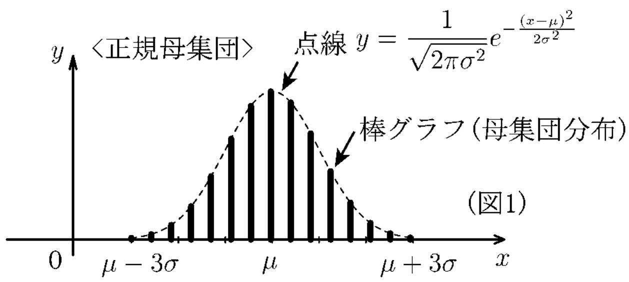
< 母平均の区間推定 1 >

前ページの例題のように母集団の平均や分散を 1 つの数値で推定する方法を**点推定**という。この点推定の場合、本当の母集団の平均値 (また分散値) と推定値との間には誤差がある。

母集団の分布型がわかっている場合や、標本数が多い場合には、もう少し精密な推定ができる。本当の母集団の値と推定値との間の誤差の評価ができる。例えば「95% の確率で平均値は 98.4 と 102.6 との間にある」というように、求めるべき母集団の値が含まれる区間を示す幅をつけた推定法を**区間推定**という。いくつかの場合に母平均の区間推定をする。

まず母集団が正規分布で近似できる場合を考える。例えば、全国の満 18 歳男子の身長の測定値のつくる集団とか、工業製品の寸法を多数計測したときの測定値の作る集団などである。このように、過去の調査結果などから母集団分布 (図 1 の棒グラフ) が正規分布曲線 $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ (図 1 の点線) で近似できる場合、この集団を**正規母集団** $\boldsymbol{N(\mu,\sigma^2)}$ という。この場合、母平均は μ, 母分散は σ^2 である。



(図1)

$X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ を正規母集団 $N(\mu,\sigma^2)$ からの標本とするとき、標本平均 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ は正規分布 $N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$ に従うので、その標準化 $\overline{X}^* = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ は標準正規分布に従うから

$$P\left(\left|\overline{X}-\mu\right| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\alpha\right) = P\left(\left|\overline{X}^*\right| < \alpha\right) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = f(\alpha)$$

が成り立つ。よって

$$確率\ p = f(\alpha)\ で\quad \boxed{\overline{X} - \frac{\sigma\alpha}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + \frac{\sigma\alpha}{\sqrt{n}}}\quad \cdots\quad (*)$$

であると推定できる。$(*)$ を確率 $p = f(\alpha)$ の信頼区間という。