km の場所の気温を $y^{\circ}\text{C}$ とする。高さを決めると、そのときの気温がきまるから、この働きは関数になっている。この関係を式で表すと

$$y = 15 - 6x$$

となる。

問 1 50 リットルのお湯がたまっているバスタブに、1 分間に10 リットルの割合でお湯を入れる。 x 分後にたまったお湯の量を y リットルとする。 y を x の式で表せ。

問 2 長さ30cm のろうそくに火をつけたら、毎分 $\frac{1}{3}$ cm の速さで短くなっていった。火をつけてから x 分後の長さを y cm とするとき、 y を x の式で表せ。

傾きの意味 (直線の傾き)

皆さんは、直線というのを何を思い浮かべますか。ピンと張った糸、まっすぐな棒などでしょうか。

数学では、直線は平面上の異なる 2 点を結ぶ最短の図形、または平面と平面が交わってできる図形であると考えています。

平面に描かれたいろいろな直線にある共通な性質として、傾きということを考えてみます。

いま、平面上に x 軸、 y 軸をとる。そのとき、平面上の異なる 2 点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ を通る直線の傾き m を

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

と決めます。これは坂道の勾配の程度を表していると考えてよい。

また、定点 $A(a, b)$ を通る直線上の任意の点を $P(x, y)$ とすると、その直線の傾き m は

$$\frac{y - b}{x - a} = m$$

である。この両辺に $x - a$ をかけると次式が得られる。

$$y - b = m(x - a) \quad (1)$$

この (1) の式は点 (a, b) を通り傾きが m である直線の式を表すことになる。

傾きが同じ直線は同じ仲間の直線 (同じ性質を持つという意味) と考えてよい。なぜならば、平行移動すれば重なるからである。

また、

$$m = \frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}}, \quad m = \frac{y \text{ の変化量}}{x \text{ の変化量}}$$

はいつも一定であることに注目しよう。

問 以上のことを、わかりやすい図で表せ。

1 次関数のグラフ

座標軸を書きこんだ平面上に直線があり、
 この直線は、 x 軸の正の方向に 1 増加すると、
 y 軸の正の方向には m 増加したとする。
 このようなとき、 m を直線の傾きという。
 また、

$$\frac{(y \text{ の増加量})}{(x \text{ の増加量})} = m \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

と考えてもよい。
 したがって、右の図-1 と図-2 を見比べてみると、
 点 (a, b) を通り傾き m の直線の式は

①の式を利用して、

$$\frac{y - b}{x - a} = m$$

である。この両辺に $x - a$ をかけると、

$$y - b = m(x - a)$$

で与えられる。

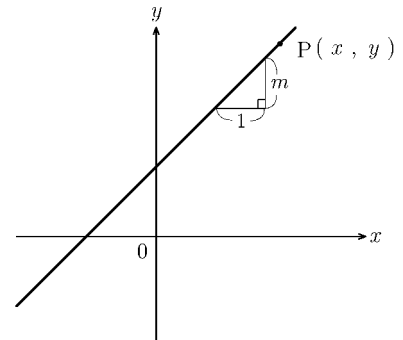


図-1

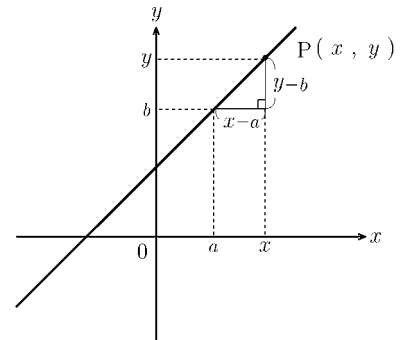


図-2

問 次の直線を表す 1 次関数の方程式を求めよ。

- (1) 点 $(0, 3)$ を通り、傾き 4 の直線
- (2) 点 $(3, 0)$ を通り、傾き 5 の直線
- (3) 点 $(2, 3)$ を通り、傾き 4 の直線
- (4) 点 $(-1, 2)$ を通り、傾き -1 の直線
- (5) 点 $(-2, 3)$ を通り、傾き 0 の直線
- (6) 2 点 $(0, 1), (3, 2)$ を通る直線
- (7) 2 点 $(1, 0), (2, 2)$ を通る直線
- (8) 2 点 $(0, 4), (3, 0)$ を通る直線

1 次関数のグラフの問題 (1)

