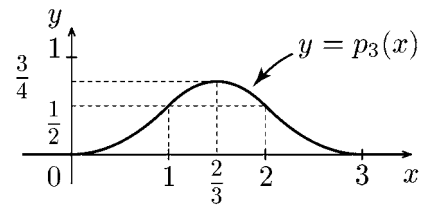


## < 一様分布の独立和の標準化 2 >

**例 2**  $X_1, X_2, X_3$  は共に  $p(x) = \begin{cases} 1 & : 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & : \text{それ以外} \end{cases}$  を密度関数とする確率変数で、独立とする。 $X_1 + X_2 + X_3$  の確率密度関数を  $p_3(x)$  とすると、例 1 より  $p_3(x)$  は  $p(x)$  と  $p_2(x)$  とのたたみこみであるから

$$p_3(x) = (p * p_2)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x-y)p_2(y)dy = \int_0^2 p(x-y)p_2(y)dy$$

$$= \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & : 0 \leq x \leq 1 \\ -(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4} & : 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2}(x-3)^2 & : 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & : 3 < x \end{cases}$$



となる。一方

$$E[X_k] = \frac{1}{2}, \quad V(X_k) = \frac{1}{12} \quad (k = 1, 2, 3)$$

なので

$$E[X_1 + X_2 + X_3] = \frac{3}{2}, \quad V(X_1 + X_2 + X_3) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

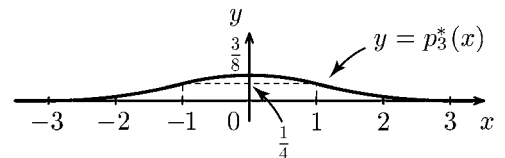
より、和  $X_1 + X_2 + X_3$  の標準化は

$$(X_1 + X_2 + X_3)^* = \frac{X_1 + X_2 + X_3 - \frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = 2(X_1 + X_2 + X_3) - 3$$

である。この標準化された確率変数  $(X_1 + X_2 + X_3)^*$  の確率密度関数を  $p_3^*(x)$  とすると

$$p_3^*(x) = p_3\left(\frac{x+3}{2}\right) \times \frac{1}{2}$$

$$= \begin{cases} 0 & : x < -3 \\ \frac{1}{16}(x+3)^2 & : -3 \leq x \leq -1 \\ -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{8} & : -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{16}(x-3)^2 & : 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & : 3 < x \end{cases}$$



となる。