＜ブラウン運動＞

1827 年植物学者の Brown は水に浮かぶ花粉の粒子が不思議な動きをしているのを発見した。花粉の粒子は突然にある一定距離移動し、止まる。これを繰り返し、ジグザグな動きをする。花粉以外でも、水に浮かぶ微粒子ならば同様の動きをすることがわかった。この運動する粒子をブラウン粒子と呼び、その運動を「ブラウン運動」と呼ぶ。

1905 年アインシュタイン (Einstein) はブラウン粒子の時刻 t、位置 x に存在する確率密度 $u(t,x)$ が熱方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) \qquad (t \geqq 0, x \in \boldsymbol{R})$$

を満たすことを示した。ここで D は拡散係数と呼ばれる正の定数である。なお空間が 3 次元の場合は $\dfrac{\partial u}{\partial t} = D(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2})$ となる。

1923 年ウィナー (Wiener) はブラウン運動の数学的モデルを次の$\boxed{1}$,$\boxed{2}$,$\boxed{3}$をみたす確率過程 $\{B(t) : t \geqq 0\}$ として提案した。

$\boxed{1}$ $\{B(t) : t \geqq 0\}$ は t の関数として連続である。

$\boxed{2}$ [独立増分性]

$$\left(\begin{array}{l} \text{任意の時間分点 } 0 \leqq t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n \text{ に対して、} \\ B(t_1) - B(t_0),\ B(t_2) - B(t_1),\ \cdots,\ B(t_n) - B(t_{n-1}) \text{ は独立} \end{array}\right)$$

$\boxed{3}$ [Gauss 分布 (正規分布)]

任意の $0 \leqq s < t$ に対して、

$$P(B(t) \in A \mid B(s) = a) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2(t-s)}}\, dx \qquad (a \in \boldsymbol{R}, A \subset \boldsymbol{R})$$

が成り立つ。

$\boxed{1}$,$\boxed{2}$,$\boxed{3}$を満たす確率過程 $\{B(t) : t \geqq 0\}$ を「**ブラウン運動**」または「**Wiener 過程**」と言う。なお空間が 3 次元の場合は$\boxed{3}$のかわりに

$\boxed{3}'$ $$P(B(t) \in A \mid B(s) = a) = \iiint_A (2\pi(t-s))^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{|x-a|^2}{2(t-s)}} dx_1 dx_2 dx_3$$

$$(x{=}(x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3, a \in \boldsymbol{R}^3, A \subset \boldsymbol{R}^3)$$

を用いる。

(注) $\boxed{1}$,$\boxed{2}$,$\boxed{3}$を満たす $\{B(t)\}$ の存在確率密度 $u(t,x)$ $\left(P(B(t) \in A) = \displaystyle\int_A u(t,x)dx\right)$ は $D = \dfrac{1}{2}$ の場合の熱方程式の解である。