< 非復元抽出による標本調査 3 >

$\boxed{\text{(5) の証明の続き}}$ 前ページより

$$E\left[\left(\overline{X}-\mu\right)^2\right]=\frac{1}{n^2}\left\{\sum_{k=1}^{n}E\left[(X_k-\mu)^2\right]+\sum_{1\leqq k\neq \ell\leqq n}E[(X_k-\mu)(X_\ell-\mu)]\right\}$$

$$=\frac{1}{n^2}\left\{n\sigma^2+n(n-1)\times\left(-\frac{\sigma^2}{N-1}\right)\right\}=\frac{\sigma^2}{n(N-1)}\{(N-1)-(n-1)\}=\frac{N-n}{(N-1)n}\sigma^2$$

$\boxed{\text{(6) の証明}}$

$$E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-\overline{X}\right)^2\right]=\frac{1}{n-1}E\left[\sum_{k=1}^{n}X_k{}^2-2\sum_{k=1}^{n}X_k\overline{X}+n\overline{X}^2\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}E\left[\sum_{k=1}^{n}X_k{}^2-n\overline{X}^2\right]=\frac{1}{n-1}E\left[\sum_{k=1}^{n}\{(X_k-\mu)+\mu\}^2-n\left\{\left(\overline{X}-\mu\right)+\mu\right\}^2\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}\left\{\sum_{k=1}^{n}E\left[(X_k-\mu)^2-2(X_k-\mu)\mu+\mu^2\right]-nE\left[\left(\overline{X}-\mu\right)^2+2\left(\overline{X}-\mu\right)\mu+\mu^2\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{n-1}\left\{\sum_{k=1}^{n}E\left[(X_k-\mu)^2\right]+n\mu^2-n\left(E\left[\left(\overline{X}-\mu\right)^2\right]+\mu^2\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{n-1}\left\{\sum_{k=1}^{n}\sigma^2-n\times\frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{\sigma^2}{n}\right\}=\frac{\sigma^2}{n-1}\left\{n-\frac{N-n}{N-1}\right\}=\frac{N}{N-1}\sigma^2$$

(証明終)

例題 (不偏分散の応用)

かんづめ 50 個の中から 5 個を無作為に抽出し、重さを測ったら

98, 101, 100, 98, 103　　(単位はグラム)

であった。次の各場合に 50 個全体の平均と分散を推測せよ。

(1) 復元抽出の場合　　(2) 非復元抽出の場合

(解) (1) 定理 14 より $\overline{X}=\frac{1}{5}\{98+101+100+98+103\}=100$　　(標本平均)

$$U=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-\overline{X}\right)^2$$

$$=\frac{1}{5-1}\left\{(98-100)^2+(101-100)^2+(100-100)^2+(98-100)^2+(103-100)^2\right\}$$

$$=\frac{9}{2}=4.5$$ (不偏分散)

(2) 定理 15 より $\overline{X}=\frac{1}{5}\{98+101+100+98+103\}=100$　　(標本平均)

$$V=\frac{N-1}{N(n-1)}\sum_{k=1}^{5}\left(X_k-\overline{X}\right)^2=\frac{49}{50\times 4}\times 18=4.41$$ (非復元抽出のときの不偏分散)