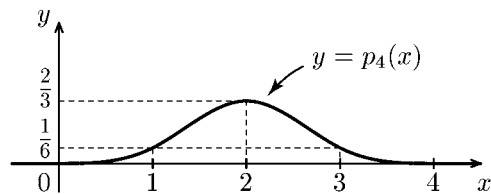


### < 一様分布の独立和の標準化 3 >

**例 3**  $X_1, X_2, X_3, X_4$  は共に  $p(x) = \begin{cases} 1 & : 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & : \text{それ以外} \end{cases}$  を密度関数とする確率変数で、独立とする。 $X_1 + X_2 + X_3 + X_4$  の確率密度関数を  $p_4(x)$  とすると、例 2 より  $p_4(x)$  は  $p(x)$  と  $p_3(x)$  とのたたみこみであるから

$$p_4(x) = (p * p_3)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x-y)p_3(y)dy = \int_0^3 p(x-y)p_3(y)dy$$

$$= \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ \frac{1}{6}x^3 & : 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{2}(x-1)(x^2 - 3x + 1) & : 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(x-3)(x^2 - 5x + 5) & : 2 \leq x \leq 3 \\ -\frac{1}{6}(x-4)^3 & : 3 \leq x \leq 4 \\ 0 & : 4 < x \end{cases}$$



となる。一方

$$E[X_k] = \frac{1}{2}, \quad V(X_k) = \frac{1}{12} \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

であるから

$$E[X_1 + X_2 + X_3 + X_4] = 2, \quad V(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) = \frac{1}{3}$$

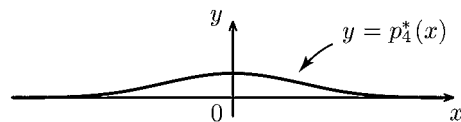
より、和  $X_1 + X_2 + X_3 + X_4$  の標準化は

$$(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)^* = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 - 2}{\sqrt{\frac{1}{3}}}$$

である。この標準化された確率変数  $(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)^*$  の確率密度関数を  $p_4^*(x)$  とすると

$$p_4^*(x) = p_4\left(\frac{x}{\sqrt{3}} + 2\right) \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \begin{cases} 0 & : x < -2\sqrt{3} \\ \frac{1}{54}(x+2\sqrt{3})^3 & : -2\sqrt{3} \leq x \leq -\sqrt{3} \\ -\frac{x^3}{18} - \frac{\sqrt{3}x^2}{9} + \frac{2\sqrt{3}}{9} & : -\sqrt{3} \leq x \leq 0 \\ \frac{x^3}{18} - \frac{\sqrt{3}x^2}{9} + \frac{2\sqrt{3}}{9} & : 0 \leq x \leq \sqrt{3} \\ -\frac{1}{54}(x-2\sqrt{3})^3 & : \sqrt{3} \leq x \leq 2\sqrt{3} \\ 0 & : 2\sqrt{3} < x \end{cases}$$



となる。