$<$ t 分布，F 分布 $>$

$<$ t 分布 $>$

正数 n に対し，関数

$$t_n(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \qquad (\ x \in \boldsymbol{R}\ )$$

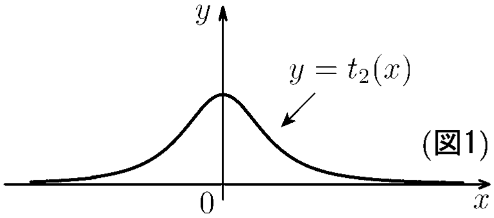
を密度とする分布を，**自由度 n の t 分布**という。$n=1$ のときは *Cauchy* 分布 (コーシー分布) といい，平均は存在しない。$n>1$ のとき平均は 0 である。$n \leqq 2$ のとき分散は存在しない。$n>2$ のとき分散は $\dfrac{n}{n-2}$ である。

定理 8 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} t_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

定理 9 X が正規分布 $N(0,\ 1)$ に従い，Y が自由度 n の χ^2 分布に従う確率変数で，X と Y が独立ならば

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$$

は自由度 n の t 分布に従う。



(図1)

系 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ は独立で正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うとき，

$$\frac{\sqrt{n}\,(\overline{X}-m)}{\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^2}}$$

は自由度 $n-1$ の t 分布に従う。ただし $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ である。

$<$ F 分布 $>$

正の整数 $m,\ n$ に対して，関数

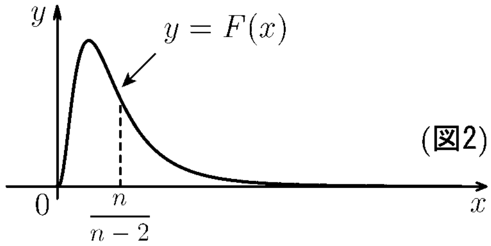
$$F(x) = \frac{n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{m}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}}{B(\frac{n}{2},\ \frac{m}{2})(nx+m)^{\frac{n+m}{2}}} \qquad (\ x>0\ )$$

を密度とする分布を，**自由度 $(n,\ m)$ の F 分布**という。$n > 2$ のとき平均は $\dfrac{n}{n-2}$，$n>4$ のとき分散は $\dfrac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$ である。

定理 10 X と Y が独立で，それぞれ自由度 $n,\ m$ の χ^2 分布に従うとき，

$$Z = \frac{\frac{X}{n}}{\frac{Y}{m}}$$

は自由度 $(n,\ m)$ の F 分布に従う。



(図2)

図 2 は $n=8,\ m=10$ の場合の $y=F(x)$ のグラフである。