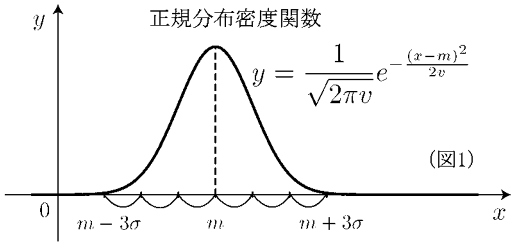
＜ 正規分布 1 ＞



(図1)

定数 m, v $(v > 0)$ に対し，関数

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2v}} \qquad (x \in \boldsymbol{R})$$

を確率密度関数にもつ確率変数 X の分布を

正規分布 (normal distribution) といい，$N(m,\ v)$ で表す。

X の平均と分散は

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2v}} dx = m \qquad : \text{平均}$$

$$V[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-m)^2}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2v}} dx = v \qquad : \text{分散}$$

である。図 1 は $y = p(x)$ のグラフである。ここで標準偏差を $\sigma = \sqrt{v}$ とすると

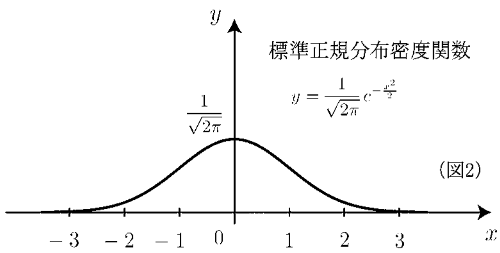
$$P(m - k\sigma \leqq X \leqq m + k\sigma) = \int_{m-k\sigma}^{m+k\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2v}} dx = \int_{-k}^{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

より正規分布表で積分値を求めると

$$P(m - 2\sigma \leqq X \leqq m + 2\sigma) = 0.9544 \quad , \quad P(m - 3\sigma \leqq X \leqq m + 3\sigma) = 0.9973$$

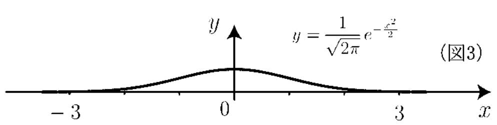
であるから X が平均から 2σ の範囲にある確率は 95.44 %であり，平均から 3σ の範囲にある確率は 99.73 %である。

$m = 0$, $v = 1$ のときの 分布 $N(0,\ 1)$ を **標準正規分布**という。 図 2 は，その密度関数のグラフ $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ である。ただし図 2 は y 軸方向を拡大している。(注：$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \fallingdotseq 0.4$)



(図2)

x 軸方向と y 軸方向を同じ長さにすると，$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ のグラフは図 3 のようになる。



(図3)

実際の標準正規分布曲線は図 3 のようになるが，平たくなりすぎるので，図 2 のような曲線として描いてあることが多い。