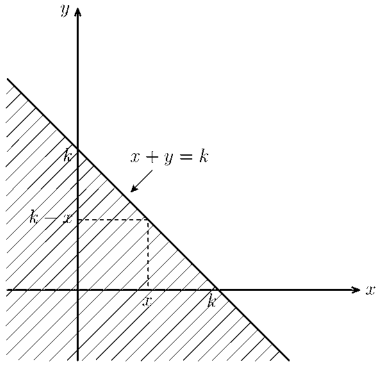
< 独立確率変数の和の分布 2 >

定理 3　X と Y は実数値連続密度関数をもつ確率変数で，X の密度関数は $p(x)$，Y の密度関数は $q(x)$ とする。

X と Y が独立ならば，$X+Y$ の密度関数は

$$(p*q)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x-y)q(y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}p(y)q(x-y)dy$$

である。この関数 $p*q(x)$ を p と q の**「たたみこみ」(convolution)** という。



(証明)　任意の実数 k に対し

$D=\{(x\ ,\ y):x+y\leqq k\}$

とおくと，X と Y は独立だから

定理 2 より

$$P(X+Y\leqq k)=P\big((X\ ,\ Y)\in D\big)$$

$$=\iint_D p(x)q(y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{k-x}p(x)q(y)dy\right\}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}p(x)\left\{\int_{-\infty}^{k-x}q(y)dy\right\}dx \qquad (y=u-x)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}p(x)\left\{\int_{-\infty}^{k}q(u-x)du\right\}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{k}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}p(x)q(u-x)dx\right\}du=\int_{-\infty}^{k}(p*q)(u)du$$

$$=\int_{-\infty}^{k}(p*q)(x)dx \text{ より}$$

$$P(X+Y\in A)=\int_A(p*q)(x)dx$$

(証明終)