< ランダムウォークの族 >

$\tau/h^2 \leqq 1$ をみたす正定数 τ , h に対し, $h\boldsymbol{Z} = \{hz \ : \ z$ は整数$\}$ 上を動く
ランダムウォーク $\{S_h^\tau(n)\}$ を次で定める。

< $\{S_h^\tau(n)\}$ の定義 >

[I] (マルコフ性)

$$P\Big(S_h^\tau(n+1) = x_{n+1} \mid S_h^\tau(n) = x_n \ , \ S_h^\tau(n-1) = x_{n-1} \ , \ \cdots \ , \ S_h^\tau(1) = x_1\Big)$$

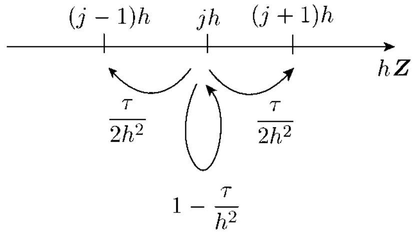
$$= P\Big(S_h^\tau(n+1) = x_{n+1} \mid S_h^\tau(n) = x_n\Big)$$

[II] (推移確率)

$$P\Big(S_h^\tau(n+1) = jh \mid S_h^\tau(n) = jh\Big) = 1 - \frac{\tau}{h^2}$$

$$P\Big(S_h^\tau(n+1) = (j+1)h \mid S_h^\tau(n) = jh\Big) = \frac{\tau}{2h^2}$$

$$P\Big(S_h^\tau(n+1) = (j-1)h \mid S_h^\tau(n) = jh\Big) = \frac{\tau}{2h^2}$$



[III] (初期値)

$$P(S_h^\tau(0) = 0) = 1 \quad , \qquad P(S_h^\tau(0) = j) = 0 \quad (j \neq 0)$$

この定義より次式が成立する

(∗1) $P(S_h^\tau(n+1) = jh)$

$$= \left(1 - \frac{\tau}{h^2}\right) P\Big(S_h^\tau(n) = jh\Big) + \frac{\tau}{2h^2} P\Big(S_h^\tau(n) = (j+1)h\Big) + \frac{\tau}{2h^2} P\Big(S_h^\tau(n) = (j-1)h\Big)$$

この式から $u_j^n = P(S_h^\tau(n) = jh)h^{-1}$ とおくと次式が成り立つ。

(∗2) $$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2h^2}$$

問 (∗1) , (∗2) を証明せよ。