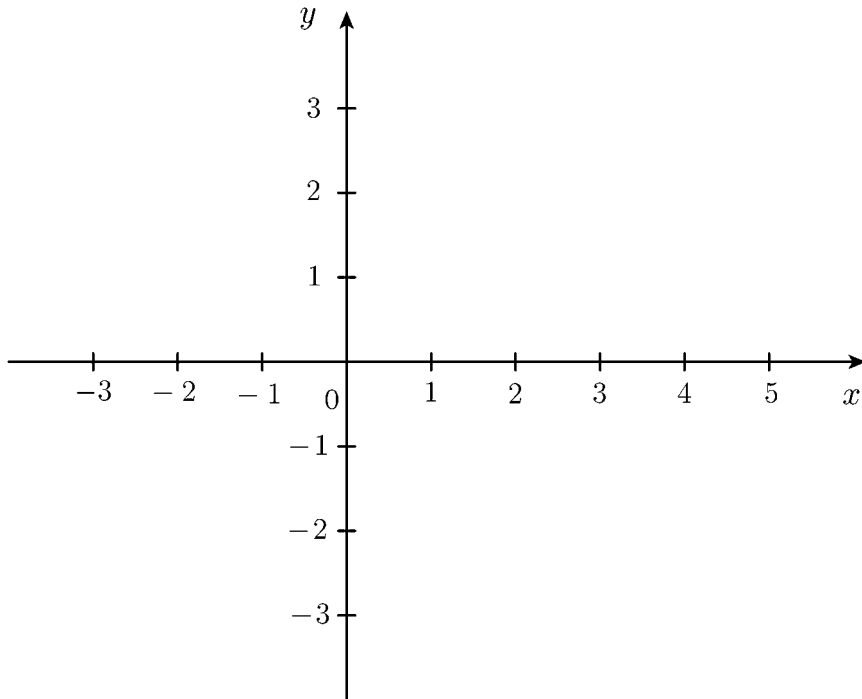
1 次の方程式のグラフをかけ。

(1) $2x - 3y = 9$

(2) $x + 2y = 3$

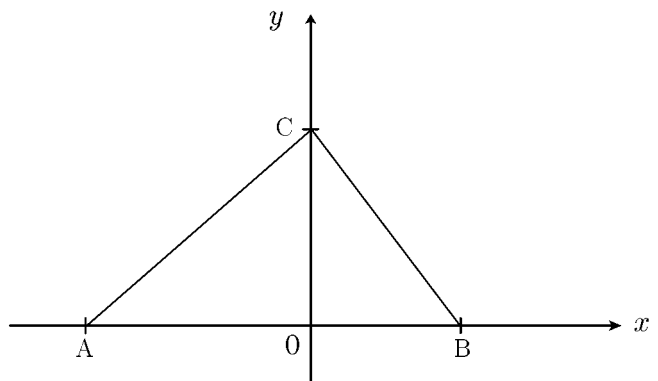
(3) $y - 2 = 0$

(4) $4x - 12 = 0$



問 2 下の図のように、3点 $A(-6,0)$, $B(4,0)$, $C(0,5)$ がある。

点 C を通り、 $\triangle ABC$ の面積を 2 等分する直線の式を求めよ。

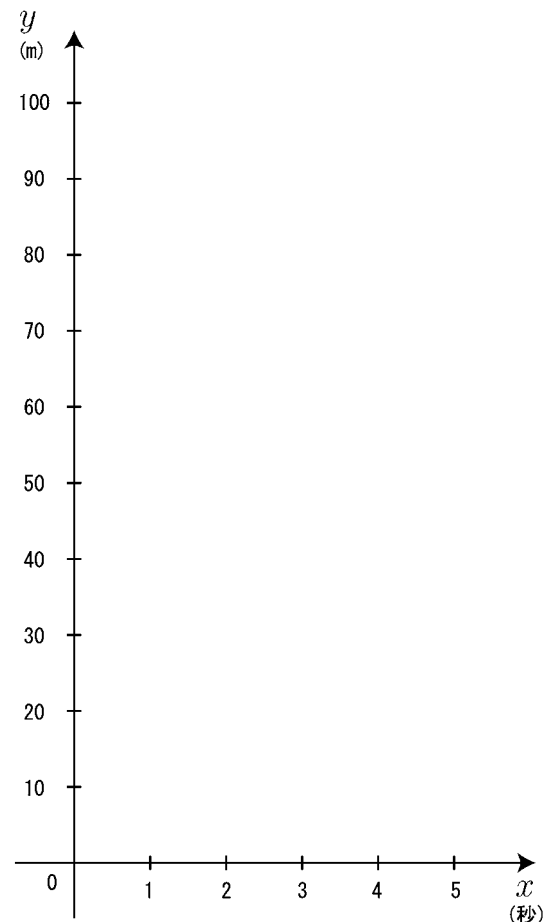
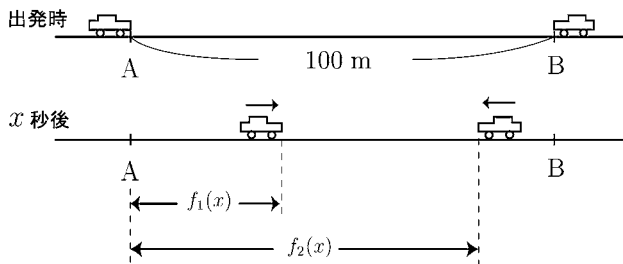


1 次関数のグラフの問題 (2)

1 長さ 15cm のロウソクに火をつけると、毎分 0.5cm の割合でロウソクが短くなっていく。火をつけてから x 分後のロウソクの長さを y cm とするとき、火をつけてからロウソクが燃えつきるまでの x と y の関係を表すグラフをかけ。

2 ある人が家から 800m 離れた駅まで分速 80m で歩いていく。家を出発してから x 分後の駅までの残りの道のりを y m とするとき、家を出発してから駅に着くまでの x と y の関係を表すグラフをかけ。

3 100m ある直線道路を 2 つの車が走る。A 地点から B 地点に向かって走る車は秒速 20m で走る。B 地点から A 地点に向かって走る車は秒速 10m で走る。同時に出発し、 x 秒後の A 地点からの距離をそれぞれ $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$ とする。

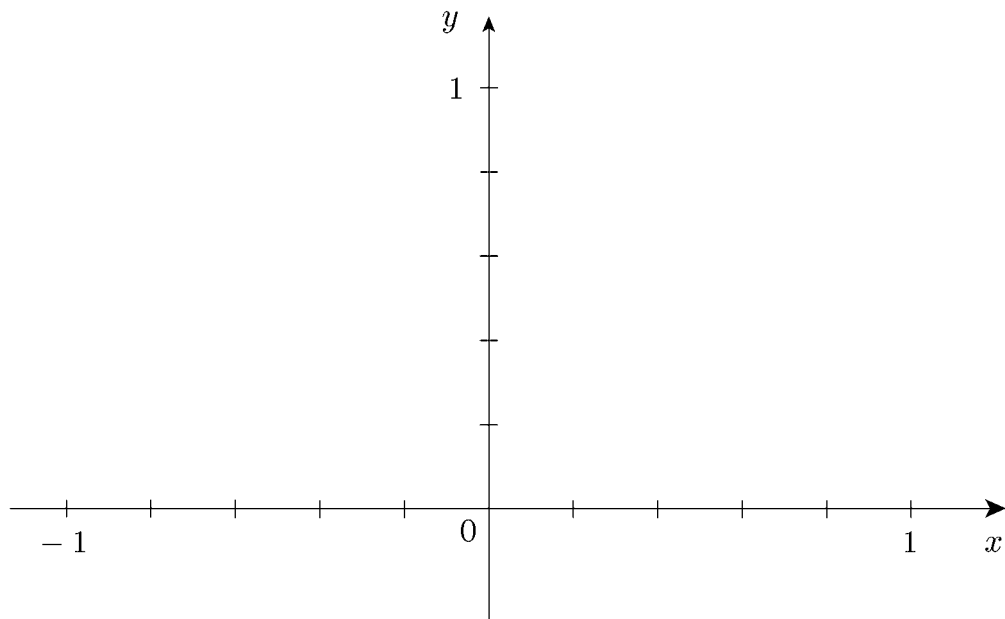


- (1) $f_1(x)$ と $f_2(x)$ を x の式で表せ。
 $f_1(x) =$, $f_2(x) =$
- (2) $y = f_1(x)$ と $y = f_2(x)$ のグラフを右図に描け。
- (3) 2 直線 ($y = f_1(x)$ と $y = f_2(x)$) の交点の座標を求めよ。
- (4) 交点の座標は何を意味するか詳しく 答えよ。

$y = x^2$ のグラフ

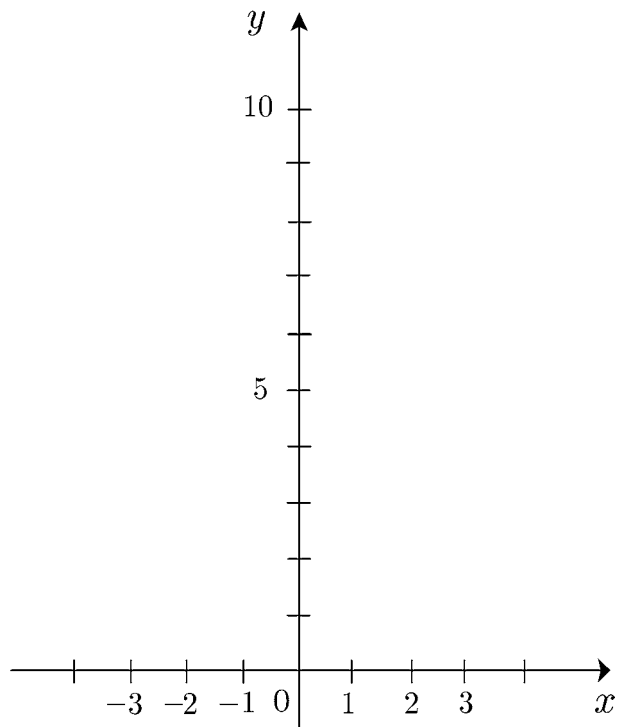
1 次の表を完成してから、 $y = x^2$ のグラフをかけ。

| | | | | | | | | | | | | | |
|-----|-----|----|----------------|----------------|----------------|-----------------|---|----------------|---------------|---------------|---------------|---|-----|
| x | ... | -1 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{8}$ | $-\frac{1}{16}$ | 0 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | ... |
| y | ... | | | | | | | | | | | | |



2 次の表を完成してから、 $y = x^2$ のグラフをかけ。

| | |
|-----|-----|
| x | y |
| ⋮ | ⋮ |
| -3 | |
| -2 | |
| -1 | |
| 0 | |
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| ⋮ | ⋮ |



2 次関数のグラフ (1)

