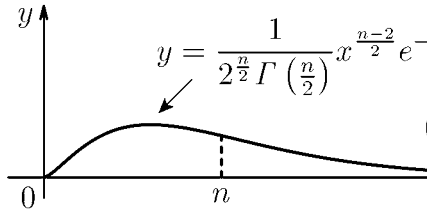
< χ^2 分布，ベータ分布 >

< χ^2 分布 >

X_1, X_2, $\cdots$, X_n は独立で正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うとする。このとき $X = \dfrac{1}{\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2$ は $\alpha = \dfrac{n}{2}$, $\beta = 2$ のガンマ分布に従う。すなわち

$$P(a < X < b) = \int_a^b \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{x}{2}} dx \qquad (\ a < b\ )$$

となる。この分布を**自由度 n の χ^2 分布** (カイ 2 乗分布) という。平均は $E[X] = n$ であり，分散は $V(X) = 2n$ である。図 1 は $n = 5$ の場合の密度関数の図である。

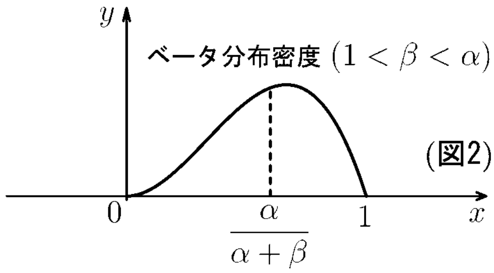


(図1)

< ベータ分布 >

正定数 α, β に対し，関数

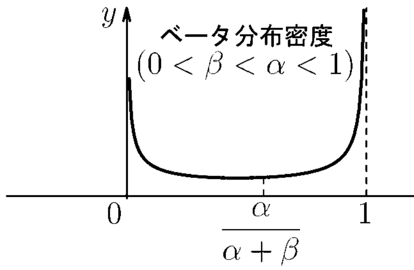
$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B(\alpha,\ \beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & : 0 < x < 1 \\ 0 & : \text{その他} \end{cases}$$



(図2)

を密度とする分布を形状母数 $(\alpha,\ \beta)$ の **ベータ分布**という。ただし $B(\alpha,\ \beta)$ はベータ 関数

$$B(\alpha,\ \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx$$



(図3)

である。ベータ分布の平均は $\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$ であり，分散は $\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$ である。図 2 は $\alpha = 3$, $\beta = 2$ の場合のグラフであり，図 3 は $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.3$ の場合のグラフである。$\alpha = \beta = 1$ の場合は一様分布になる。

定理 7 正定数 α, β, λ に対し，X を $Gamma(\alpha,\ \lambda)$ に従う確率変数，Y を $Gamma(\beta,\ \lambda)$ に従う確率変数で，X と Y は独立する。このとき $Z = \dfrac{X}{X+Y}$ の分布は形状母数 $(\alpha,\ \beta)$ のベータ分布である。