＜ 2 次元正規分布に従うデータと回帰直線 3 ＞

20 ページの性質 $\boxed{1}$ を示す。
2 次元データ (X_i, Y_i) $(1 \leqq i \leqq n)$ の直交回帰直線の方程式は

$$(1) \qquad y = m(x - \overline{X}) + \overline{Y} \qquad \cdots\cdots \qquad (\text{直交回帰直線})$$

$$m = \frac{S_{yy} - S_{xy} + \sqrt{(S_{xx} - S_{xy})^2 + 4(S_{xy})^2}}{2S_{xy}}$$

である。大数の法則より $\overline{X} \doteqdot m_X$, $\overline{Y} \doteqdot m_Y$, $S_{xx} \doteqdot {\sigma_1}^2$, $S_{yy} \doteqdot {\sigma_2}^2$, $S_{xy} \doteqdot \rho\sigma_1\sigma_2$ であるから直線 (1) は

$$(1)' \qquad y = m'(x - m_X) + m_Y$$

$$m' = \frac{{\sigma_1}^2 - {\sigma_2}^2 + \sqrt{({\sigma_1}^2 - {\sigma_2}^2)^2 + 4(\rho\sigma_1\sigma_2)^2}}{2\rho\sigma_1\sigma_2}$$

で近似できる。ここで 20 ページの場合 $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\cos\theta & -\lambda_2\sin\theta \\ \lambda_1\sin\theta & \lambda_2\cos\theta \end{pmatrix}$ であるから

$$ {\sigma_1}^2 = a^2 + c^2 = {\lambda_1}^2\cos^2\theta + {\lambda_2}^2\sin^2\theta \ , \qquad {\sigma_2}^2 = b^2 + d^2 = {\lambda_1}^2\sin^2\theta + {\lambda_2}^2\cos^2\theta $$

$$\rho\sigma_1\sigma_2 = ab + cd = {\lambda_1}^2\cos\theta\sin\theta - {\lambda_2}^2\sin\theta\cos\theta$$

より傾き m' は

$$m' = \frac{({\lambda_1}^2 - {\lambda_2}^2)(\sin^2\theta - \cos^2\theta) + \sqrt{\left({\lambda_1}^2 - {\lambda_2}^2\right)^2}}{2({\lambda_1}^2 - {\lambda_2}^2)\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta + 1}{2\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

であるから、直線 $(1)'$ は 20 ページの直線①に等しい。
よって性質 $\boxed{1}$ が示された。

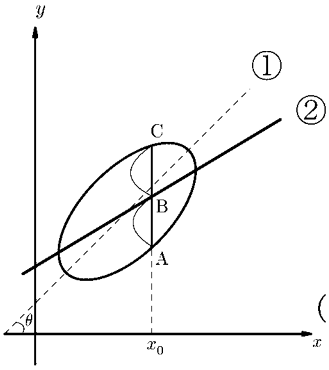
(注 1)　20 ページの直線②の傾きは　　$(\lambda_1 > \lambda_2 > 0,\ \sin\theta > 0,\ \cos\theta > 0$ より$)$

$$\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{ab + cd}{a^2 + c^2} = \frac{\lambda_1^2\sin\theta\cos\theta - {\lambda_2}^2\sin\theta\cos\theta}{{\lambda_1}^2\cos^2\theta + {\lambda_2}^2\sin^2\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + \dfrac{{\lambda_2}^2}{({\lambda_1}^2 - {\lambda_2}^2)\cos\theta}} < \tan\theta$$

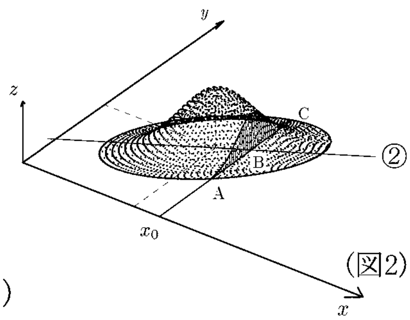
となり、直線①の傾き $\tan\theta$ より小さい。

(注 2)　直線②の傾きは，楕円の中心軸である直線①の傾きより小さい (図 1)

図 2 の 2 次元正規分布の曲面に対し，平面 $x = x_0$ の断面は，直線②との交点 B を境にして面積が等しい 2 つの部分にわかれる。



(図1)



(図2)