

< 確率密度の収束 2 >

より, $P(S_n h = jh)$ と $u(n\tau, jh)h$ は同じ差分式をみたす。

そこで $n = 0$ のときの値 (初期値) を同じにする。

$$(5) \quad u(0, jh)h = \left\{ \begin{array}{l} 1 : j = 0 \text{ のとき} \\ 0 : \text{その他} \end{array} \right\} = P(S_0 = j) \quad (j \in \mathbf{Z})$$

とおくと

$$u(n\tau, jh)h = P(S_n h = jh) \quad (n = 0, 1, 2, \dots, j \in \mathbf{Z})$$

が成立する。(3), (5) の解 $u(n\tau, jh)$ に対し

$$u_h(t, x) = u\left(\left[\frac{t}{\tau}\right]\tau, \left[\frac{x}{h}\right]h\right) \quad (\tau = h^2)$$

とおくと $h \rightarrow 0$ のときの極限の関数

$$\lim_{h \rightarrow 0} u_h(t, x) = u(t, x) \quad (\text{差分解の収束})$$

は (1) の解で初期条件

$$(0) \quad \lim_{t \rightarrow 0} u(t, x) = \left\{ \begin{array}{l} +\infty : x = 0 \text{ のとき} \\ 0 : \text{その他} \end{array} \right., \quad \int_{-\infty}^{\infty} u(t, x) dx = 1$$

をみたす。この解 $u(t, x)$ は

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

となる。ランダムウォーク $\{S_n\}$ に対し, 折れ線 $\{B_h(t)\}$ の存在確率は,

$t = n\tau$ のとき $B_h(t) = B_h(n\tau) = S_n h$ だから

$$P(a < B_h(t) < b) = P(a < S_n h < b)$$

$$= \sum_{\substack{j \\ a < jh < b}} P(S_n h = jh) = \sum_{\substack{j \\ a < jh < b}} u(n\tau, jh)h = \sum_{\substack{j \\ a < jh < b}} u_h(t, jh)h \doteq \int_a^b u_h(t, x) dx$$

$$\xrightarrow{(h \rightarrow 0)} \int_a^b u(t, x) dx = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \quad \text{より } \bullet \text{ が成り立つ。}$$