＜独立確率変数の和の分布 3＞

＜10 ページ 定理 4＞

X_1 は正規分布 $N(m_1,\ v_1)$ に従い，X_2 は正規分布 $N(m_2,\ v_2)$ に従う確率変数で，X_1 と X_2 は独立とする。このとき和 X_1+X_2 は正規分布 $N(m_1+m_2,\ v_1+v_2)$ に従う。

この定理を証明するためには

$$p_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi v_1}}e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2v_1}},\quad p_2(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi v_2}}e^{-\frac{(x-m_2)^2}{2v_2}}$$

に対し

$$(p_1*p_2)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p_1(x-y)p_2(y)dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi(v_1+v_2)}}e^{-\frac{(x-m_1-m_2)^2}{2(v_1+v_2)}}$$

であることを示せば良い。積分の変数変換だけでできる問題である。
詳しい証明は練習問題とする。

＜12 ページ 定理 6＞

$X_1,\ X_2$ がそれぞれ $Gamma(\alpha_1,\ \beta),\ Gamma(\alpha_2,\ \beta)$ に従う確率変数で X_1 と X_2 が独立ならば，和 X_1+X_2 は $Gamma(\alpha_1+\alpha_2,\ \beta)$ に 従う。

この定理を証明するためには

$$p_\alpha(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\ \beta^\alpha}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}} & :\ x>0\\ 0 & :\ x\leqq 0\end{cases}$$

に対し

$$(p_{\alpha_1}*p_{\alpha_2})(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p_{\alpha_1}(x-y)p_{\alpha_2}(y)dy=\int_0^x p_{\alpha_1}(x-y)p_{\alpha_2}(y)dy=p_{\alpha_1+\alpha_2}(x)$$

であることをベータ関数とガンマ関数の関係を用いて示せば良い。
詳しい証明は練習問題とする。