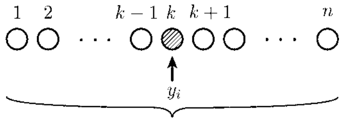
< 非復元抽出による標本調査 2 >

前ページの定理 15 を証明する。

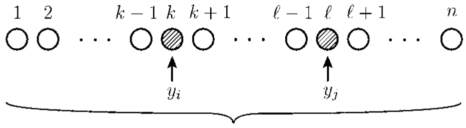


y_i 以外の $N-1$ 個の $\{y_1, \cdots, y_{i-1}, y_{i+1}, \cdots, y_N\}$ から $n-1$ 個選んで 1 列に並べる順列は ${}_{N-1}P_{n-1}$ 通り

(1) の証明

$$P(X_k = y_i) = \frac{{}_{N-1}P_{n-1}}{{}_NP_n}$$

$$= \frac{(N-1)(N-2)\cdots\bigl(N-1-(n-1)+1\bigr)}{N(N-1)(N-2)\cdots(N-n+1)} = \frac{1}{N}$$



y_i, y_j 以外の $N-2$ 個の $\{y\}$ から $n-2$ 個選んで 1 列に並べる順列は ${}_{N-2}P_{n-2}$ 通り

(2) の証明 $k \neq \ell,\ i \neq j$ に対し

$$P(X_k = y_i,\ X_\ell = y_j) = \frac{{}_{N-2}P_{n-2}}{{}_NP_n}$$

$$= \frac{(N-2)(N-3)\cdots\bigl(N-2-(n-2)+1\bigr)}{N(N-1)(N-2)(N-3)\cdots(N-n+1)} = \frac{1}{N(N-1)}$$

(3) の証明

$$E[X_k] = \sum_{i=1}^{N} y_i\, P(X_k = y_i) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i = \mu$$

$$E\left[(X_k-\mu)^2\right] = \sum_{i=1}^{N}(y_i-\mu)^2 P(X_k = y_i) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i-\mu)^2 = \sigma^2$$

(4) の証明

$$E\left[\,\overline{X}\,\right] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E[X_k] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mu = \mu$$

(5) の証明

$$E\left[\left(\overline{X}-\mu\right)^2\right] = E\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu\right)^2\right] = \frac{1}{n^2}E\left[\left\{\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)\right\}^2\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}E\left[\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)^2 + \sum_{k\neq\ell}(X_k-\mu)(X_\ell-\mu)\right]$$

ここで $k \neq \ell$ に対し

$$E[(X_k-\mu)(X_\ell-\mu)] = \sum_{i\neq j}(y_i-\mu)(y_j-\mu)P(X_k = y_i,\ X_\ell = y_j)$$

$$= \frac{1}{N(N-1)}\sum_{i\neq j}(y_i-\mu)(y_j-\mu) = \frac{1}{N(N-1)}\left[\underbrace{\left\{\sum_{i=1}^{N}(y_i-\mu)\right\}^2}_{=\,0} - \sum_{i=1}^{N}(y_i-\mu)^2\right] = -\frac{\sigma^2}{N-1}$$