① 2 次関数とそのグラフ

2 次関数の中で、最も基本的な関数は

$$y = x^2$$

である。この関数のグラフをかいてみよう。

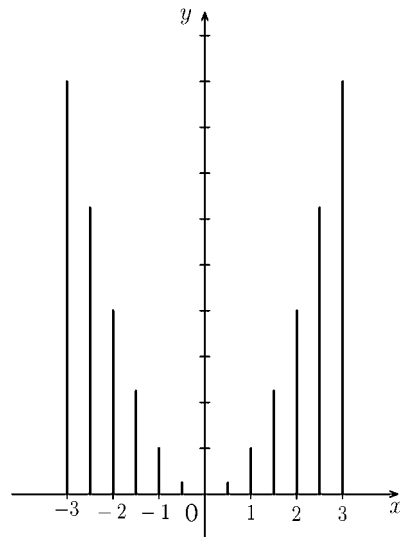
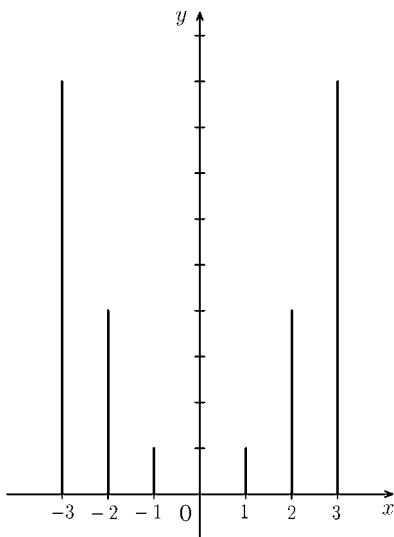
最初に、 x の値が整数であるときの y の値を求める。

| | | | | | | | | | |
|-----|----|----|----|----|---|---|---|---|----|
| x | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y | 16 | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 |

次に、 x 軸上の目盛りの上に、対応する y の長さの棒を立てる。

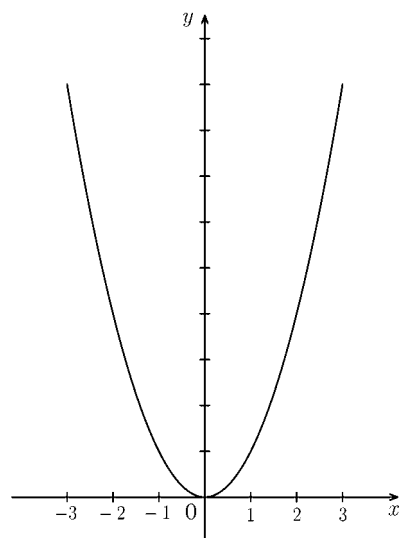
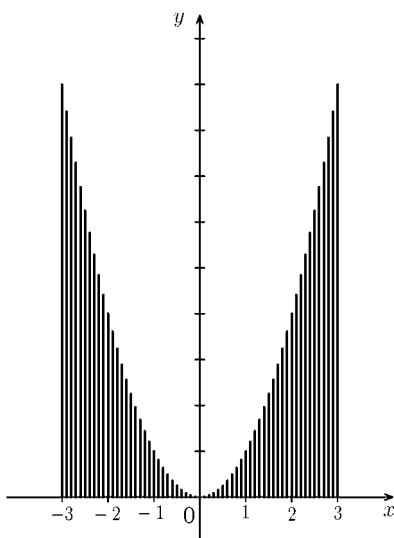
x の値の間隔を 1 ずつにすると

x の値の間隔を 0.5 ずつにすると



x の値の間隔を 0.1 ずつにすると

$y = x^2$ のグラフ



「関数のグラフとは、棒グラフのことである」を理解すること。

2 次関数のグラフ (2)

② $y = ax^2$ のグラフ

次の関数のグラフを同一座標平面上にかけ。

$$(1) \quad y = 2x^2, \quad y = 3x^2, \quad y = \frac{1}{2}x^2, \quad y = \frac{1}{4}x^2$$

$$(2) \quad y = -2x^2, \quad y = -3x^2, \quad y = -\frac{1}{2}x^2, \quad y = -\frac{1}{4}x^2$$

2 次関数のグラフ (3)

③ $y = x^2 + q$ のグラフ

次の関数のグラフを同一座標平面上にかけ。

(1) $y = x^2 + 1,$ $y = x^2 + 3,$ $y = x^2 - 3$

(2) $y = -x^2 - 1,$ $y = -x^2 - 3,$ $y = -x^2 + 1$

2 次関数のグラフ (4)

④ $y = (x - p)^2$ のグラフ

次の関数のグラフを同一座標平面上にかけ。

(1) $y = (x - 1)^2,$ $y = (x + 1)^2$

(2) $y = -(x - 1)^2,$ $y = -(x + 1)^2$

2 次式の変形

定数 a, b, c ($a \neq 0$) に対して, 2 次式を

$$ax^2 + bx + c = a(x + \square)^2 + \circ$$

の形に変形する。

例 $3x^2 + 11x + 5 = 3\left(x^2 + \frac{11}{3}x\right) + 5$

$$= 3\left\{x^2 + 2 \times \frac{11}{6}x + \left(\frac{11}{6}\right)^2 - \left(\frac{11}{6}\right)^2\right\} + 5$$

$$= 3\left(x + \frac{11}{6}\right)^2 - 3 \times \left(\frac{11}{6}\right)^2 + 5$$

$$= 3\left(x + \frac{11}{6}\right)^2 - \frac{61}{12}$$

問 次の□と○に適する数をかけ。

$$(1) x^2 + 8x = \left(x + \square\right)^2 - \circ$$

$$(2) x^2 - 2x + 3 = \left(x - \square\right)^2 + \circ$$

$$(3) x^2 + x + 1 = \left(x + \square\right)^2 + \circ$$

$$(4) x^2 - 3x - 1 = \left(x - \square\right)^2 - \circ$$

$$(5) 2x^2 - 8x + 3 = 2\left(x - \square\right)^2 - \circ$$

$$(6) -2x^2 + 4x - 1 = -2\left(x - \square\right)^2 + \circ$$

$$(7) 2x^2 + 5x + 2 = 2\left(x + \square\right)^2 - \circ$$

2 次関数のグラフ (5)

⑤ $y = a(x - p)^2 + q$ のグラフ

次の関数のグラフを同一座標平面上にかけ。

(1) $y = (x - 1)^2 + 2,$

$$y = -(x - 1)^2 - 2$$

問 次の関数のグラフをかけ。

(1) $y = x^2 - 6x + 13$

(2) $y = 2x^2 - 8x + 8$

(3) $y = -x^2 + 6x$

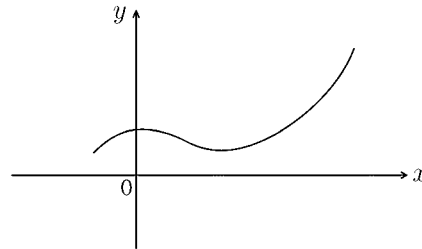
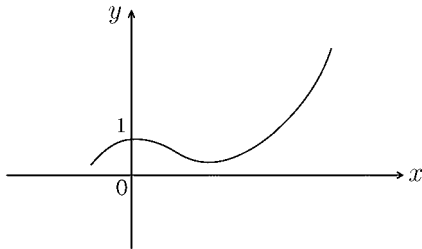
(4) $y = -2x^2 - 8x - 7$

