＜母平均の区間推定 4＞

例題 ある都市の満 17 歳の平均身長 μ(cm) を求めたい。母集団は正規母集団とする。標本として 10 人を無作為復元抽出し、その身長の値を $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_{10}$ とする。今、平均と不偏分散が

$$\overline{X} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i = 169.3 \quad , \quad U = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = 6.43$$

であった。μ の 95% 信頼区間を求めよ。

(解) 標本数 $n = 10$ が小さいので、前ページの (∗∗) 式を使う。確率 $1 - \alpha = 0.95$ での信頼区間を求める。$\alpha = 0.05$ のとき t 分布表より $t_{n-1}(\alpha) = t_9(0.05) = 2.262$ だから、前ページ (∗∗) 式より

$$169.3 - 2.262 \times \sqrt{\frac{6.43}{10}} \leqq \mu \leqq 169.3 + 2.262 \times \sqrt{\frac{6.43}{10}}$$

(答) $167.486 \leqq \mu \leqq 171.114$

問 例題と同じく 10 人の身長を測ったら、その値 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_{10}$ の平均と不偏分散は

$$\overline{X} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i = 169 \quad , \quad U = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = 6.25$$

であった。t 分布表を用いて、μ の 99.5% 信頼区間を求めよ。

(注) 標本数 n の大小により、信頼区間の式がちがうが、n が大きくなると $t_n(x)$ は標準正規分布 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ に近づくので、n が大きいときも (∗∗) 式を使って良い。$t_n(x)$ のグラフ (実線) と $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ のグラフ (点線) を比べてみてほしい。