＜母平均の区間推定 3＞

正規母集団からの標本数 n が小さいときは、7 ページ $(*)$ 式や 8 ページ $(*)'$ 式は適用できない。この場合は $t-$ 分布を使う。
正規母集団 $N(\mu,\sigma^2)$ から無作為復元抽出により n 個の標本 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ を得た。その標本平均 $\overline{X}$ と不偏分散 U を

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \qquad , \qquad U=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$$

とする。各 X_i は $N(\mu,\sigma^2)$ に従う確率変数であり、$\{X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n\}$ は独立だから、正規分布の性質によって $\overline{X}$ と U は独立になり、

$$T=\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\frac{U}{n}}} \qquad (T-\text{統計量})$$

は自由度 $n-1$ の $t-$ 分布に従う。すなわち

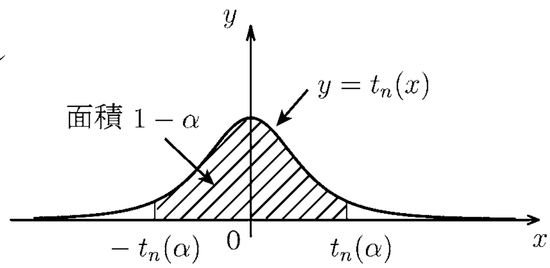
$$P(a<T<b)=\int_a^b t_{n-1}(x)dx\ ,$$

$$t_n(x)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

が成り立つ。ここで $0<\alpha<1$ なる α に対し

$$\int_{-k}^{k}t_n(x)dx=1-\alpha$$

をみたす正数 k を $t_n(\alpha)$ とおく。



T の密度関数が $t_{n-1}(x)$ だから

$$P\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\frac{U}{n}}}\right|\leqq t_{n-1}(\alpha)\right)=1-\alpha$$

が成り立つ。よって

$$\text{確率 } 1-\alpha \text{ で } \boxed{\overline{X}-t_{n-1}(\alpha)\sqrt{\frac{U}{n}}\leqq\mu\leqq\overline{X}+t_{n-1}(\alpha)\sqrt{\frac{U}{n}}} \qquad (**)$$

が成り立つ。$(**)$ が信頼度 $1-\alpha$ の信頼区間である。