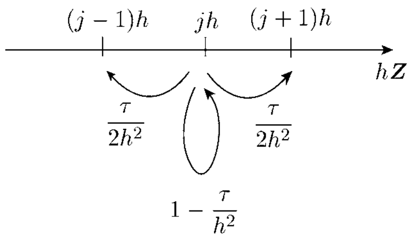
< 乱歩・ポアソン過程・ブラウン運動 >

ランダムウォーク, ポアソン過程, ブラウン運動についての関係をまとめる。
ブラウン運動の離散モデルであるランダムウォーク (乱歩) の時間幅を $\Delta t = \tau$,
空間幅を $\Delta x = h \ \ (\tau \leqq h^2)$ とする。

< $\boxed{1}$ ランダムウォーク $\{S_h^\tau(n) : n = 0, 1, 2, \cdots\}$ >



確率密度 $u_j^n = P(S_h^\tau(n) = jh)h^{-1}$ の満たす式は

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2h^2} \quad \text{(差分方程式)}$$

このランダムウォークに対し連続時間にした $\left\{ S_h^\tau\left(\left[\dfrac{t}{\tau}\right]\right) : t \geqq 0 \right\}$ は

$\tau \to 0$ のとき次のジャンプ型マルコフ過程に収束する。

< $\boxed{2}$ ジャンプ型マルコフ過程 $\{S_h(N_h(t)) : t \geqq 0\}$ >

$\{S_h(n) : n = 0,\ 1,\ 2, \cdots\}$ は $h\boldsymbol{Z}$ 上を動く乱歩で, 左右に 1 歩動く

確率はそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ である。また $\{N_h(t) : t \geqq 0\}$ は $\{S_h(n)\}$ と独立な

ポアソン過程で, $P\Big(N_h(t) = n\Big) = e^{-\frac{t}{h^2}} \times \dfrac{(\frac{t}{h^2})^n}{n!} \ (n = 0, 1, 2, \cdots)$ である。

確率密度 $\quad u(t, jh) = P\Big(S_h(N_h(t)) = jh\Big)h^{-1}$ の満たす式は

$$\frac{d}{dt}u(t, jh) = \frac{u(t, (j+1)h) - 2u(t, jh) + u(t, (j-1)h)}{h^2} \quad \text{(微分差分方程式)}$$

となる。ポアソン過程 $\{N_h(t)\}$ はジャンプする時刻を決める確率過程である。
このジャンプ型マルコフ過程は $h \to 0$ のときブラウン運動に収束する。

< $\boxed{3}$ ブラウン運動 $\{B(t) : t \geqq 0\}$ >

確率密度関数 $u(t, x) \quad \left(\Leftrightarrow P\Big(B(t) \in A\Big) = \displaystyle\int_A u(t, x)dx \right)$ の満たす式は

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t, x) \quad \text{(熱方程式, 拡散方程式)}$$

以上まとめると下の図式になる。定理 18 は「少数の法則」, 定理 19, 20 は
「中心極限定理」である。

$\boxed{1}\ \{S_h^\tau(n)\}\ \left\{ S_h^\tau\left(\left[\dfrac{t}{\tau}\right]\right) \right\} \xrightarrow[\text{(定理 18)}]{\tau \to 0} \boxed{2}\ \{S_h(N_h(t))\} \left\{ \begin{array}{l} S_h(n) : \text{乱歩} \\ N_h(t) : \text{ポアソン過程} \end{array} \right.$

$\boxed{2} \downarrow$ $h \to 0$ (定理 19)

$\boxed{1} \searrow$ $\tau \to 0$, $h \to 0$, $(\tau h^{-2} \leqq 1)$ (定理 20)

$\boxed{3}\ \{B(t)\}$ (ブラウン運動)