練習問題

1 $y = f(x)$ のグラフが次のようなグラフであるとき、次の関数のグラフをかけ。

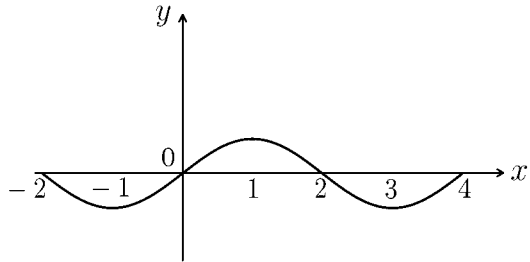
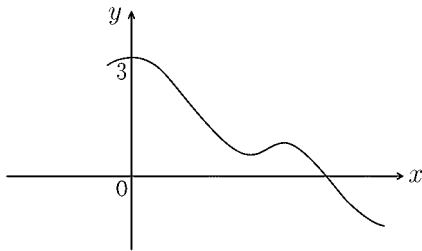
(1) $y = f(x) + 1$

(2) $y = 2f(x)$



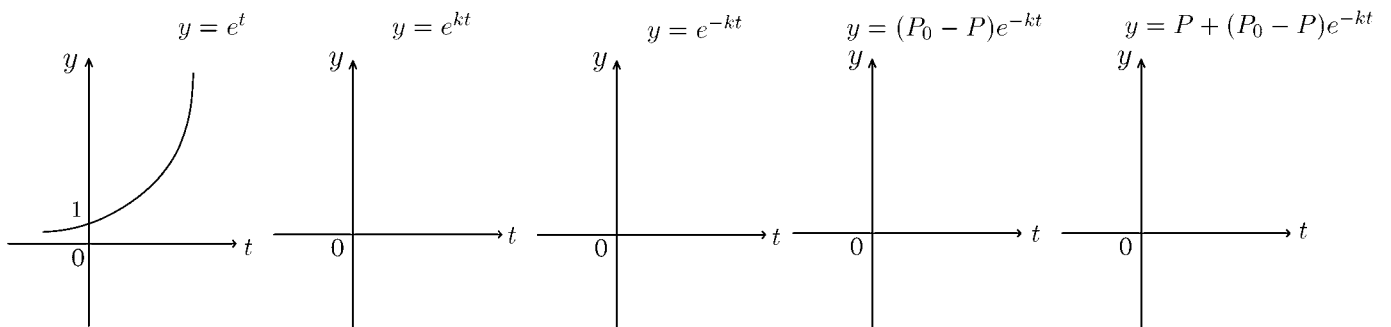
(3) $y = f(x) - 3$

(4) $y = f(x - 1)$



2 次の順序に従って、 $y = P + (P_0 - P)e^{-kt}$ のグラフの略図をかけ。

(P, P_0, k は正の定数・ e は約 2.7 の実数を表す)



2 次不等式

不等式

$$x^2 - 1 > 0, \quad x^2 - 2x - 1 < 0$$

のように、左辺が x の 2 次式となるように整理できる不等式を 2 次不等式という。

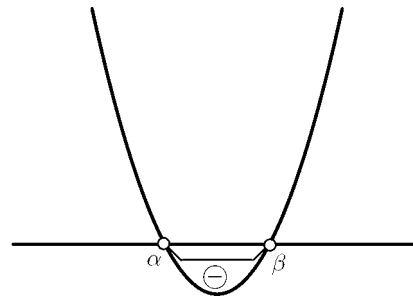
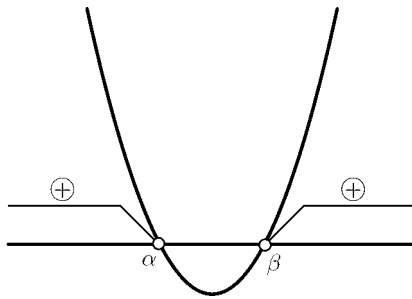
$ax^2 + bx + c = 0$ ($a > 0$) の 2 つの解を α, β ($\alpha < \beta$) とすると、

$ax^2 + bx + c > 0$ の解は

$$x < \alpha, \quad \beta < x$$

$ax^2 + bx + c < 0$ の解は

$$\alpha < x < \beta$$



問 次の 2 次不等式を解け。

(1) $(x - 2)(x - 3) > 0$

(2) $x(x + 7) < 0$

(3) $x^2 + 2x - 3 > 0$

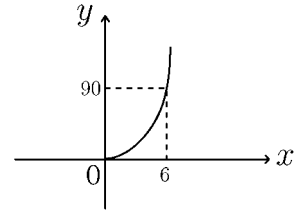
(4) $x^2 - 4 < 0$

(5) $-x^2 - x + 12 \geq 0$

(6) $-3x^2 + 2x + 4 \leq 1$

2 次関数の問題

1 自動車が出発してから、 x 秒に進む距離を y m とする。 $0 \leq x \leq 6$ の範囲で、 y は x の 2 乗に比例した。下のグラフはそのときの様子を表したものである。



(1) y を x の式であらわせ。

(2) 自動車が出発すると同時に、秒速 12 m で走っているバイクが出発した。自動車がバイクに追いつくのは、出発してから何秒後か求めよ。

2 傾きが一定の坂の頂上からボールを転がしたところ、ボールが転がり始めてから x 秒に転がった距離を y m とすると、 x と y には $y = \frac{1}{2}x^2$ という関係があるという。

(1) ボールが転がると同時に、A 君は頂上からこの坂を秒速 1 m の速さで歩き始めた。A 君は、ボールが転がり始めてから何秒後にボールに追いつかれるか。

(2) B 君は、ボールが転がり始めてからしばらくして、頂上から一定の速さで走り始めた。B 君は、ボールが転がり始めてから 3 秒後にボールに追いつき、7 秒後にボールに追い抜かれた。B 君毎秒何 m で走ったか。

3 時速 x km で走っている自動車にブレーキをかけて、ブレーキがきき始めてから停止するまで進む距離を y m とする。 x と y の間には $y = ax^2$ の関係がある。時速 60 km で走っている自動車にブレーキをかけると、効き始めてから 18 m 走って止まる。

(1) y を x の式であらわせ。

(2) 時速 80 km で走っている自動車にブレーキをかけると、効き始めてから何 m 走って止まるか。

(3) ブレーキが効き始めてから 50 m 走って止まるときの速さを求めよ。

練習問題 2A (No.1)

1 次の連立方程式を解け。

$$(1) \begin{cases} 3x - 4y = 11 \\ 2x + 3y = -4 \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} a - 2b + 3c = -14 \\ 2a - 3b + c = -11 \\ 3a + b - 2c = 5 \end{cases}$$

2 次の 1 次関数のグラフをかけ。またその値域を求めよ。

$$(1) y = -2x + 3 \qquad \left(-2 \leq x \leq \frac{3}{2}\right)$$

$$(2) y = \frac{1}{3}x + 3 \qquad \left(-\frac{3}{2} \leq x \leq 2\right)$$

3 関数 $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$ において次の値を求めよ。

$$(1) f(-1) \qquad (2) f(-2)$$

$$(3) f(0) \qquad (4) f\left(\frac{3}{4}\right)$$

4 次の 2 次関数のグラフを書き、その放物線の軸と頂点をいえ。

$$(1) y = -2x^2 \qquad (4) y = x^2 - 4x - 1$$

$$(2) y = 3(x+1)^2 \qquad (5) y = 2x^2 - 2x$$

$$(3) y = -(x+2)^2 + 4 \qquad (6) y = -\frac{1}{3}x^2 + x + 1$$

5 $y = 2x^2$ の放物線がある。この放物線をどのように平行移動すると

(1), (2) のようになるか。

$$(1) y = 2x^2 - 4x + 2$$

$$(2) y = 2x^2 - 4x + 3$$

6 次の条件を満たす 2 次関数を求めよ。

(1) 頂点が $(-1, 4)$ で y 軸との切片が 3

(2) 3 点 $(-3, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 6)$ を通る。

(3) x 軸と $(-3, 0)$, $(1, 0)$ で交わり y 軸と点 $(0, 6)$ で交わる。

(4) 直線 $x = -3$ を軸とし、2 点 $(0, 6)$, $(2, 14)$ を通る。

練習問題 2A (No.2)

