< ポアソン過程 >

5,6 ページのタクシーの例で、1 時間に平均 λ 回空のタクシーが通る場合、1 時間に通る空のタクシーの台数を X とすると、

$$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

であった。$t>0$ に対し、t 時間に通るタクシーの台数を $X(t)$ とすると、(平均 λt 回通るから)

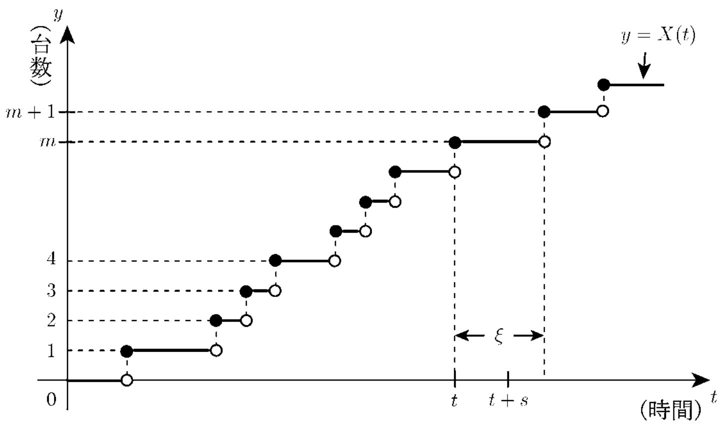
(1) $$P\bigl(X(t)=k\bigr)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

となる。また「時刻 t までの通過台数 m」と「時刻 t から後の通過台数」とは独立だから、$s>0$ に対して

(2) $$P\bigl(X(t+s)-X(t)=k \mid X(t)=m\bigr)=P\bigl(X(t+s)-X(t)=k\bigr)=e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^k}{k!}$$

となる。(1), (2) を満たす確率過程 $\bigl\{X(t):t>0\bigr\}$ を**ポアソン過程**という。

$\bigl\{X(t)\bigr\}$ のグラフは右図のように階段形のグラフになる。
今時刻 t までに m 台通過したとき、$m+1$ 台目が通るまでの待ち時間を ξ とすると、$s>0$ に対し



$$\begin{aligned}
&P\bigl(\xi>s \mid X(t)=m\bigr)\\
&= P\bigl(X(t+s)=m \mid X(t)=m\bigr)=P\bigl(X(t+s)-X(t)=0 \mid X(t)=m\bigr)\\
&= e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^0}{0!}=e^{-\lambda s}=\int_s^\infty \lambda e^{-\lambda x}dx
\end{aligned}$$

より、ξ は密度 $\lambda e^{-\lambda x}$ の指数分布に従う。この待ち時間の平均は

(3) $$\boxed{E[\xi]=\frac{1}{\lambda}}$$

である。

問 (3) 式を証明せよ。