＜条件付確率 2＞

1. $X,\ Y$ が離散型確率変数のとき，

「$X=x$ が起こったとき，$Y=y$ の起こる条件付確率」を

$$P(Y=y \mid X=x)=\begin{cases} \dfrac{P(Y=y,\ X=x)}{P(X=x)} & : P(X=x)>0 \\ 0 & : P(X=x)=0 \end{cases}$$

と定める。

2. $X,\ Y$ が連続型確率変数で

X の密度が $p_X(x)\left(\Leftrightarrow P(X\in A)=\displaystyle\int_A p_X(x)dx\right)$

Y の密度が $p_Y(y)\left(\Leftrightarrow P(Y\in B)=\displaystyle\int_B p_Y(y)dy\right)$

X と Y の同時分布の密度が $p(x,\ y)\left(\Leftrightarrow P\big((X,\ Y)\in A\times B\big)=\displaystyle\iint_{A\times B} p(x,\ y)dxdy\right)$

であるとき，

「$X=x$ が起こったとき，$Y=y$ の起こる条件付確率密度」を

$$p(Y=y \mid X=x)=\begin{cases} \dfrac{p(x,\ y)}{p_X(x)} & : p_X(x)>0 \\ 0 & : p_X(x)=0 \end{cases}$$

と定める。このように定めると

「$X=x$ が起こったとき，Y が B に含まれる条件付確率」は

$$P(Y\in B \mid X=x)=\int_B p(Y=y \mid X=x)dy$$

$$=\int_B \frac{p(x,\ y)}{p_X(x)}dy=\frac{\int_B p(x,\ y)dy}{\int_{-\infty}^{\infty} p(x,\ y)dy}$$

となる。

(注)　$p_X(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} p(x,\ y)dy$