7 次の 2 次方程式を解け

(1) $x^2 + 6x + 1 = 0$

(2) $2x^2 + 5x - 1 = 0$

(3) $-x^2 + 4x + 7 = 0$

(4) $0.1k^2 - 0.6k + 0.3 = 0$

(5) $8t^2 + 54t + 81 = 0$

8 次の 2 次不等式を解け。

(1) $2x^2 + 4 > 3x^2$

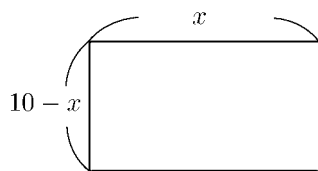
(2) $x^2 - 4x > -3$

(3) $10 \geq x^2 + 3x$

(4) $3 + 4x + 3x^2 \geq 3$

(5) $x^2 - 1 < 2x$

9 長さ 20cm の針金を折り曲げて長方形を作る。



(1) 1 辺の長さを x とするとき、 x の値の範囲を求めよ。

(2) 長方形の面積が 16cm^2 以上となる長方形の x の値の範囲を求めよ。

10 次の 2 次関数の最大値, 最小値, およびそのときの x の値を求めよ。

(1) $y = 2x^2$ ($-1 \leq x \leq 2$)

(2) $y = x^2 - 2x + 2$ ($-1 \leq x \leq 3$)

(3) $y = -2x^2 + 4x - 2$ ($2 \leq x \leq 3$)

(4) $y = -2x^2 + 3x - 2$ ($0 \leq x \leq 2$)

練習問題 2B (No.1)

1 次の連立方程式を解け。

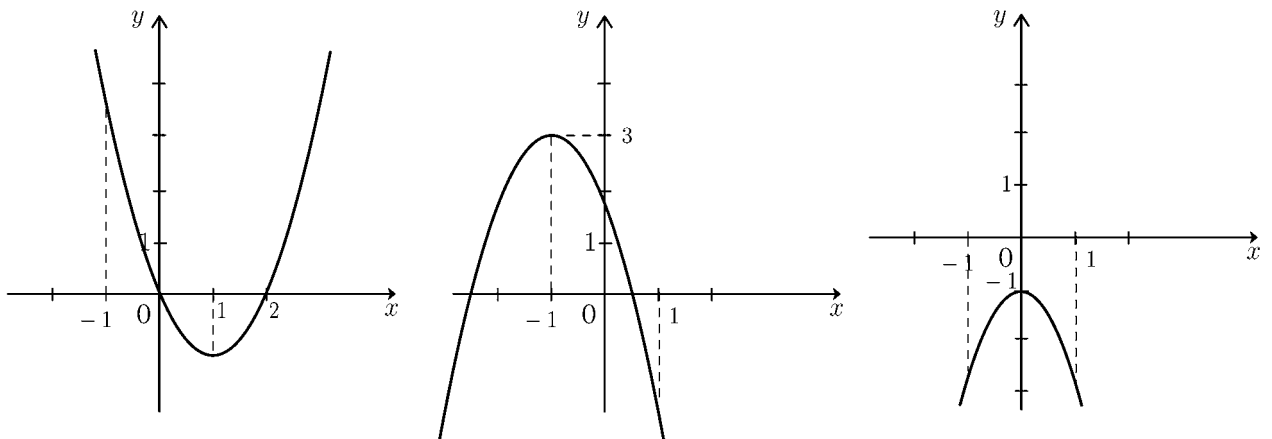
$$(1) \begin{cases} a - 2b + 3c = -14 \\ 2a - 3b + c = -11 \\ 3a + b - 2c = 5 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x + 6y + 2z = 9 \\ x - 3y - 4z = 0 \\ 6x - 6y + 6z = 19 \end{cases}$$

2 次の直線の方程式を求めよ。

- (1) 2 点 $(a, 0)$, $(0, b)$ を通る直線の方程式
- (2) 点 $(-1, -1)$ を通り, $y = 2x + 1$ に平行な直線の方程式
- (3) 点 $(1, 1)$ を通り, $y = 2x + 1$ に垂直な直線の方程式

3 次の図は 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフである。

それぞれの場合について, a , b , c , $a + b + c$, $a - b + c$, および $b^2 - 4ac$ は正, 0, 負のいずれかを言え。

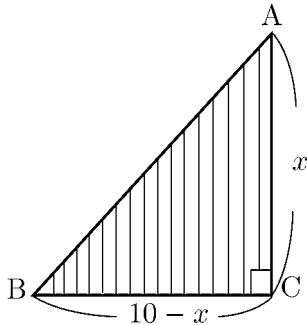


4 2 つの放物線 $y = x^2 - 3x$, $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + a$ の頂点が一致するという。定数 a はいくらか。

5 放物線 $y = 2x^2 - 4kx + 15 + k$ は x 軸に接しているとき, k の値を求めよ。

練習問題 2B (No.2)

6



直角三角形 ABC があり直角をはさむ 2 辺 AC, BC の長さの和は 10cm である。辺 AC の長さを x とおくと、次の間に答えよ。

(1) x のとり得る範囲はいくらか。

(2) 直角三角形 ABC の面積を y とするとき y を x で表せ。

(3) y の最大値およびそのときの x の値を求めよ。

(4) 辺 AB の長さの平方を z とするとき、 z を x で表せ。

(5) z の最小値およびそのときの x の値を求めよ。

7 放物線 $y = x^2 + 2x + m - \frac{1}{2}$ と x 軸との共有点の個数を調べよ。ただし、 m は定数である。

8 次の 2 つの不等式が同時に成り立つような x の範囲を求めよ。

(1) $x^2 - x - 2 < 0$ $x(x - 1) > 0$

(2) $2x^2 - x - 3 > 0$ $x^2 - 2x - 2 < 0$

9 2 つの放物線 $y = -x^2 + 2x + 1$ と $y = x^2 - 1$ がともに x 軸より上方にあるような x の値の範囲を求めよ。

指数関数

指数の拡張

a を n 個掛け合わせたものを a の n 乗といい、 a^n で表す。

このとき、 n を a^n の指数という。

m, n が正の整数のとき、次の指数法則が成り立つ。

$$a^m \times a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad (ab)^n = a^n b^n$$

問 1 次の計算をせよ。

$$(1) x^3 \times x^4 \qquad (2) x^2 \times x \qquad (3) (x^3)^4$$

$$(4) (x^2)^4 \qquad (5) (ab)^3 \qquad (6) (a^2 b^3)^4$$

指数が 0 や負の整数のとき a^n をどのように定めるかを考えてみる。

0 や負の整数について、次のように定める。

$$a \neq 0 \text{ とき、 } a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

問 2 次の値を求めよ。

$$(1) 3^0 \qquad (2) 5^{-1}$$

$$(3) 5^{-2} \qquad (4) 0.1^{-1}$$

$$(5) \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \qquad (6) \left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$$

問 3 次の計算を行い、結果を負の整数を用いないで表せ。

$$(1) 3x \times 5x^4 \qquad (2) (-3x^2)^3$$

$$(3) x^3 y \times yx^3 \qquad (4) \left(\frac{1}{3}xy^2\right)^2 \times 27x^2y$$

$$(5) 32x^2y^3 \times \left(-\frac{1}{2}x^2y\right)^3 \qquad (6) (-3ab^2)^2 \times (-2a^2b)^3$$

