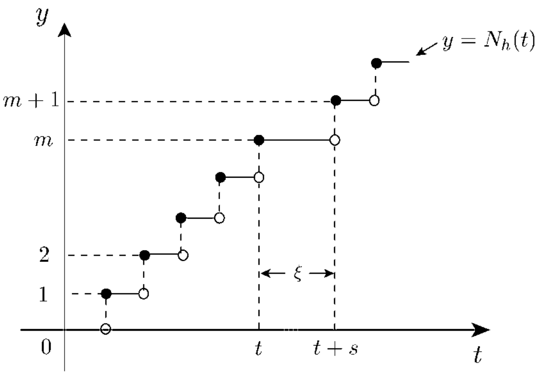
< ブラウン運動への収束 >

$u_h(t, jh) = P\Big(S_h(N_h(t)) = jh\Big)h^{-1}$ とおくと次式が成り立つ。

(∗5) $$\boxed{\frac{d}{dt}u_h(t, jh) = \frac{u_h\Big(t, (j+1)h\Big) - 2u_h(t, jh) + u_h\Big(t, (j-1)h\Big)}{2h^2}}$$

問 (∗5) を証明せよ。

ポアソン過程 $\{N_h(t) : t \geqq 0\}$ は右図のような階段型のグラフであり, $N_h(t) = m$ であるとき, 次にジャンプするまでの時間 ξ は密度 $\dfrac{1}{h^2}e^{-\frac{x}{h^2}}$ の指数分布に従う。このとき 37 ページより待ち時間 ξ の平均は



(∗6) $$\boxed{E\,[\xi] = h^2}$$

となる。

定理 19 $\{B(t) : t \geqq 0\}$ を 0 から出発する $(B(0) = 0)$ 1 次元ブラウン運動とする。
$h \to 0$ のとき
「$\{S_h(N_h(t)) : t \geqq 0\}$ の分布 」は「 $\{B(t) : t \geqq 0\}$ の分布」に収束する。

定理 20 $\tau > 0,\ h > 0,\ \tau h^{-2} \leqq 1$ なる定数 τ, h に対し, $\{S^\tau_h(n)\}$
を 45 ページで定義したランダムウォークとする。また $\{B(t) : t \geqq 0\}$
を 0 から出発する $(B(0) = 0)$ 1 次元ブラウン運動とする。
$\dfrac{\tau}{h^2} \leqq 1$ の関係を保ったまま, $\tau \to 0, h \to 0$ のとき
「 $\left\{S^\tau_h\left(\left[\dfrac{t}{\tau}\right]\right) : t \geqq 0\right\}$ の分布」は「 $\{B(t) : t \geqq 0\}$ の分布」に収束する。

定理 18〜20 の証明は関数空間における確率測度の収束を示さねば
ならないので省略する。