< ガンマ分布・指数分布 >

< ガンマ分布 >

定数 $\alpha,\ \beta > 0$ に対し

$$p(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} \qquad (\ x > 0\ )$$

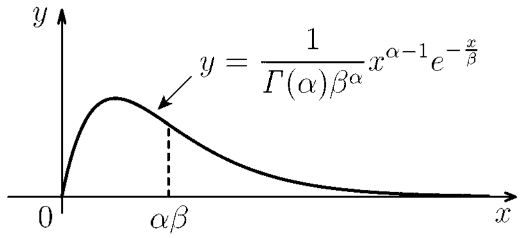
を密度とする確率分布を**ガンマ分布** $Gamma(\alpha,\ \beta)$ という。

α は形の母数，β は尺度母数といわれる。特に $Gamma(\alpha,\ 1)$ は形の母数 α の標準ガンマ分布という。$Gamma(\alpha,\ \beta)$ の平均と分散は

$$\int_0^{\infty} x \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx = \alpha\beta \ (\text{平均}),\quad \int_0^{\infty} (x-\alpha\beta)^2 \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx = \alpha\beta^2 \ (\text{分散})$$

となる。

定理 6 $X_1,\ X_2$ がそれぞれ $Gamma(\alpha_1,\ \beta)$，$Gamma(\alpha_2,\ \beta)$ に従う確率変数で X_1 と X_2 が独立ならば，和 $X_1 + X_2$ は $Gamma(\alpha_1 + \alpha_2,\ \beta)$ に従う。

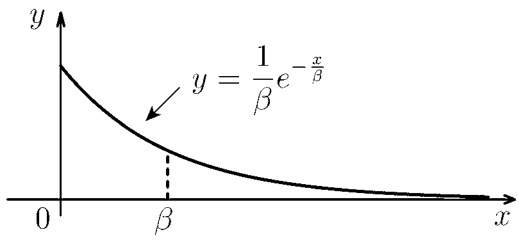


< 指数分布 >

$\alpha = 1$ のガンマ分布を指数分布という。その密度は

$$p(x) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} \qquad (\ x > 0\ )$$

である。平均は β，分散は β^2 である。



例 ポアソン分布の例のタクシーの場合，空のタクシーが平均 1 時間に λ 台通るとき，1 台の空タクシーが通りすぎた後で，次のタクシーが通るまでの時間を ξ とすると

$$P(\xi < s) = \int_0^{s} \lambda e^{-\lambda x} dx \qquad (\ \beta = \frac{1}{\lambda} \text{ の指数分布 })$$

となる。この理由はポアソン過程の項で詳しく説明する。