分数の指数

分数の指数

3乗すると a となる正の整数を $\sqrt[3]{a}$ と表した。

このとき、

$$(a^{\frac{1}{3}})^3 = a^{\frac{1}{3} \times 3} = a^1 = a$$

となるから、

$$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$$

となることがわかる。また、

$$a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3} \times 2} = (a^{\frac{1}{3}})^2 = (\sqrt[3]{a})^2$$

$$a^{\frac{2}{3}} = a^{2 \times \frac{1}{3}} = (a^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$$

したがって、

$$a^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{a})^2 = \sqrt[3]{a^2}$$

まとめると、

$a > 0, m$ が整数、 n が整数のとき

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

また、指数がどのような整数や分数（有理数）であっても、次の指数法則が成り立つ。

$a > 0, b > 0$ で、 p, q が有理数のとき、

$$a^p \times a^q = a^{p+q}, \quad (a^p)^q = a^{pq}, \quad (ab)^p = a^p b^p$$

問 1 次の計算をせよ。（ただし、 $a > 0, b > 0$ とする）

$$(1) \sqrt{a} \times \sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[6]{a^5} \qquad (2) a\sqrt{a} \div \sqrt[3]{a}$$

$$(3) \sqrt{ab^3} \div \sqrt[3]{a^2b} \qquad (4) \sqrt[6]{a^3b} \times \sqrt[3]{ab} \div \sqrt[3]{ab^2}$$

問 2 次の値を求めなさい。

$$(1) 4^{\frac{1}{2}} \qquad (2) 27^{\frac{2}{3}} \qquad (3) 8^{\frac{2}{3}}$$

$$(4) \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{2}{3}} \qquad (5) (-4)^3 \qquad (6) (-27)^{\frac{1}{3}}$$

$$(7) 9^{\frac{3}{2}} \qquad (8) 16^{\frac{3}{4}}$$

指数関数のグラフ

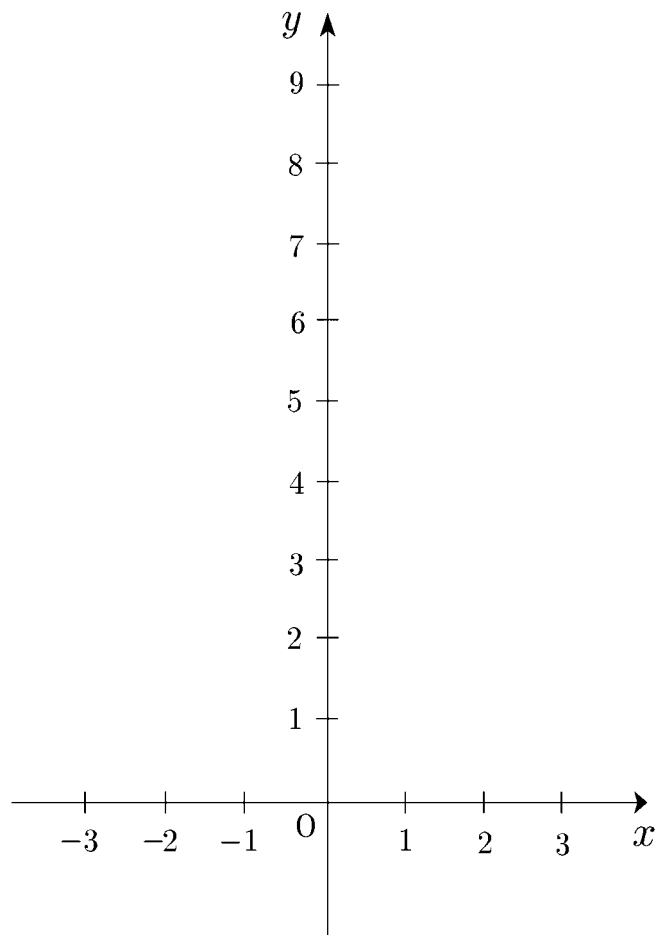
問 (1) $y = 2^x$ と, (2) $y = (\frac{1}{2})^x$ のグラフを表を完成してからかきなさい。

(1) $y = 2^x$

| | | | | | | | | | | |
|-----|-----|----|----|----|----|---|---|---|---|-----|
| x | ... | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | ... |
| y | ... | | | | | | | | | ... |

(2) $y = 2^{-x}$

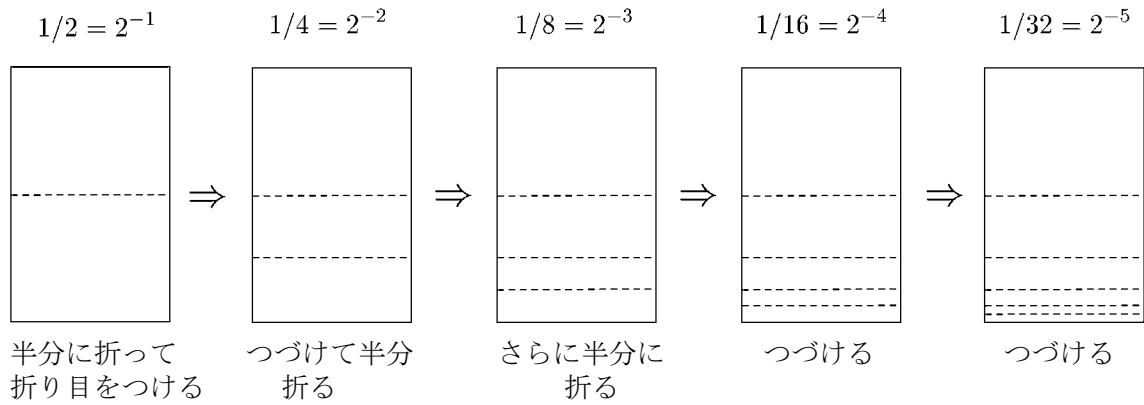
| | | | | | | | | | | |
|-----|-----|----|----|----|----|---|---|---|---|-----|
| x | ... | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | ... |
| y | ... | | | | | | | | | ... |



$y = 2^x$ のグラフをかく

$y = 2^x$ のグラフを A4 を使って描いてみよう

① **A4**

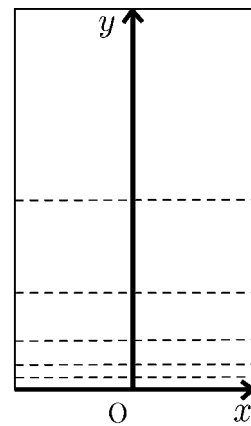


② 次に **A4** の用紙に

x 軸 (用紙の下に描く)

y 軸 (用紙の中心に描く)

それから、最適な目盛りをつける。



③ 気がついたことを自由に書いてみよう。

対数 (1)

常用対数

「 $100 = 10^r$ となる r の値はいくらか」という問題の答えは 2 である。

このことを

$$\log_{10} 100 = 2 \quad (\log \text{ はログと読む。})$$

と表す。

$\log_{10} 100$ ということは、「100 は 10 の何乗になるか」という意味である。

このことを、一般化すると、正の整数 R に対して

$$R = 10^r$$

となるような数 r を、

$$\log_{10} R$$

と表す。 $\log_{10} R$ を R の常用対数という。また 10 を底という。

100 は 10^2 である。これを $\log_{10} 100 = 2$ と表し、100 の常用対数は 2 であることを意味する。

つまり、対数という意味は「与えられた数に対する指数のこと」と考える
とよい。

問 1 次の式を \log_{10} の記号を用いて表せ。

(1) $1000 = 10^3$

(2) $1 = 10^0$

(3) $0.01 = 10^{-2}$

(4) $\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}}$

問 2 次の値を求めよ。

(1) $\log_5 125$

(2) $\log_{16} 4$

(3) $\log_3 \sqrt{3}$

(4) $\log_{\frac{1}{2}} 16$

対数 (2)

