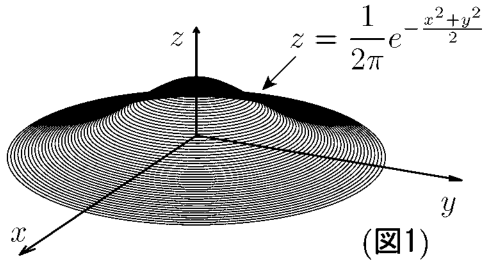
＜2次元正規分布１＞

定理11　$X,\ Y$ は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従い，X と Y が独立ならば

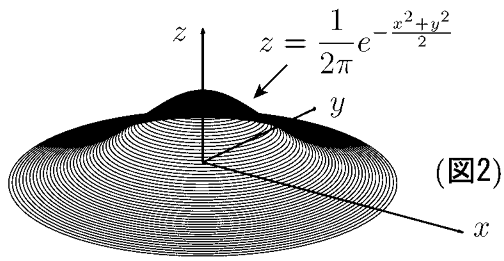
$$P\big((X,\ Y)\in A\times B\big)=\iint_{A\times B}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy \qquad (A,\ B\in \boldsymbol{R})$$

となる。このとき「$(X,\ Y)$ は**2次元標準正規分布**に従う」という。

(注)図1と図2はこの密度関数 $z=\dfrac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ が表す曲面である。



(図1)



(図2)

定理12　$(U,\ V)$ を2次元標準正規分布に従うとする。定数 $m_1,\ m_2,\ a,\ b,\ c,\ d\ (ad-bc\neq 0)$ に対して

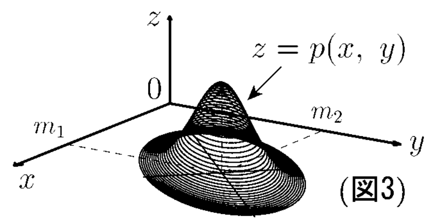
$$X=aU+cV+m_1\ ,\quad Y=bU+dV+m_2$$

とおくと，$(X,\ Y)$ の分布 $P\big((X,\ Y)\in A\times B\big)=\iint_{A\times B}p(x,\ y)dxdy$ の密度関数 $p(x,\ y)$ は

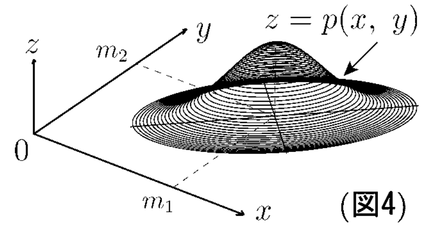
$$p(x,\ y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-m_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{y-m_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}}$$

となる。ここで $\sigma_1=\sqrt{a^2+c^2},\ \sigma_2=\sqrt{b^2+d^2},\ \rho=\dfrac{ab+cd}{\sigma_1\sigma_2}$ である。

(注1) 図3と図4が $m_1=2,\ m_2=2,\ a=0.4,\ b=0.4,\ c=-0.2,\ d=0.2$ の場合の $z=p(x,\ y)$ の曲面である。

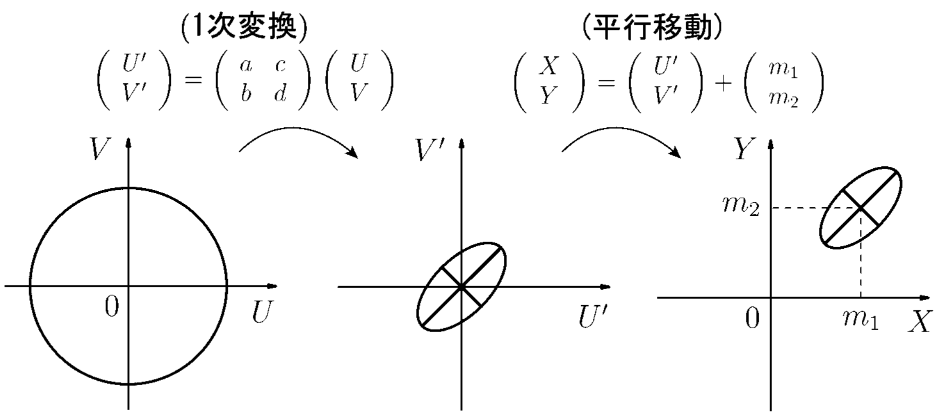


(図3)



(図4)

(注2) 変換 $(U,\ V)\to(X,\ Y)$ を1次変換 (回転，拡大，縮小) と平行移動に分けると右図のようになる。



(注3) 定理12の分布を一般の**2次元正規分布**という。