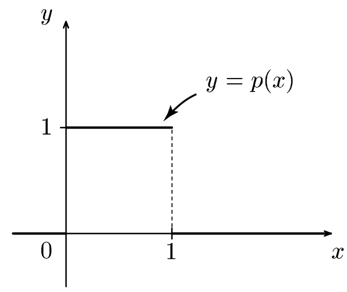
＜一様分布の独立和の標準化 1＞



例 1　$p(x) = \begin{cases} 1 & : \ 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 & : \ \text{それ以外} \end{cases}$

を密度関数とする確率変数 X_1，X_2 が独立とする。

$X_1 + X_2$ の確率密度関数を $p_2(x)$ とすると

$$p_2 = (p * p)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x-y)p(y)dy = \int_0^1 p(x-y)p(y)dy = \int_0^1 p(x-y)dy$$

より

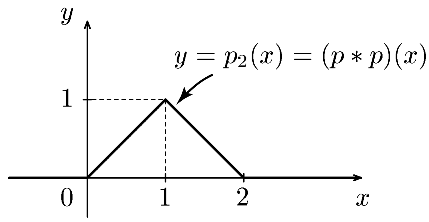
① $x < 0$ のとき　$p_2(x) = \int_0^1 p(\underbrace{x-y}_{\ominus})dy = 0$

② $0 \leqq x \leqq 1$ のとき　$p_2(x) = \int_0^x \underbrace{p(x-y)}_{=1}dy + \int_x^1 \underbrace{p(x-y)}_{=0}dy = \int_0^x 1dy = x$

③ $1 \leqq x \leqq 2$ のとき　$p_2(x) = \int_0^{x-1} \underbrace{p(x-y)}_{=0}dy + \int_{x-1}^1 p(x-y)dy = \int_{x-1}^1 1dy = 2-x$

④ $2 < x$ のとき　$p_2(x) = \int_0^1 p(\underbrace{x-y}_{1\text{より大}})dy = 0$

従って，$y = p_2(x)$ のグラフは右図のようになる。



一方

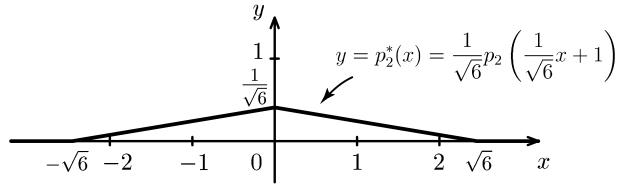
$$E[X_1] = E[X_2] = \int_0^1 xp(x)dx = \frac{1}{2}$$

$$V(X_1) = V(X_2) = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 p(x)dx = \frac{1}{12}$$

であるから $E[X_1 + X_2] = 1$，$V(X_1 + X_2) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ で，和 $X_1 + X_2$ の 標準化

$(X_1 + X_2)^* = \dfrac{X_1 + X_2 - 1}{\sqrt{\frac{1}{6}}} = \sqrt{6}(X_1 + X_2 - 1)$ の密度関数を $p_2^*(x)$ とすると，

$y = p_2^*(x)$ のグラフは右のとおり。



$$p_2^*(x) = \frac{1}{\sqrt{6}} p_2\left(\frac{1}{\sqrt{6}}x + 1\right) = \begin{cases} 0 & : \ x < -\sqrt{6} \\ \dfrac{x}{6} + \dfrac{1}{\sqrt{6}} & : \ -\sqrt{6} \leqq x \leqq 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} - \dfrac{x}{6} & : \ 0 \leqq x \leqq \sqrt{6} \\ 0 & : \ \sqrt{6} < x \end{cases}$$