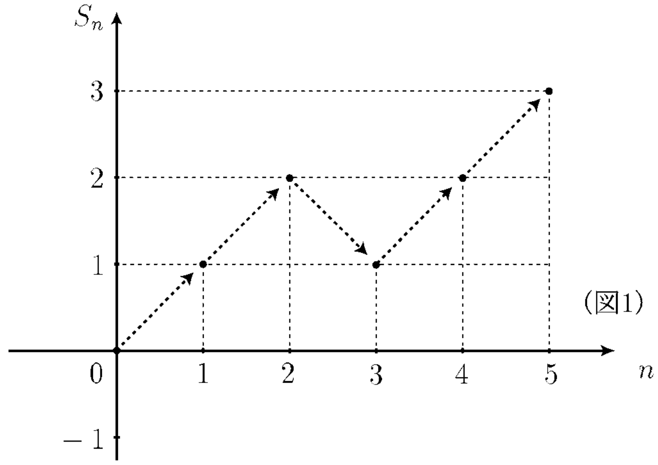
< ランダムウォークによるブラウン運動の構成 >

前ページのランダムウォーク

$$S_n = \sum_{h=1}^{n} X_k\,, \quad S_0 = 0$$

は $\boldsymbol{Z}$ 上を動く。$h > 0$ に対して $\tau = h^2$ とおき、$\{B_h(t) : t > 0\}$ を次式で定義する。



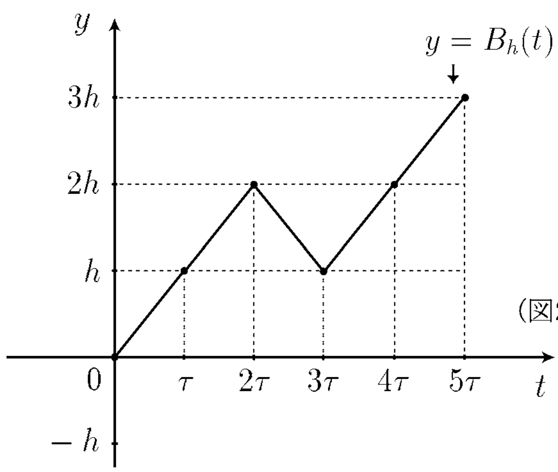
(図1)

$$B_h(t) = hS_{\left[\frac{t}{\tau}\right]} + \left(\frac{t}{\tau} - \left[\frac{t}{\tau}\right]\right) h \left\{S_{\left[\frac{t}{\tau}\right]+1} - S_{\left[\frac{t}{\tau}\right]}\right\}$$

ここで

$[t] = t$ を超えない最大整数 (ガウス記号)

である。もし S_n が図 1 のような動きであれば $B_h(t)$ は図 2 のような折れ線である。Donsker (1951) は $h \to 0$ のとき、$\{B_h(t) :\geqq 0\}$ の極限としてブラウン運動 $\{B(t) : t \geqq 0\}$ を構成した。それは関数空間上の確率測度の収束であるが、厳密な定義は省略する。Donsker の定理から、時刻 $t > 0$ を止めたときの存在確率の収束



(図2)

$$\boxed{\lim_{h\to 0} P(a < B_h(t) < b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx = P(a < B(t) < b)}$$

がわかる。

問 $u(t,x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$ とおくと $\dfrac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x)$ が成立することを証明せよ。