一般の対数

$8 = 2^3$ である。このことを

$$\log_2 8 = 3$$

と表して、これを

「2 を底とする 8 の対数は 3 である。」という。

一般に、 $R = a^r$ のとき

$$\log_a R = r$$

と表し、

「 a を底とする R の対数は r である」という。

一般に、 $\log_a M, \log_a N$ の値が与えられているとき、

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

の式が成り立つことを証明する。

$$\log_a M = m, \log_a N = n$$

とおくと、

$$M = a^m, N = a^n$$

となる。

$$MN = M \times N = a^m \times a^n = a^{m+n}$$

であるから

$$\log_a MN = m + n = \log_a M + \log_a N$$

となる。

問 1 指数法則

$$a^m \div a^n = a^{m-n}, (a^m)^n = a^{mn}$$

を利用して、次の性質を導け。

$$2. \quad \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$3. \quad \log_a M^n = n \log_a M$$

問 2 次の式を簡単にせよ。

$$(1) \quad \log_3 27$$

$$(2) \quad \log_{10} \frac{1}{10000}$$

$$(3) \quad \log_4 2 + \log_4 32$$

$$(4) \quad \log_3 \sqrt{54} - \log_3 \sqrt{6}$$

$$(5) \quad \log_2 \frac{8}{3} + \log_2 6$$

$$(6) \quad \log_5 75 + \log_5 3$$

対数 (3)

底の変換の公式

$a^0 = 1$, $a^1 = a$ であるから、

$$\log_a 1 = 0,$$

$$\log_a a = 1$$

が成り立つことがわかる。

次に、 a を底とする対数 $\log_a b$ を、 c を底とする対数で表してみよう。

$$\log_a b = p$$

とおくと

$$a^p = b$$

両辺の c を底とする対数をとると

$$\log_c a^p = \log_c b$$

$$p \log_c a = \log_c b$$

$a \neq 1$ であるから、 $\log_c a \neq 0$

したがって

$$p = \frac{\log_c b}{\log_c a} \qquad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (\text{底の変換の公式})$$

とくに

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

問 次の式を計算せよ。

(1) $\log_{10} 60 + 2 \log_{10} \sqrt{5} - \log_{10} 3$

(2) $\log_2 4 - 3 \log_2 3 + \log_2 6$

(3) $\log_8 5 \cdot \log_{49} 16 \cdot \log_5 7$

(4) $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a$

(5) $(\log_2 \sqrt{3} + \log_4 \sqrt[3]{3})(\log_3 2 + \log_9 25)$

(6) $\frac{5}{2} \log_3 5 - \frac{3}{2} \log_3 \frac{1}{2} + \log_3 \frac{2\sqrt{3}}{3}$

対数関数のグラフ

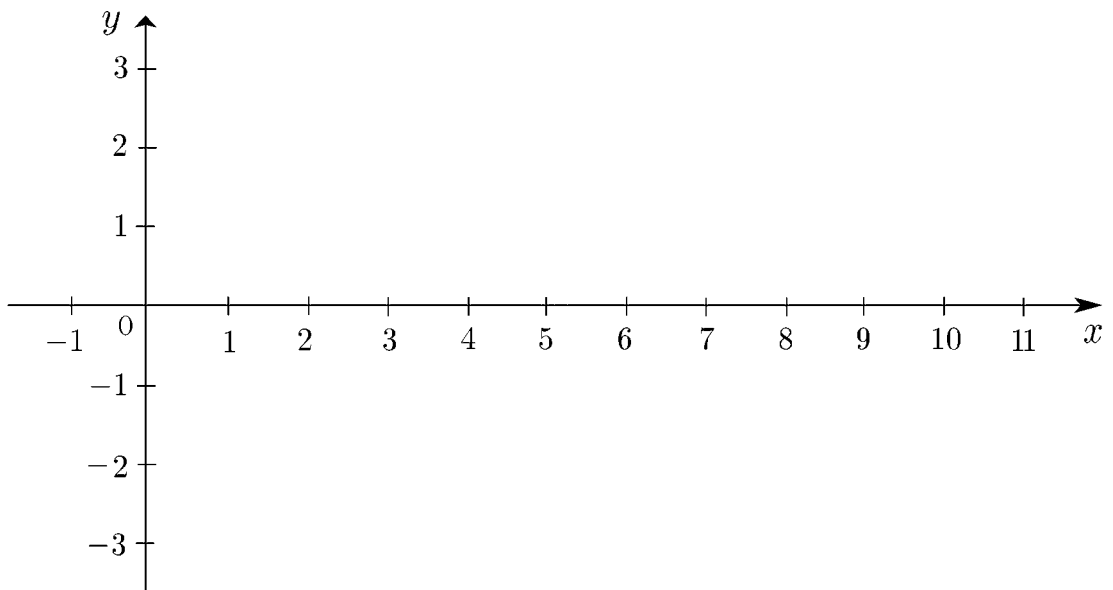
問 (1) $y = \log_2 x$ と, (2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフを表を完成してからかきなさい。

(1) $y = \log_2 x$

| | | | | | | | | | | |
|-----|-----|----------------|---------------|---------------|---------------|---|---|---|---|-----|
| x | ... | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 | 8 | ... |
| y | | | | | | | | | | |

(2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

| | | | | | | | | | | |
|-----|-----|----------------|---------------|---------------|---------------|---|---|---|---|-----|
| x | ... | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 | 8 | ... |
| y | | | | | | | | | | |



