＜ジャンプ型マルコフ過程＞

$\{X_1\ ,\ X_2\ ,\ \cdots\ ,\ X_n\ ,\ \cdots\}$ は独立で同分布な確率変数列で,

$P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \dfrac{1}{2}$ であるとする。$h > 0$ に対し

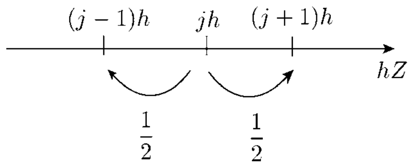
$$S_h(n) = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k\right)h & :\ n \geqq 1 \\ 0 & :\ n = 0 \end{cases}$$

とおくと, $\{S_h(n)\ :\ n \geqq 0\}$ は hZ 上を動くランダムウォークであり,

推移確率は

$$P\Big(S_h(n+1) = (j+1)h \mid S_h(n) = jh\Big) = \frac{1}{2}$$

$$P\Big(S_h(n+1) = (j-1)h \mid S_h(n) = jh\Big) = \frac{1}{2}$$



となる。次の極限定理は「ポアソンの少数の法則」の変形である。

定理 18 前のページのランダムウォーク $\{S_h^\tau(n) : n = 0, 1, 2, \cdots\}$ に対し,

$\left\{S_h^\tau\left(\left[\dfrac{t}{\tau}\right]\right) : t \geqq 0\right\}$ は連続時間の確率過程である。$\tau \to 0$ のとき

「$\left\{S_h^\tau\left(\left[\dfrac{t}{\tau}\right]\right) : t \geqq 0\right\}$ の分布」は「$\{S_h(N_h(t)) : t \geqq 0\}$ の分布」に収束する。

ただし $N_h(t)$ は $\{S_h(n) : n \geqq 0\}$ と独立な $(\lambda = h^{-2}$ の場合の$)$ ポアソン過程であり,

$$P(N_h(t) = n) = e^{-\frac{t}{h^2}} \times \frac{(\frac{t}{h^2})^n}{n!} \qquad (\ n = 0, 1, 2, \cdots\ )$$

を満たす。

$\{S_h(n)\}$ と $\{N_h(t)\}$ の定義から次式が成り立つ。

$$(*3)\quad P\Big(S_h(N_h(t)) = jh\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} P\Big(S_h(n) = jh\Big) e^{-\frac{t}{h^2}} \times \frac{(\frac{t}{h^2})^n}{n!}$$

$$(*4)\quad P\Big(S_h(n+1) = jh\Big) = \frac{1}{2} P\Big(S_h(n) = (j+1)h\Big) + \frac{1}{2} P\Big(S_h(n) = (j-1)h\Big)$$

確率過程 $\{S_h(N_h(t))\ :\ t \geqq 0\}$ はジャンプ型のマルコフ過程である。

問 $(*3)$, $(*4)$ を証明せよ。