＜独立確率変数の和の分布 1＞

定理 1　X と Y は整数値をとる確率変数

$P(X=k)=p_k$,　$P(Y=k)=q_k$　（ $k=0$, ±1 , ±2 , $\cdots$ ）

X と Y が独立ならば

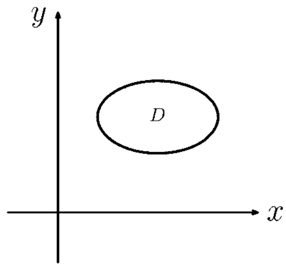
$$P(X+Y=k)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} p_j \times q_{k-j} \qquad \left(=\sum_{j=-\infty}^{\infty} p_{k-j} \times q_j\right)$$

(証明)　$$P(X+Y=k)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} P(X=j\ ,\ Y=k-j)$$

$$=\sum_{j=-\infty}^{\infty} P(X=j)P(Y=k-j)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} p_j \times q_{k-j}$$　(証明終)

定理 2　X と Y は実数値連続密度関数をもつ確率変数

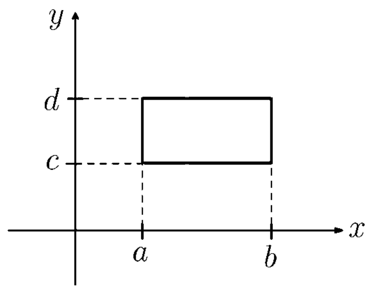
$$P(X\in A)=\int_A p(x)dx\ ,\ P(Y\in B)=\int_B q(x)dx$$



X と Y が独立ならば，平面上の任意の

領域 D に対し

$$P\left((X,Y)\in D\right)=\iint_D p(x)q(y)dxdy$$



(証明)　D が長方形領域 $[a\ ,\ b]\times[c\ ,\ d]$ のとき

$$P\big((X\ ,\ Y)\in D\big)=P\big(X\in[a\ ,\ b]\ ,\ Y\in[c\ ,\ d]\big)$$

$$=P(X\in[a\ ,\ b])\times P(Y\in[c\ ,\ d])=\int_a^b p(x)dx\times\int_c^d q(y)dy$$

$$=\int_a^b\left\{\int_c^d p(x)q(y)dy\right\}dx=\iint_{[a\ ,\ b]\times[c\ ,\ d]} p(x)q(y)dy=\iint_D p(x)q(y)dxdy$$

D が一般領域のときは D を長方形領域の集まり

D' で近似すれば良い。　　　(証明終)