< チェビシェフの不等式 >

確率変数 X は 2 次モーメント $E[X^2]$ が有界であるとする。
このとき任意の定数 $\varepsilon > 0$ に対し

$$P(|X| \geqq \varepsilon) \leqq \frac{1}{\varepsilon^2} E\left[|X|^2\right]$$

が成り立つ。

X が連続型の確率変数であるとき，すなわち

$$P(X \epsilon A) = \int_A p(x)dx \qquad (A \subset \mathbf{R})$$

をみたす確率密度 $p(x)$ を持つときに証明する。

(証明)

$$\begin{aligned} P(|X| \geqq \varepsilon) &= \int_{|x| \geqq \varepsilon} p(x)dx \\ &\leqq \int_{|x| \geqq \varepsilon} \frac{x^2}{\varepsilon^2} p(x)dx = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{|x| \geqq \varepsilon} x^2 p(x)dx \\ &\leqq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx = \frac{1}{\varepsilon^2} E[X^2] \end{aligned}$$

(証明終)

問 X が離散型の確率変数であるとき，すなわち

$$P(X = x_n) = p_n \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$p_n \geqq 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (x_n)^2 p_n < +\infty$$

であるときチェビシェフの不等式 $P(|X| \geqq \varepsilon) \leqq \dfrac{1}{\varepsilon^2} E\left[X^2\right]$

を証明せよ。