< 2次元正規分布 2 >

定理13 $(X,\ Y)$ は一般の 2 次元正規分布 (前ページ定理 12) に従うとする。すなわち

$$P\big((X,\ Y) \in A \times B\big) = \iint_{A\times B} p(x,\ y)dxdy,$$

$$p(x,\ y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{Q(x,\ y)}{2}}$$

$$Q(x,\ y) = \frac{1}{1-\rho^2}\left\{\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-m_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-m_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}$$

とする。ただし $\sigma_1 > 0$，$\sigma_2 > 0$，$0 < \rho < 1$ である。このとき次式が成立する。

$$E[X] = \iint_{\boldsymbol{R}^2} xp(x,\ y)dxdy = m_1 \ (X \text{ の平均}),\ E[Y] = \iint_{\boldsymbol{R}^2} yp(x,\ y)dxdy = m_2 \ (Y \text{ の平均})$$

$$V(X) = E\big[(X-m_1)^2\big] = \iint_{\boldsymbol{R}^2} (x-m_1)^2 p(x,\ y)dxdy = {\sigma_1}^2 \ (X \text{ の分散})$$

$$V(Y) = E\big[(Y-m_2)^2\big] = \iint_{\boldsymbol{R}^2} (y-m_2)^2 p(x,\ y)dxdy = {\sigma_2}^2 \ (Y \text{ の分散})$$

$$C_{ov}(X,\ Y) = E\big[(X-m_1)(Y-m_2)\big] = \iint_{\boldsymbol{R}^2} (x-m_1)(y-m_2)p(x,\ y)dxdy = \rho\sigma_1\sigma_2 \ (\text{共分散})$$

また X の密度関数を $p_X(x)$，Y の密度関数を $p_Y(y)$ と書くと

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,\ y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2{\sigma_1}^2}}$$ ：平均 m_1，分散 ${\sigma_1}^2$ の 1 次元正規分布密度

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,\ y)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-m_2)^2}{2{\sigma_2}^2}}$$ ：平均 m_2，分散 ${\sigma_2}^2$ の 1 次元正規分布密度

となる。

(注) $p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,\ y)dy$ となるのは任意の実数 $a,\ b\ (a < b)$ に対し

$$\int_a^b p_X(x)dx = P(a < X < b) = P\big((X,\ Y) \in (a,\ b) \times \boldsymbol{R}\big) = \iint_{(a,\ b)\times\boldsymbol{R}} p(x,\ y)dxdy = \int_a^b \left\{\int_{\boldsymbol{R}} p(x,\ y)dy\right\} dx$$

が成立するからである。この $(X,\ Y)$ の分布に対して，X だけの分布 (または Y だけの分布) を**周辺分布**という。