< ガンマ関数とベータ関数 >

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \qquad (\alpha > 0)$$

を**ガンマ関数**という。部分積分より

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha) &= \left[-x^{\alpha-1}e^{-x}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (\alpha-1)x^{\alpha-2}(-e^{-x})dx \\ &= (\alpha-1)\int_0^{\infty} x^{\alpha-2}e^{-x}dx \\ &= (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)\end{aligned}$$

より

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1) \qquad (\alpha > 1)$$

が成り立つ。また

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x}dx = 1$$

であるから，自然数 $n(\geqq 1)$ に対し

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

である。また $\lambda > 0$ に対し

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^{\alpha}}$$

が成り立つ。
$\alpha > 0,\ \beta > 0$ に対し，関数

$$B(\alpha,\ \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

を**ベータ関数**という。次式が成り立つ。

$$B(\alpha,\ \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = B(\beta,\ \alpha)$$