関数のグラフ

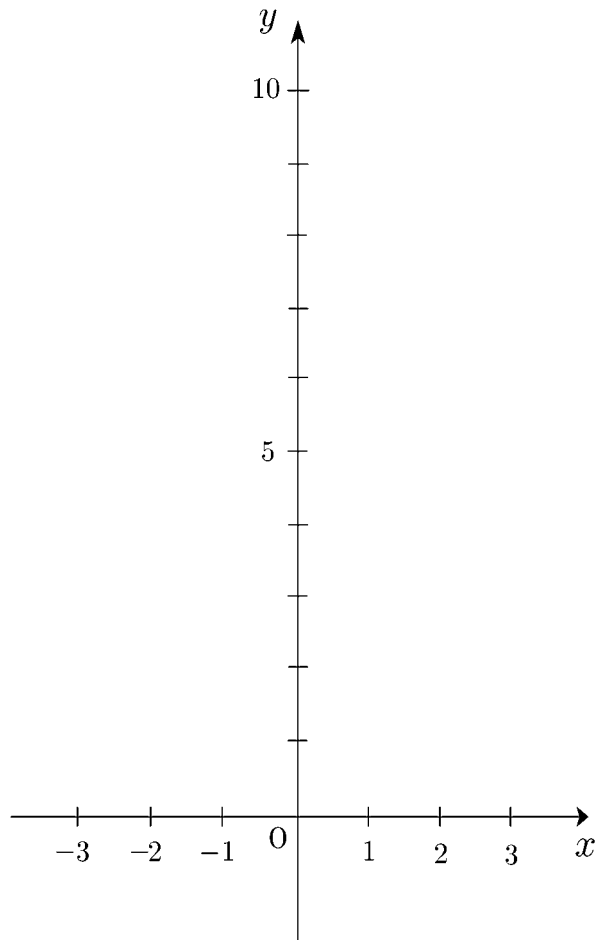
問 1 次の関数のグラフを同じ座標平面上にかけ。

1. $y = x^2$

2. $y = x$

3. $y = 2^x$

4. $y = 2^{-x}$



問 2 1. $y = x$ と $y = x^2$ の交点の座標を求めよ。

2. $x \geq 0$ のとき、 $y = x^2$ と $y = 2^x$ の交点の座標を求めよ。

3. $x \leq 0$ のとき、 $y = x^2$ と $y = 2^{-x}$ の交点の座標を求めよ。

指数関数と対数関数の比較

指数関数 $y = 2^x$

対数関数 $y = \log_2 x$

1. 定義

$$a^p = M$$

\iff

$$p = \log_a M$$

真数 $M > 0$
底 $a > 0, a \neq 1$

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1$$

2. 指数法則

① $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

② $a^m \div a^n = a^{m-n}$

\longleftrightarrow

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

③ $(a^m)^n = a^{mn}$

\longleftrightarrow

$$\log_a M^k = k \log_a M$$

④ $(ab)^n = a^n b^n$

\longleftrightarrow

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (\text{底の変換の公式})$$

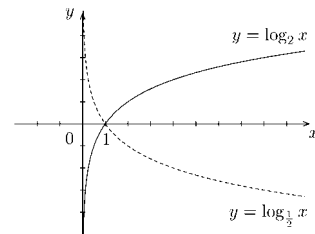
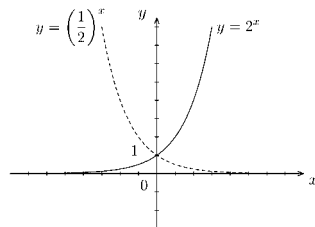
(条件 $a > 0, b > 0, m, n$ は有理数)

(条件 $a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0, k$ は実数)

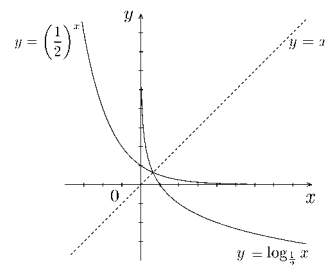
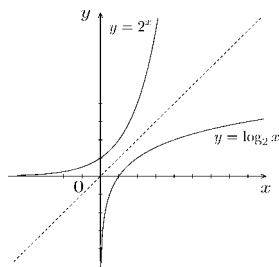
$$b > 0, b \neq 1,$$

$$c > 0, c \neq 1$$

3. グラフ



4. グラフ



5. わかったことをかきなさい。

指数・対数の問題 A

1 次の計算をせよ。

(1) $a^5 \times a^{-3}$

(2) $(a^{-3})^2$

(3) $(a^2b^{-1})^2$

(4) $(ab^{-2})^{-2}$

(5) $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a^2}$

(6) $a^2 \div a^{-3}$

(7) $a^{-\frac{1}{2}} \times a^{\frac{5}{6}} \div a^{\frac{1}{3}}$

2 次の値を求めよ。

(1) $\sqrt[3]{125}$

(2) $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9}$

(3) $\sqrt[4]{16}$

(4) $\sqrt[3]{-8}$

(5) $(0.1)^{-1}$

(6) $27^{\frac{2}{3}}$

(7) $3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{3}{2}}$

(8) $\sqrt[4]{25} \times \sqrt[6]{125}$

3 次の関数のグラフを書け。

(1) $y = 3^x$

(2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

4 次の値を計算せよ。

(1) $\log_{10} 1$

(2) $\log_{10} 10$

(3) $\log_{10} 100$

(4) $\log_{10} 0.1$

(5) $\log_{10} \frac{1}{100}$

(6) $\log_2 4$

(7) $\log_6 4 + \log_6 9$

(8) $\log_3 15 - \log_3 5$

(9) $\frac{1}{2} \log_7 49$

(10) $(\log_2 3) \times (\log_3 2)$

5 次の関数のグラフを書け。

(1) $y = \log_3 x$

(2) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

6 次の方程式を解け。

(1) $2^{x+2} = 16$

(2) $\log_5 x - \log_5 2 = 2$

指数・対数の問題 B

1 次の計算をせよ。

(1) $(a^2)^6 \div a^4$

(2) $(a^3b^{-2})^{-2}$

(3) $(a^2b^{-1})^{-2} \div ab$

(4) $\sqrt[3]{a} \times \sqrt{a}$

(5) $(\sqrt[3]{a^2})^2$

(6) $a^{\frac{8}{5}} \div a^{\frac{1}{10}} \times a^{\frac{1}{2}}$

2 次の値を求めよ。

(1) $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{32}$

(2) $(\sqrt[4]{3})^8$

(3) $\sqrt[3]{-64}$

(4) $(3^2 \times 3^{-4})^2$

(5) $2^{\frac{1}{2}} \times 2^{-\frac{5}{2}}$

(6) $(25^3)^{\frac{1}{2}}$

(7) $4^{\frac{1}{3}} \times 4^{\frac{1}{6}}$

(8) $(\sqrt{2^3} \div \sqrt[3]{2} \div 2)^6$

3 次の関数のグラフを書け。

(1) $y = 3^x + 1$

(2) $y = (\frac{1}{3})^x - 1$

4 次の式を計算せよ。

(1) $\log_{10} 10000$

(2) $\log_{10} 0.0001$

(3) $\log_4 1$

(4) $\log_{\frac{1}{2}} 16$

(5) $\log_{10} 5 + \log_{10} 200$

(6) $\log_2 56 - \log_2 7$

(7) $\frac{2}{3} \log_2 8$

(8) $(\log_2 5) \times (\log_5 4)$

5 次の関数のグラフを書け。

(1) $y = \log_3 x + 1$

(2) $y = \log_{\frac{1}{3}} x - 1$

6 次の方程式を解け。

(1) $2^{x+1} = 32$

(2) $\log_{\frac{1}{2}} x - \log_{\frac{1}{2}} 2 = 3$

指数・対数の問題 C

1 次の計算をせよ。

(1) $(a + a^{-1})^2$

(2) $(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}})$

(3) $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{a^2} \div \sqrt[6]{a^5}$

(4) $(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}} + b^{-\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}})$

2 次の値を求めよ。

(1) $\sqrt[4]{243} + \sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{48}$

(2) $4^{\frac{1}{3}} \div 8^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{5}{6}}$

(3) $9^{\frac{1}{6}} \div 27^{\frac{5}{9}} \times 81^{\frac{1}{3}}$

(4) $\sqrt{27} \times \sqrt[3]{81} \div \sqrt[6]{243}$

3 次の関数のグラフを書け。

(1) $y = 3^{x+1} + 1$

(2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} - 1$

4 次の表の指数は対数の形で、対数は指数の形で空欄を埋めよ。

| 指数 | | 対数 | 指数 | | 対数 |
|----|----------------------------------|----|----|--|------------------------------|
| ① | $5^3 = 125$ | | ④ | | $\log_3 81 = 4$ |
| ② | $x^0 = 1$ | | ⑤ | | $\log_{\sqrt{2}} 32 = 10$ |
| ③ | $8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$ | | ⑥ | | $\log_{\frac{1}{6}} 36 = -2$ |

5 次の関数のグラフを書け。

(1) $y = \log_3(x + 1) + 1$

(2) $y = \log_3(x - 1) - 1$

6 次の方程式を解け。

(1) $3^{2x+1} - 2 \cdot 3^x - 1 = 0$
(ヒント $3^x = X$ とおく)

(2) $(\log_{10} x)^2 - 4 \log_{10} x + 3 = 0$
(ヒント $\log_{10} x = X$ とする)