< 乱歩の極限 >

前ページの乱歩 $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ に対し、$X_1, X_2, \cdots, X_n$ は独立で同分布な確率変数で $E[X_k] = 0,\ E[(X_k)^2] = 1$ より、

$$E[S_n] = 0 \ ,\ E[S_n^2] = n$$

が成り立つ。さらに次の定理が成り立つ。

定理 17 任意の正数 $C > 0$ に対し、次の極限式が成立する。

(1) $\lim_{n\to\infty} P(|S_n| \leqq C) = 0$

(2) $\lim_{n\to\infty} P(|S_n| \leqq C \cdot n) = 1$ (大数の法則)

(3) $\lim_{n\to\infty} P(|S_n| \leqq C\sqrt{n}) = \int_{-C}^{C} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ (中心極限定理)

(証明) (1) 略

(2) チェビシェフの不等式より

$$P(|S_n| \geqq C \cdot n) \leqq \frac{1}{C^2 n^2} E[S_n^2] = \frac{1}{C^2 n} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

(3) S_n の標準化は $S_n^* = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$ で、中心極限定理より

$$P(|S_n| \leqq C\sqrt{n}) = P(|S_n^*| \leqq C) \xrightarrow[(n\to\infty)]{} \int_{-C}^{C} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

(証明終)

[系] $t > 0$ とする。極限式

$$\lim_{n\to\infty} P(a < \frac{S_{nt}}{\sqrt{n}} < b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx$$

が任意の定数 $a, b (a < b)$ に対し成立する。

問 中心極限定理を用いて系を証明せよ。