< Wiener 過程 >

ウィナー (Wiener) はブラウン運動 $\{B(t) : 0 \leqq t \leqq \pi\}$ を次のように構成した。

<Wiener によるブラウン運動の構成>

$X_0, X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ は独立同分布な確率変数列で、全て標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。すなわち $P(X_n \in A) = \displaystyle\int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (A \subset \boldsymbol{R})$ が成り立つ。このとき

$$(*) \quad \boxed{B(t) = \frac{t}{\sqrt{\pi}} X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\, X_n \frac{\sin(nt)}{n}} \qquad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

と置くと、確率過程 $\{B(t) : 0 \leqq t \leqq \pi\}$ は前ページの性質$\boxed{1}$,$\boxed{2}$,$\boxed{3}$を満たす。Wiener はブラウン運動 $B(t)$ をフーリエ級数展開 $(*)$ によって構成した。

(注) ブラウン運動 $\{B(t)\}$ の時間微分 $\dot{B}(t)$ を「ホワイト・ノイズ」と呼ぶのは $(*)$ 式を形式的に時間微分すると

$$(*)' \qquad \dot{B}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\, X_n \cos(nt)$$

となるからである。周期 $\dfrac{2\pi}{n}$ $\left(= \text{周波数} \dfrac{n}{2\pi}\right)$ の波 $\cos(nt)$ の強度 $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left|X_n\right|$ の平均は $E\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left|X_n\right|\right] = \dfrac{2}{\pi}$ で n に無関係に一定である。全ての周波数の強度が一定なスペクトルをもつ可視光が白色になるから「ホワイト」と呼ばれる。また「ノイズ」(雑音) の由来は、ブラウン運動 $\{B(t)\}$ がジグザグな動きであり、その時間微分は各瞬間ごとにまったくでたらめな値をとるランダムな過程であり、このような波形を持つ音は純粋な雑音として聞こえるからである。ただし $(*)'$ 式の右辺は収束しないので、数学者はこの式 $(*)'$ を使わない。

Wiener のブラウン運動は P.Levi 等によってその数学的性質が詳しく研究された。さらに 1951 年にドンスカー (Donsker) はランダム・ウォークからブラウン運動を構成した。次ページからその話をする。