

< 確率密度の収束 1 >

なめらかな関数 $f(x)$ に対し, 次の極限式が成り立つ。

$$(\textcircled{1}) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \quad \dots \quad 1 \text{ 階導関数}$$

$$(\textcircled{2}) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x) \quad \dots \quad 2 \text{ 階導関数}$$

問 ロピタルの定理を用いて $(\textcircled{2})$ を証明せよ。

この極限式より h が十分小さいとき, 次の近似式が成り立つ。

$$f'(x) \doteq \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad f''(x) \doteq \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

< 熱方程式の差分近似 >

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) \quad \dots \quad \text{熱方程式 (拡散方程式)}$$

上記の近似式によって熱方程式 (1) を差分式 (2) になおす。時間の増分を $\Delta t = \tau$, 空間の増分を $\Delta x = h$ とおく。(1) の差分式は

$$(2) \quad \frac{u(t+\tau, x) - u(t, x)}{\tau} = \frac{u(t, x+h) - 2u(t, x) + u(t, x-h)}{2h^2}$$

となる。ここで $\tau = h^2$ のとき (2) より

$$u(t+\tau, x) = \frac{1}{2}u(t, x+h) + \frac{1}{2}u(t, x-h)$$

となり, $t = n\tau, x = jh$ のとき

$$(3) \quad u((n+1)\tau, jh) = \frac{1}{2}u(n\tau, (j+1)h) + \frac{1}{2}u(n\tau, (j-1)h)$$

が成り立つ。一方ランダムウォーク S_n の確率 $P(S_n = j) = P(S_n h = jh)$ は

$$(4) \quad P(S_{n+1}h = jh) = \frac{1}{2}P(S_n h = (j+1)h) + \frac{1}{2}P(S_n h = (j-1)h)$$