＜ポアソン分布 2＞

ここで

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-\lambda}{n}\right)^{\frac{n}{-\lambda}} = \lim_{x\to -0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad (\text{自然対数の底})$$

だから

$$\lim_{n\to\infty} P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}\times 1\times 1\times\cdots\times 1\times e^{-\lambda}\times 1 = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

が成り立つ。

一般に定数 $\lambda>0$ に対して,

$$P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

である確率分布を**ポアソン分布 $\boldsymbol{P(\lambda)}$** という。この平均と分散は

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda, \qquad V(X) = \sum_{k=0}^{\infty}(k-\lambda)^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda$$

である。

(注 1) 例の条件で「微小時間に空のタクシーが 2 台以上通ることはない」とした。このようにポアソン分布は「まれに起こる現象」の確率を表す。

(注 2) 例の極限の結果をまとめると

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} {}_nC_k\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

となる。すなわち二項分布の極限がポアソン分布である。このことを

「二項分布のポアソン近似」

とか

「ポアソンの少数の法則」

などと言う。

図 1 は $\lambda=10$ の場合のポアソン分布であり，図 2 は $n=40$，$p=\dfrac{10}{40}=\dfrac{1}{4}$ の場合の二項分布である。